数理解析研究所講究録
686巻 1989年 87-95

グラフの縮約と空間グラフへのその応用について

早稲田大学　　山下　哲

(Satoshi Yamashita)

グラフ G=(V(G),E(G)) は、有限グラフとする。特に、n 頂点完全グラフを K_n で表すことにする。また、集合 A の要素の個数を $|A|$ で表すことにする。グラフの縮約は、グラフの代表的な基本変形の１つである。この変形について考えてみる。

定義１　(グラフの縮約)

G をグラフ、e を G のループでない辺とする。

(1)　辺 e の縮約 (contraction of the edge) とは、G から辺 e を除去し、辺 e の端点を同一視するという操作のことである。この操作の結果、G から生ずるグラフを G/e で表すことにする。

(2)　G の基礎単純部分グラフ (underlying simple subgraph) とは、G からループを除き、多重辺を１つの辺にすることにより得られる部分グラフのことである。このグラフを G^{simp} で表す。

(3)　グラフ G が単純グラフ H に縮約するとは、グラフの列 $G = H_0$, H_1,

…, $H_n = H$ と H のある辺 $e_i (i=0,1,\cdots,n-1)$ が存在して、

$$H_{i+1} = (H_i / e_i)^{simp}$$

を満たすことである。このことを、$G \rhd H$ で表す。

グラフの縮約に対して、次の命題が成り立つことが知られている。

命題１

連結な単純グラフ G が、

$$|V(G)| \geqq 3 \quad かつ \quad |E(G)| \geqq |V(G)|$$

を満たすならば、$G \rhd K_3$。

命題２

連結な単純グラフ G が、

$$|V(G)| \geqq 4 \quad かつ \quad |E(G)| \geqq 2|V(G)| - 2$$

を満たすならば、$G \rhd K_4$。

定理１

連結な単純グラフ G が、

$$|V(G)| \geqq 5 \quad かつ \quad |E(G)| \geqq 3|V(G)| - 5$$

を満たすならば、$G \rhd K_5$。

命題１が成り立つことは、G が木（tree）になるための必要十分条件を考えれば明らかである。命題２についても、簡単に証明できる。定理１が成り立つことは、[T] の結果から明らかである。そして、次の定理も証明できた。

定理２

連結な単純グラフ G が、

$$|V(G)| \geqq 6 \quad かつ \quad |E(G)| \geqq 4|V(G)| - 9$$

を満たすならば、$G \rhd K_6$。

証明の方針

頂点数に関する帰納法で示す。

$|V(G)|=6$ のとき、$|E(G)| \geqq 15$ となり、$G=K_6$ である。

$n>6$ とする。$|V(G)|<n$ のとき、この定理は成り立つと仮定する。

$|V(G)|=n$ のとき、連結な単純グラフ G として、

$$|E(G)| = 4|V(G)| - 9$$

であるものについて考えれば十分である。G の最小次数 δ に対して、

$$\delta \leqq 2|E(G)|/|V(G)=|8-18/n$$

だから、$1 \leqq \delta \leqq 7$ である。

ここで、G の真部分グラフ G_0 を次のように構成する。v_0 は、G における次数が δ である G の頂点とする。G における v_0 の近傍を、

$$N(v_0;G)=\{v \in V(G) \mid vv_0 \in E(G)\}$$

とおく。G_0 は $\{v_0\} \cup N(v_0;G)$ で誘導される G の部分グラフとする。

この G_0 に関して場合分けをする。

〈Case 1〉 G_0 のある頂点 v に対して、G_0 における次数 $\deg(v;G_0) \leqq 4$ となるとき： このとき、v_0を端点とする $e \in E(G_0)$ をとる。帰納法の仮定より、

$(G/e)^{simp} \rhd K_6$ となる。故に、$G \rhd K_6$ 。

〈Case 2〉 G_0 の任意の頂点 v に対して、G_0 における次数 $deg(v;G_0) \geqq 5$ となるとき： v_0 は G_0 の頂点だから、$\delta = 5,6,7$ である。いま、

$$|E(G_0)| \geqq (\delta \cdot 1 + 5 \cdot \delta)/2 = 3 \cdot \delta$$

であるから、

$$|E(G_0)|\text{の最小値} = 3 \cdot \delta$$

〈Case 2.1〉 $|E(G_0)| \geqq 4|V(G_0)| - 9$ となるとき： 帰納法の仮定より、$G_0 \rhd K_6$ となる。故に、$G \rhd K_6$ 。

〈Case 2.2〉 $|E(G_0)| = 4|V(G_0)| - 10$ のとき： $H = G - V(G_0)$ とする。ω を H の連結成分の個数とする。$\omega = 1$ のとき、H の中に適当な路 (Path) をとって、 $(G_0 + \text{path}) \rhd (G_0 + \text{辺})$ とできる。

$$|E(G_0 + \text{辺})| = 4|V(G_0 + \text{辺})| - 9$$

だから、帰納法の仮定より、$(G_0 + \text{辺}) \rhd K_6$ 。故に、$G \rhd K_6$ 。

$\omega \geqq 2$ のとき、$C_1, \cdots, C_\omega$ を H の連結成分とする。ここで、$H_i (i = 1, \cdots, \omega)$ を $V(G_0) \cup V(C_i)$ により誘導される G の真部分グラフとする。このとき、ある i に対して、

$$|E(H_i)| \geqq 4|V(H_i)| - 9$$

が成り立つので、帰納法の仮定より、$H_i \rhd K_6$ 。故に、$G \rhd K_6$ 。

δ	5	6	7
$\lvert V(G_0)\rvert$	6	7	8
$4\lvert V(G_0)\rvert-9$	15	19	23
$\lvert E(G_0)\rvert$の最小値	15	18	21

〈Case 2.3〉 $\delta=7$ かつ、$|E(G_0)|=21$ のとき： $\omega=1$ のとき、H を1点に縮約することにより G から得られるグラフを G′ とすると、

$$|E(G')|=|E(G_0)|+\delta=28\ ,\ |V(G')|=|V(G_0)|+1=8$$

となる。帰納法の仮定より、$G'\rhd K_6$ 。故に、$G\rhd K_6$ 。

$\omega\geqq 2$ のとき、H のある 2つの連結成分 C_i, C_j の中に、それぞれ適当な路 path 1, path 2 がとれて、(G_0+ path 1 + path 2)$\rhd$(G_0+ 辺 1 + 辺 2) となる。Case2.2 の場合と同様にして、帰納法の仮定より、(G_0+ 辺 1 + 辺 2)$\rhd K_6$ 。故に、$G\rhd K_6$ 。□

定理２の十分条件は下限を与えている。つまり、6 以上の任意の自然数 n に対して、連結な単純グラフ G で、

$$|V(G)|=n \quad \text{かつ} \quad |E(G)|=4|V(G)|-10$$

を満たし、K_6 に縮約できないものが存在する。そのような単純グラフ G は次のように構成できる： G の頂点集合を $V(G)=\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}$ とおく。各 i ($i=1,2,\cdots,n-4$) に対して、$\{v_0,v_i,v_{i+1},v_{i+2},v_{i+3}\}$ により G から誘導される部分グラフが K_5 になるように G に辺を入れる。

次の予想が考えられる。

予想1

連結な単純グラフ G が、

$|V(G)| \geqq 7$ かつ $|E(G)| \geqq 5|V(G)| - 14$

を満たすならば、$G \rhd K_7$。

定理2は、次のようなことに応用できる。以下、グラフ G を R^3 内に埋め込むことを考える。R^3 内への埋め込みによる G の像を G の<u>空間グラフ</u>（spatial graph）という。一般に、G の空間グラフは<u>結び目</u>（knot）や<u>絡み目</u>（link）含む可能性がある。では、どのようなグラフを R^3 内に埋め込むと必ず結び目や絡み目を含むのか。この問いに対して、[CG] では次の結果が与えられている。

定理3　[Conway-Gordon, 1983]

(1)　K_6 のどの空間グラフも必ず自明でない絡み目を含む。

(2)　K_7 のどの空間グラフも必ず自明でない結び目を含む。

ここでは、さらに，どのようなグラフが，任意の空間グラフに対して必ず自明でない結び目または絡み目を含むのかについて考えてみる。

定義２　（自己結び目グラフ、自己絡み目グラフ）

グラフ G が自己結び目グラフ（self-knotted graph）（または自己絡み目グラフ（self-linked graph））であるとは、G のどの空間グラフも必ず自明でない結び目（または絡み目）を含むことである。

定理３は、K_6 と K_7 がそれぞれ自己絡み目グラフと自己結び目グラフであると言い換えられる。ところで、K_7 は部分グラフとして K_6 を含んでいるので、K_7 も自己絡み目グラフであることは、定義２より明らかである。一般に、次の命題が成り立つことは明らかであろう。

命題３

自己結び目グラフ（または自己絡み目グラフ）G を部分グラフとして含むグラフ H もまた自己結び目グラフ（または自己絡み目グラフ）である。

グラフ G が自己結び目グラフ（または自己絡み目グラフ）H に縮約できれば、部分グラフとして H を含まなくても G は自己結び目グラフ（または自己絡み目グラフ）である。よって、定理３より次の命題が得られる。

命題４

G をグラフとする。

(1)　$G \triangleright K_6$ ならば、G は自己絡み目グラフである。

(2)　$G \rhd K_7$ ならば、G は自己結び目グラフである。

定義３

自己結び目グラフ（または自己絡み目グラフ）G が臨界的（Critical）であるとは、G から縮約できるどのグラフも自己結び目グラフ（または自己絡み目グラフ）でないことである。

K_6、K_7 はそれぞれ臨界的であることは簡単に示される。

どのグラフ G が K_6 や K_7 に縮約できるのかを考えることで、自己絡み目グラフや自己結び目グラフになるための十分条件が得られる。一般に、G が自己結び目（絡み目）グラフであることと G^{simp} が自己結び目（絡み目）グラフであることは同値であるから、単純グラフについてのみ考えればよい。
定理２と命題４から、次の系が得られる。

系

連結なグラフ G が、

$$|V(G)| \geqq 6 \quad \text{かつ} \quad |E(G^{simp})| \geqq 4|V(G)| - 9$$

を満たすならば、G は自己絡み目グラフである。

予想１と命題４から、自己結び目グラフについても次の予想が得られる。

予想2

連結なグラフ G が、

$|V(G)| \geqq 7$ かつ $|E(G^{simp})| \geqq 5|V(G)| - 14$

を満たすならば、G は自己結び目グラフである。

[参考文献]

[BM] J.A.Bondy and U.S.R.Murty, Graph theory and its apprication, Macmillan, 1976.

[CG] J.W.Conway-C.McA.Gordon, Knots and links in spatial graphs, J.Graph Theory 7, 1983, 445-453.

[T] C.Thomassen, Some homeomorphism properties of graphs, Math.Nachr.64, 1974, 119-133.