

位相幾何学的グラフ理論問題集

ここに挙げる問題は当共同研究会の最後に行われたプロブレム・セッションの際に提起されたものです。用語の定義や留意点を問題の後に記しますが、詳細は出題者が執筆した解説を参照して下さい。私の責任で補足した部分もあり、出題者の意向に反する点多々あると思います。また、この原稿を作成中に解答の得られた問題もいくつかありますが、その解答は次回に紹介することにします。

横浜国立大学教育学部 根上生也

問題 1 (浅野)

厚さ $\theta(G) = n$ であるグラフ G の染色数 $\chi(G)$ の最大数を決定せよ。

解説: 任意のグラフ G は互いに辺を共有しない平面グラフの和に分解することができる。その分解に用いる平面グラフの最少個数を G の厚さ といい、 $\theta(G)$ で表す。例えば、完全グラフ K_p の厚さは下のように決定されている。

$$\begin{aligned}\theta(K_p) &= \lfloor (p+7)/6 \rfloor \quad (p \neq 9, 10) \\ \theta(K_9) &= \theta(K_{10}) = 3\end{aligned}$$

一方、隣接する頂点の色が異なるようにグラフ G の頂点を色分けするときに必要な色の個数の最小値を G の染色数 といい $\chi(G)$ で表す。明らかに $\chi(K_p) = p$ である。 $\chi(G) = k$ のとき、 G を k -染色的グラフ といい、さらに、 G の任意の真部分グラフ H に対して $\chi(H) < k$ となっているとき、 G を 臨界 k -染色的グラフ という。臨界 k -染色的グラフ G の最小次数 $\delta(G)$ が $k-1$ 以上であることは容易にわかる。また、どんな k -染色的グラフも臨界 k -染色的グラフを部分グラフとして含んでいる。

まず、問題の最大値 k の下界を求める。完全グラフの例で、頂点を増やしていったとき、初めて厚さ $\theta(K_p)$ が n を越える直前の頂点数 p を考えると、

$$((p+1)+7)/6 \geq n+1$$

となり、これを解いて、

$$k \geq \chi(K_p) = p = 6n - 2$$

を得る。

今度は k の上界を求めるために、 G を厚さ n の k -染色的グラフ ($n \geq 2$) とす

る。Gが含む臨界k-染色的グラフをHとすると、明らかに、

$$n = \theta(G) \geq \theta(H), \quad \delta(H) \geq k - 1$$

である。また、Hの次数の平均を $\theta(H)$ 個の平面部分グラフに分けて考え、平面的グラフの次数の平均が6より真に小さいことと合わせると、

$$6n \geq 6\theta(H) > \delta(H) \geq k - 1$$

を得る。ここでkは整数であるから、 $6n - 2 \geq k$ となる。

以上により、kが次の範囲にあることがわかる。

$$6n - 2 \leq k \leq 6n$$

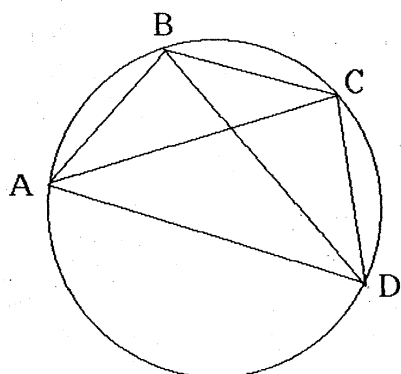
問題2 (前原)

任意のグラフは平面整数距離グラフになりうるか?

解説： 平面上に有限個の頂点を配置し、その2点間の距離が整数であるとき辺で結んで得られるグラフを考える。辺の交差はあってもよいが、整数距離にある2頂点は必ず隣接している。このようにして得られるグラフと同型なグラフを(平面) 整数距離グラフと呼ぶ。例えば、円に内接する四角形ABCDにおいて、

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$$

が成り立つことを用いて、 K_n や $K_{n,m}$ が整数距離グラフであることがわかる。また、頂点数の少ないグラフもピタゴラス数を利用して整数距離グラフであることが確認されている。



まず、ACを底辺とする鈍角二等辺三角形ABCに外接する円を描く。ただし、 $b = AC$ を調整して、Aからb刻みで円周上にn個の点が配置できるようにする。このとき、 $AB = BC = CD = a \in \mathbb{Q}$, $AC = BD = b \in \mathbb{Q}$ とすると、上の公式からADも有理数になる。この論法を繰り返せば、今配置したn個のうちの任意

の2点間の距離が有理数であることがわかる。その有理数を通分して、分母を払うように円周を拡大すれば、2点間の距離がすべて整数であるような n 個の点の配置を得る。これは K_n が整数距離グラフであることを示している。

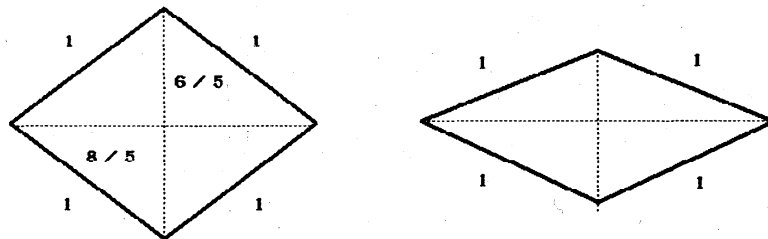
次に、 $AB=BC=CD=\sqrt{2}$ 、 $AC=BD=b \in \mathbb{Q}$ とし、 b を調整して $\sqrt{2}$ 刻みで円周上に十分多くの点が配置できるようにする。このとき、上の公式は

$$b \times b = 2 + \sqrt{2} \times AD \in \mathbb{Q}$$

となり、 AD は無理数でなければならない。この論法を繰り返すと、円周上に配置された点を一つおきに2個のクラスに分けると、そのクラス内では2点間の距離は無理数、異なるクラス間では有理数になっている。この配置を適当に整数倍に拡大すれば、 $K_{n,m}$ の整数距離グラフが得られる。

問題3 (前原)
整数距離グラフは有理距離グラフか?

解説： 整数距離グラフと同様に、2点間の距離が有理数のとき辺で結ぶことにより得られるグラフを有理距離グラフと呼ぶ。前問の解説でも見たように、有理距離グラフは適当に整数倍に拡大すれば、整数距離グラフとなる。しかし、その逆は必ずしも明かではない。例えば、3、4、5の直角三角形を利用すれば、1辺の長さが1で2本の対角線の長さがそれぞれ $6/5$ 、 $8/5$ となるひし形ができる。これは長さ4の閉路 C_4 が整数距離グラフであることを示しているが、これだけでは C_4 が有理距離グラフであると断言できない。しかし、対角線の長さを調整して無理数にすることができるから、 C_4 は有理距離グラフである。前問の解説にある構成法から K_n や $K_{n,m}$ も有理距離グラフであることもわかる。



問題4 (前原)
単位距離グラフで三角形を持たないものは変形するか?

解説： 2点間の距離が1のときのみ辺で結んで得られるグラフが単位距離グラフである。また，“グラフが変形する”とは隣接する2点間の距離を保ったままグラフの頂点を（合同変換以外のやり方で）連続的に移動できるという意味である。例えば，前述の1辺の長さが1のひし形は辺の長さを変えずに変形できる単位距離グラフである。一方，1辺の長さが1の正三角形はもはや動かない。これから三角形が随所にある単位距離グラフが変形不可能であることがわかるだろう。逆に，三角形がなければ変形可能であることが予想される。

問題5（前原）

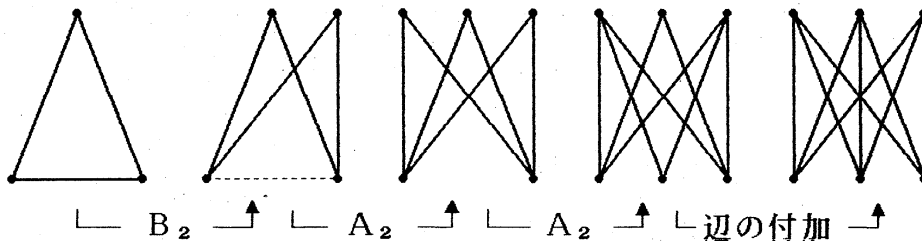
平面上のフレームとして任意の実現が定形となるグラフを特徴付けよ。

解説： 平面上のフレームとは平面上に頂点を配置してそれをいくつかの直線分で結んで得られるグラフである。ただし，辺の交差を許すので，任意のグラフは平面上のフレームとして実現できる。そのフレームの辺の長さを変えずに平面内で変形できるとき，そのフレームは変形するといい，そうでないとき，定形であるという。また，グラフGの代数的に独立な座標を持つ任意の平面上のフレームが定形であるとき，Gを2-定形であるという。2-定形のグラフの族と K_3 から辺の付加と変形 A_2 と B_2 を繰り返して構成できるグラフの族が一致することはすでにわかっている。

A_2 ： 新たに頂点xを加え，2頂点と辺で結ぶ。

B_2 ： 新たに頂点xを加え，辺の両端点と結び，その辺を除去する。

例えば， $K_{3,3}$ は下図のようにして構成されるので2-定形となるが，問題2の構成法において， $AB=BC=CD=\sqrt{\pi}$ ， $AC=BD=b \in \mathbb{Q}$ として得られる $K_{3,3}$ のフレーム（有理距離グラフになっている）は変形してしまふ。これは，代数的距離グラフ（距離が代数的数であるとき辺で結んで得られるグラフ）が定形となるための必要十分条件はそれが完全グラフであることであるという，一般的な事実から示される。

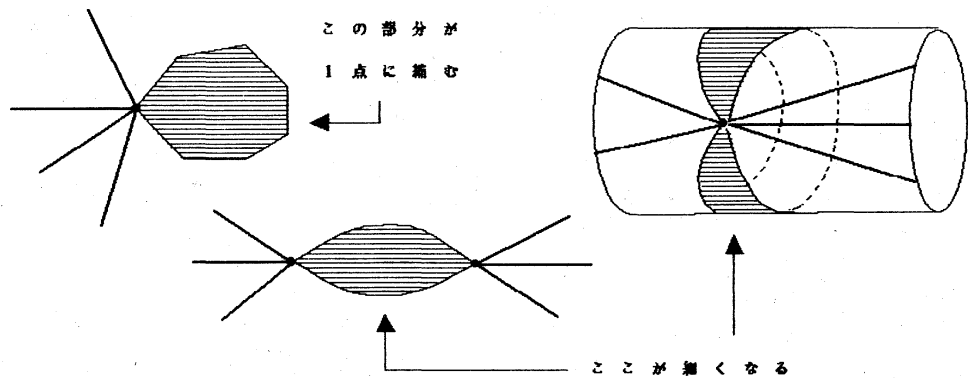


三角形のどんなフレームも定形であるから，辺の付加と A_2 を繰り返して得られるグラフのフレームも定形となることは明かだろう。これから，問題のグラフの族と K_3 から辺の付加と A_2 を繰り返して得られるグラフの族が一致すると予想

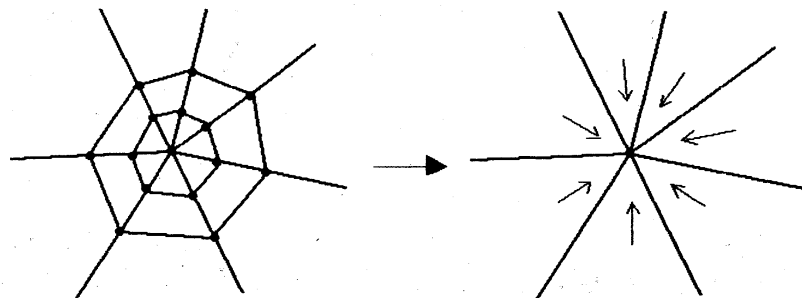
される。実際、三角形を破壊するためには B_2 が必要だから、 $K_{3,3}$ はこの族には属さない。

問題6 (根上)
閉曲面上のグラフが最短の埋め込みを持つための必要十分条件を求めよ。

解説: リーマン計量が定められた閉曲面上のグラフ G の辺 e の長さを $|e|$ とおき、その総和 $\sum \{|e| : e \in E(G)\}$ を G の全長と呼ぶ。問題の目的は G を連続的に変形して G の全長を最小にすることにある。例えば、 G に下図のような部分があると、その部分の全長を限りなく 0 に近づけることができる。しかし、その極限はもはや G の埋め込みではないので、 G は最短の埋め込みを持たないことになる。



G がこのような部分を含まないとき、 G を位相的に3-連結な埋め込みと呼ぶ。また、ループや2本の多重辺が作る閉路が2-胞体の境界になっていないとき、埋め込み G を位相的に単純であるという。特に、位相的に3-連結な埋め込みは位相的に単純である。もし G の最短の埋め込みが存在すれば、その各辺はいわゆる測地線になっている。そのような埋め込みを測地的な埋め込みという。



一部が1点に退化しようとするとき、その他の部分が引き延ばされそうだから、適当な測地的な埋め込みでバランスするような気がする。しかし、引き延ばされる辺の本数がある程度多くないと、それは期待できない。例えば、前図のように、1つの頂点からクモの巣状に広がった構造があると、測地的な埋め込みのまま全長が減少していきグラフは退化してしまう。

計算の都合上、適当な単調増加関数 $\xi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ に対して、

$$\xi(G) = \sum \{ \xi(|e|) : e \in E(G) \}$$

とおき、これを最小にすることを考えた方がよい場合もある。例えば、双曲的幾何学の知識を使おうとするならば、 $\xi(x) = \cosh(x)$ とおけばよいだろう。また、 $\xi(x) = x^2$ とおくと、一部だけ収縮することを防げるかもしれない。実際、閉路が縮約不可能な閉曲線になっていれば、閉曲面上で連続的に変形して $\xi(G)$ を最小にすれば、頂点が均一に配置された最短の測地的な埋め込みが得られる。一般に、位相的に単純な埋め込みは、連続的に変形して測地的な埋め込みにすることができるが、それが最短の埋め込みになるとはかぎらない。

問題7 (根上)

閉曲面上のグラフ G の全長を減少させる連続的な変形の極限がいつも G と同型なグラフになるための条件を求めよ。

解説: 前問の解説で見たような状況がなければ、 G の全長を短くしていくと、どこかでバランスして、測地的な埋め込みに到達するように思われる。しかし、 G の最短の埋め込みが存在するとしても、適当に変形を修正して、変形の極限が G の埋め込みにならないようにできるかもしれない。しかし、適当に種数の高い閉曲面に前述の状況がなければ、局所的な収縮に伴う全体的な引き延ばし率が大きくなってグラフが退化することを防止してくれるような気がする。例えば、位相的に単純なループと1頂点のみからなるグラフの2-胞体埋め込みはどのように全長を縮めていっても、測地的な埋め込みが得られる。

問題8 (根上)

連続的に変形して凸埋め込みにできる閉曲面上のグラフを特徴付けよ。

解説: リーマン計量が定められた閉曲面 F 上の領域 A 内の任意の2点を結ぶ測地線の弧が A に含まれているとき、領域 A を F 上の凸領域と呼ぶ。 F に埋め込まれたグラフ G の各領域が凸領域であるとき、その埋め込みを G の凸埋め込みと呼ぶ。凸埋め込みは測地的埋め込みだが、一般に逆は成り立たない。すでに、定

曲率な閉曲面上では位相的に3-連結な埋め込みが凸埋め込みに連続的に変形できることがわかっている。

問題9 (根上)

トーラスとクラインの壺に対する再埋蔵定理を作れ。

解説: 連結グラフ G の球面への埋め込みのバリエーションは切断頂点の部分での局所的な飛び越しと2頂点を固定した局所的な部分の反転により生成できる。これが球面の再埋蔵定理である。また, 射影平面上のグラフの埋め込みのバリエーションも6タイプに分類されており, 再埋蔵定理が存在する。トーラスやクラインの壺に対しても同様の定理を作ってほしい。6頂点以上の3-連結非平面的グラフは $K_{3,3}$ の細分を含むから, その $K_{3,3}$ と残りの部分の埋め込みの変化に着目して埋め込みの構造を記述するとよいだろう。

問題10 (根上)

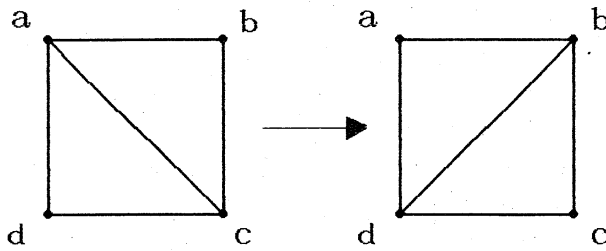
4-正則トーラス・グラフを分類せよ。

解説: オイラーの公式により, 4-正則トーラス・グラフの領域の周長の平均が4であることがわかる。したがって, 三角形領域がなければ, すべての領域は四辺形になる。そのような埋め込みを矩形埋め込みと呼ぶ。矩形埋め込みは格子状に分割した長方形を同一視して得られ, 適当にパラメーターを定めて簡単に分類することができる。その矩形埋め込みを4-正則トーラス・グラフの基本形と考えて, 三角形領域を解消する変形や球面上の4-正則グラフとの“連結和”などを考案して, なんらかの分類定理が欲しい。すでに存在する4-正則平面グラフの生成定理や6-正則トーラス・グラフの分類等が参考になるだろう。

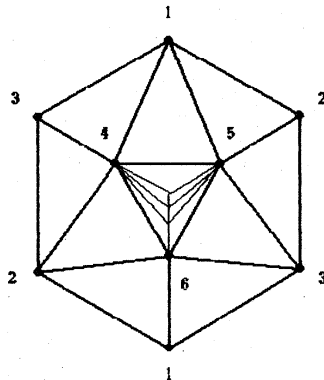
問題11 (根上)

頂点数の等しい閉曲面の三角形分割は対角線変形で移り合うか?

解説: 閉曲面の三角形分割の隣接した二つの三角形 abc , acd が作る四角形において, 対角線 ac を bd に取り替える操作を対角線変形と呼ぶ。ただし, 頂点 b と d がその四角形の外部の辺で結ばれているときには, この変形をしてはいけない。このルールのもとで, 二つの三角形分割が移り合うかというのが問題である。



すでに、球面、射影平面、トーラス、クラインの壺の三角形分割に対しては、問題の答えがYESであることが証明されている。例えば、射影平面の場合は下図のように K_6 の埋め込みに次数3の頂点を順に追加していった形のを標準形とみなして、任意の三角形分割が対角線変形でその標準形に変形できることが証明できる。球面、トーラス、クラインの壺の三角形分割の場合も次数3の頂点を無視すればその標準形は一つに定まる。こうした事情から、次数3の頂点の追加・除去を併用すれば、一つの閉曲面の三角形分割は対角線変形で互いに移り合うことが予想される。



問題12 (根上)

閉曲面の最小の三角形分割は唯一か？

解説： この問題は前問と深い関係にある。例えば、この問題が正しく、さらに、頂点数が最小でない三角形分割から対角線変形を行なって次数3の頂点を作りだせることが示されれば、数学的帰納法を用いて前問が正しいことが証明できる。しかし、この問題の答えがYESでなくとも、前問の答えがYESになることはありうる。実際、球面、射影平面、トーラスの最小の三角形分割は唯一だが、クラインの壺の最小の三角形分割は3個存在する。最小の三角形分割が複数個存在しても、それらが互いに対角線変形で移り合えれば、前問は依然として正しい。

すでに、閉曲面 F の三角形分割の三角形の個数の最小値 $\Delta(F)$ は、ヒーウッド

数と関連して次のように決定されている。

$$\Delta(F) = 2 \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(F)}}{2} \right\rfloor - 2\mathcal{E}(F)$$

ただし、 F が種数2の向き付け可能な閉曲面と種数2, 3の向き付け不可能な閉曲面に対してはこの公式は成り立たず、それぞれ

$$\Delta(F) = 24, 16, 20$$

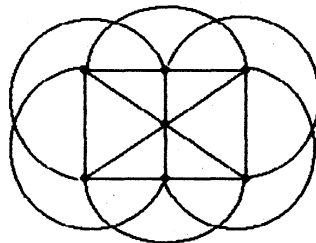
となる。特に、上の公式の右辺の「 \lfloor 」の中が整数になるときは、最小の三角形分割の1-骨格は頂点数の確定した完全グラフになっている。

一般にはこの問題の答えはNOなので、どういう曲面に対してYESとなるかを考察すべきである。特に、最小の三角形分割が完全グラフになる場合がYESとなる可能性が大であるから、次問が問題である。

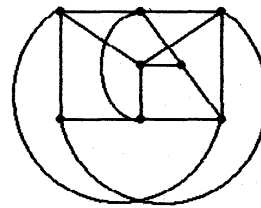
問題13 (根上)
完全グラフの最小種数の埋め込みは一意的か?

解説： 地図色分け定理の証明のために構成された完全グラフの埋め込みは対称的なものばかりなので、非対称な埋め込みが構成できると答えはNOとなる。実際、 K_5 のトーラス上の埋め込みは何通りも作れるので、一般には答えはNOである。前問の解説で述べたように、特に、閉曲面の三角形分割を与える完全グラフ K_n (向き付け可能のとき $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$; 不可能のとき $n \equiv 0, 1, 3, 4 \pmod{6}$)の埋め込みの一意性が問題である。例えば、 K_4, K_6, K_7 はそれぞれ球面、射影平面、トーラスの三角形分割を与えており、その埋め込みは一意的である。

問題14 (根上)
次の二つのグラフは有限の平面的被覆を持つか?



A, $\cong K_{6, \dots, \dots}$



B, $\cong K_{8, \dots, \dots} - K_2$

解説： この二つのグラフ（左： A_2 ， 右： E_{18} ）が有限の平面被覆を持たないことが示されれば，いわゆる“1-2- ∞ 予想”が肯定的に解決される．すなわち，有限の平面的被覆を持つグラフは必ず2重の平面的被覆を持つことになる．単にこの問題を解いただけでは論文にはならないでしょうが，“1-2- ∞ 予想”の解決の一部として捉えると大変価値の高いものになります．また，問題の答えがYESでも，有限の平面被覆を持つグラフの特徴付けるKuratowski型の定理を作ることができます．というわけで，この問題の解答を得た方は，抜け駆けをせず根上（横浜国立大学045-335-1451内線2232）まで御一報下さい．

問題15（根上）

3-連結グラフは3-連結平面的グラフの細分を全域部分グラフとして含むか？
4-連結グラフは3-連結平面的グラフを全域部分グラフとして含むか？

解説： 5頂点以上のどんな3-連結グラフも縮約しても3-連結性が保たれる辺を持つので，それを順に縮約していけば，いずれは3-連結平面的グラフに至る．それを逆操作で引き延ばしながら適当に補正をすれば，目的の部分グラフが得られるような気がする．4-連結グラフの方は単に類推でしかないので，特に根拠はない．ただし，平面的グラフを4-連結とすることはできない．なぜなら，4-連結平面的グラフはハミルトン閉路を持つので，仮に4-連結平面的全域部分グラフの存在が示されたとすると，すべての4-連結グラフがハミルトン閉路を持つことになってしまうからである．しかし，これは誰も信じない．（実は，すでにこの問題の反例が発見されている．そういうときには問題の特徴付けに切り替える．）

問題16（根上）

ブロック G は次の条件を満たす n 個の辺 e_1, \dots, e_n を持つか？

- (i) n は G のベッチ数 $\beta(G)$ に等しい．
- (ii) e_i のみを含む閉路 C_i が存在する．
- (iii) e_i と e_j のみを含む閉路 C_{ij} が存在する．

解説： 一般に，連結グラフ G の全域木に属さない辺を e_1, \dots, e_n とすれば，問題の(i), (ii)は自動的に満たされる．さらに，(iii)を満たすように辺を選べると，張替氏が示したブロックが持つ閉路の個数の下界 $n + n(n-1)/2$ の意味が明確になる．しかし，この3条件を満たすグラフはあまり存在しそうでないので，3条件を満たすグラフの特徴付けや分類を試みた方が懸命でしょう．

問題17 (津久井)

閉曲面の三角形分割が他の三角形分割の細分であるかどうか判定するアルゴリズムを求めよ。

解説： 頂点数が等しい二つの三角形分割が与えられたとき、一組の頂点の対応が三角形分割全体の同型対応に拡大するならば、その他の頂点の対応は自動的に決ってしまう。このことから三角形分割の同型判定は多項式時間で終了する。また、三角形の個数を制限すれば、与えられた三角形分割の細分の個数も有限であるから、問題のアルゴリズムは存在する。したがって、細分の個数の上限が評価できれば、そのアルゴリズムの手間が評価できるだろう。

問題18 (津久井)

他の細分とならない閉曲面の三角形分割を決定せよ。

解説： 三角形分割 K が他の三角形分割 L の細分になっているとき、 $L < K$ と定めれば、“ $<$ ”は三角形分割全体の集合上に半順序を定める。この半順序集合内の極小元を決定したい。例えば、球面の三角形分割はすべて正四面体の細分になっている。つまり正四面体が球面の場合の極小元である。Graph minorの議論から、互いに他の縮約になっていない三角形分割は有限個しか存在しない。特に、射影平面とトーラスの場合、そのような三角形分割はちょうど2個と21個存在することが示されている。互いに他の細分にならない三角形分割は、互いに他の縮約にもならないから、射影平面(トーラス)の場合は、問題の極小元は2個以上(21個以上)存在する。一般に、細分に関する極小元は有限個か？

問題19 (浅野)

結び目が自明かどうかを判定する問題はNPか？

解説： 何に関してNPかが問題であるが、与えられた射影の交点数を基準に採るのが妥当だろう。自明な結び目の射影が与えられているとき、初めにある程度射影を複雑にしないと、解けない可能性が高い。何手ぐらい複雑にすればよいかの評価できれば、結び目判定の手間のオーダーが決定できるだろう。幾何学的には、結び目に張られている円板の極大点の個数に比例した手間でその射影を自明な状態まで変形できるのだが、円板の存在を仮定せずに判定しなくては意味がない。Hakenのアルゴリズムを使えば、その円板を探すことで結び目が判定でき

るが、線形計画問題の中でも難問とされている整数問題を解かなければならず、多項式時間では到底不可能である。3-橋結び目の場合はHOTの定理により線形時間で判定可能だが、一般論を考えるとNPだとは信じがたい。しかしNPを指示する実験的な結果もないわけではない。

問題20 (山下)

$$|V(G)| \geq n,$$

$$|E(G)| \geq (n-2)(|V(G)-n|) + n(n-1)/2$$

ならばグラフGは K_n に縮約可能か?

解説: $n \leq 4$ のときは、Gが K_n の細分を含んでいることが示されている。 $n = 5, 6$ のときも、上の命題が正しいことがすでにわかっている。また、辺数の下界もこれ以上改良ができないことを示す無限個の例も存在する。例えば、頂点 x, v_1, \dots, v_s からなるグラフGで、 x と v_i, \dots, v_{i+n-2} ($i = 1, \dots, s-n+2$)が K_{n-1} を作っているもの考えると、Gは K_n に縮約せず、その辺数は問題にある下界より1だけ少ない。