数理解析研究所講究録
686巻 1989年 153-161

Graphs with "Fat" Vertices

東京工大 北久保 茂 (Shigeru Kitakubo)

本稿は、C.McA.Gordon と J. Luecke の "Knots are Determined by their Complements" の紹介である。以下、定理等の番号は、原論文の番号づけに従う。

Introduction

結び目についての従来の結果は、「結び目型が同じ」 $\underset{①}{\Longrightarrow}$ 「結び目の補空間が同相」 $\underset{②}{\Longrightarrow}$ 「結び目群が同型」 ということである。この論文の結果は ① の逆方向である。

Th. 1　2つの結び目の補空間が同相ならば、それらは同値である。

さらに、Whitten の「結び目群が同型な2つの素な結び目の補空間は同相である」という定理により、次の Corollary が導かれる。

Cor. 1.1　2つの素な結び目の結び目群が同型ならば、2つの結び目は同値である。

Dehn surgery に関しては次の定理が導かれる。

Th. 2　自明でない結び目の自明でない Dehn surgery は S^3 を生じない。

Th. 2 を証明するための命題が2つあるので、それを紹介するために定義をする。

K を S^3 内の自明でない結び目とし、$N(K)$ を K の tubular neighborhood とする。そして、$X = S^3 - \mathrm{int}\,K$ を K の exterior とする。次に ρ を ∂X 上の slope、すなわち essential simple loop の unoriented isotopy class とし、K の ρ-Dehn surgery により得られる閉3-多様体を $K(\rho)$ とする。γ を K の meridian の slope とする。この時、自明な Dehn surgery は、$K(\gamma) \cong S^3$ を生じる。π を ∂X 上の別の slope とし、γ との minimal geometric intersection number $n \geq 1$ をもつとする。

Prop. 1　$K(\pi) \cong S^3$ ならば、X に proper に埋め込まれ次を満たす planar surface P, Q が存在する：

i) ∂P (∂Q) は π (γ) の parallel copy からなる。

ii) P と Q は transverse に交わり、∂P の各成分は ∂Q の各成分と n 点で交わる。

iii) $P \cap Q$ のどの arc も P や Q と boundary-parallel でない。

PとQの構成は結び目のthin presentationを用いた[Ga]に基づく。

<u>Prop. 2</u> XがProp. 1のi)〜iii)を満たすproperly embedded planar surfaces P, Qをもつとする。(但しQはKのthin presentationにおけるlevel sphereとXとの交わり) この時K(π)はlens spaceをconnected summandとしてもつ。

PとQのboundary componentにdiskをcap offして、これらのdiskがS^2のグラフG_P, G_Qの"fat" vertexを形成するとみなす。G_P (G_Q)の辺はP(Q)の中の$P \cap Q$のarcに対応する。G_Pの(disk) faceはPのsubdiskに対応するが、これは、boundaryが$Q \cup \partial N(K)$に含まれてK(γ)中にあるとみなせる。同様に、G_QのfaceはK(π)の中にあるとみなしてよい。これにより、K(γ) (K(π))のトポロジカルな性質を、G_P (G_Q)のグラフ論的性質から推論することができる。$n \geq 2$に対してはすでに証明されており[GCLS]、故にChapter 2では$n=1$とし、Prop.2を証明するためのグラフ論的技法を述べている。Chapter 2の主結果はProp.2.0.1であり これは次のことを主張している:

K(π)が、punctured lens spaceを含むということを示

すようなある特殊なface (Scharleman cycle) が G_Q 中にあるか、またはグラフ G_P の中に、ある条件を満たすfaceの集合がある。

本稿では、組み合せ的技法を多く用いているChapter 2を一部紹介することが目的である。

Chapter 2 The Combinatorics

2.0 定義

Xはorientable 3-多様体で、toral boundary component Tを含むとする。Tはslope π と γ を含み、P, Qは ∂P, $\partial Q \subset T$ となるようにXにproperに埋め込まれている、compact planar surfaceである。さらに、∂P, ∂Q の各componentは各々 π、γ を表し、∂P の各componentは ∂Q の各componentとただ1回交わる。そして $P \cap Q$ のどのarcもPやQとboundary parallelでない。

∂P, ∂Q のcomponentにそれぞれ $\{1, \cdots, p\}$, $\{1, \cdots, q\}$ と番号をつける。ただし、Tの向きづけに従って現れる順に番号をつけて行く。これにより、P(Q)中の $P \cap Q$ のarcの端点には、対応するQ(P)の番号をつけることができる。従って、∂P の各componentのまわりには、$\{1, \cdots, q\}$ のラベルが順次(時計回りまたは反時計回りに)現れることになる。

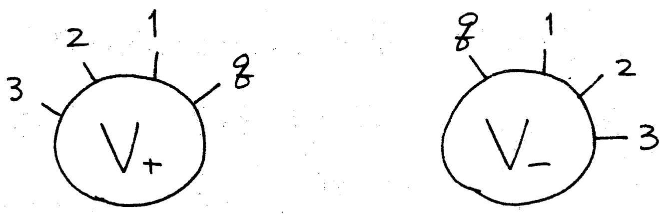


Figure 2.1

PとQのboundary componentに、前述のラベルの回り方に従って（例えば時計回りを＋，反時計回りを－，というように）符号±をつける。P∩Qの各arcに関して、parity rule が成立する：P上のarc α により結ばれるPのboundary componentが同符号 $\Longleftrightarrow$ Q上の α により結ばれるQのboundary componentが異符号。

P、Qのboundary componentにdiskをcap offし、これらのdiskを'fat' vertexとみなしてグラフ G_P, G_Q in S^2 を作る。両グラフの辺は、P，Q中のP∩Qのarcであり、それらは1対1対応している。また、両グラフの頂点のlabellingはparity ruleをみたし、両グラフとも自明なループをもたない。グラフ G_P のconceptは以下の通り。

(1) fat vertex v と sign $v = \pm$。

(2) ラベル $x \in \{1, \cdots, g\}$ と parity $x = \pm$ （$=x$ に対応する G_Q の頂点のsign）。

(3) (x, v) ：v における x のoccurrence。

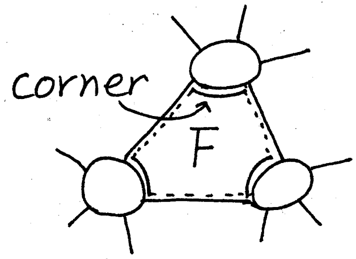
Character of $(x,v) =$ char$(x,v) = ($parity $x) \times ($sign $v)$

(4) parity rule：辺は異る character の (x, v) を結ぶ。

2つの頂点の sign が同じである時，2つの頂点は，parallel であるといい，異るとき antiparallel であるという。

G を上述のグラフとする。$N(G)$ を S^2 における G の regular neighborhood とすると，face F は $\overline{S^2 - N(G)}$ の component である。

∂F には corner と $E(G)$ とが交互に現れる。

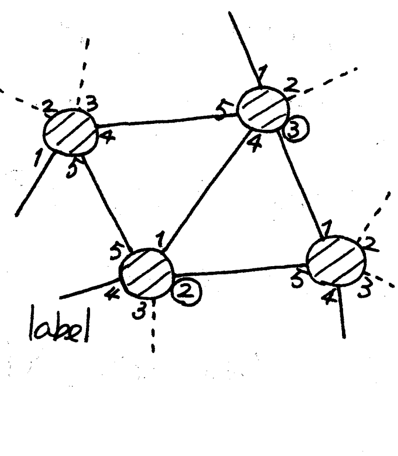


G の各頂点 v に対し，v におけるラベルの集合を $L(v)$ とする。$\{L(v) \mid v$ は G のある頂点$\}$ により生成されるグラフ $G(\{L(v)\})$ を G の部分グラフで，少なくとも一方の端点が (l, v) ($l \in L(v)$ かつ v は G の頂点) であるような辺全体からなるものと定める。

L をラベルの集合とする時，$G(L)$ を，すべての頂点 $v \in G$ について $L(v) = L$ とした $G(\{L(v)\})$ と定義する。

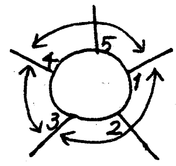
あるラベル x が $G(L)$ の exceptional label であるとは，x が，L には属さないが，$G(L)$ のある辺の端点のラベルと

$L = \{1, 4, 5\}$
とした時の
$G(L)$ (実線)
○印は
exceptional label



なっていることである。<u>L-interval</u> とは、Lで隣り合ったラベルの間の、fat vertexのboundary上の区間とする。

<u>m-type</u>は、順序付き m-組 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)\in\{+,-\}^m$ とし、L-interval の総数を l とした時、<u>L-type</u>は、各成分が異なる L-interval に対応するような l-type とする。$L_0\subset$ L-interval, τ を L-type とした時、<u>$\tau|L_0$</u> とは、τ を L_0 の対応する成分に制限して得られる $|L_0|$-type とする。



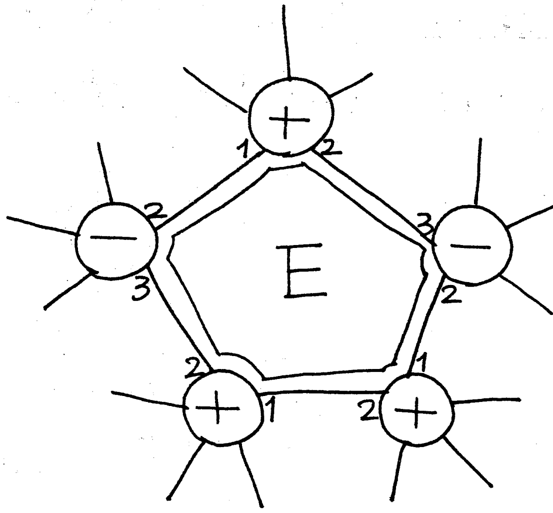
$L=\{1,3,4\}$ のとき
L-int. $=\{1\sim3,\ 3\sim4,\ 4\sim1\}$
L-type $=(+,\ -,\ -)$
(例)

E を G(L) の disk face、τ を L-type とし、
$L_E=\{I \mid I\in$ L-intervals, E のある corner が I に含まれる$\}$ とする。このとき、<u>E が τ を表現する</u>とは、次の(1)、(2)を満たすことである。

(1) 各 L-interval $I\in L_E$ に対し、$v\in V(G)$ における E の corner が I に含まれるようなすべての v が同じ sign $\varepsilon(I)$ をもつ。

(2) $(\varepsilon(I)\mid I\in L_E)=\pm\tau|L_E$

G(L) が τ を表現するとは、G(L) のある disk face が τ を表現することである。



$L=\{1,2,3,5\}$
とすると.

$L\text{-int.}=\{1\sim2, 2\sim3, 3\sim5, 5\sim1\}$

$L\text{-type}=(+,-,-,+)$
(例)

$L_E=\{1\sim2, 2\sim3\}$

$\varepsilon(1\sim2)=+$, $\varepsilon(2\sim3)=-$

$(\varepsilon(I)\,|\,I\in L_E)=(+,-)=\tau|L_E$

Gのx-cycle σ とは、Gの辺のサイクルで、次を満たすものである。

(1) Gの頂点を点とみなすと、σ はcircleに同相である。

(2) このサイクルにorientationを与え、各辺のtailのラベルがxであるようにできる。

(3) σ 中のGの頂点はすべてparallelである。

G中のScharleman cycleは、Gのx-cycle Σ で、$G\cap \operatorname{int} D=\emptyset$ となるようなdisk Dをboundするもの、である。

Prop. 2.0.1 G_P, G_Q を上述のグラフとすると、G_Q がScharleman cycleを含むか、または G_P が $\{1,\cdots,8\}$-typeすべてを表現する。

References

[CGLS] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke, and P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Annals of Math. 125 (1987), 237–300.

[Ga] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds, III*, J. Differential Geometry 26 (1987), 479–536.