数理解析研究所講究録
686巻 1989年 30-43

再構成問題とグラフの種数

関西学院大学（理）浅野考平（Kouhei Asano）

[I] 定義

グラフは単純グラフを考える．またグラフGの頂点の個数をGの位数，辺の個数をGの大きさという．

1.1 （辺）再構成問題

(1) σが<u>hypomorphism</u> <u>of</u> G <u>onto</u> Hというのは，

$\sigma: V(G) \to V(H)$, bijection

s.t.

任意の頂点vに対して、$G-v \cong H-\sigma(v)$

(2) GからHへのhypomorphismが存在するときGとHは<u>hypomorphic</u>であるという。

> 1.1.1 再構成予想Ulam-Kelly 1941
>
> G, Hを位数3以上のグラフとする．GとHがhypomorpicならば
>
> GとHは同型である．

Gとhypomorphicなグラフは互いに同型であるとき，Gは<u>再構成可能</u>（reconstructible）であるという．

注意

(1) [BH]のなかに「信頼すべき筋によると1941年に予想が提案された」という記述がある．

(2) $|G|=2$のとき，成立しない．次の図を見れば明らかである．

G　　　　H

(3) σ がedge-hypomorphism of　G　onto　H

σ : E(G) → E(H),　bijection

s.t.

任意の辺eに対して、G-e ＝ H-σ(e)

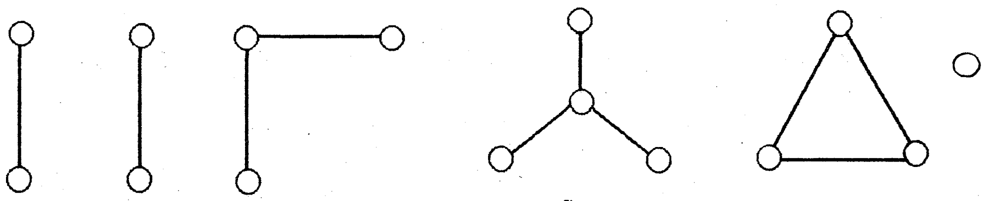
(4)GからHへのedge-hypomorphsmが存在するときGとHはedge-hypomorphicであるという。

> 1.1.2 辺再構成予想
>
> G,　Hを大きさ4以上のグラフとする. GとHがedge-hypomorphic
>
> ならば, GとHは同型である.

Gとedge-hypomorphicなグラフが互いに同型であるときGは辺再構成可能（edge-reconstructible）であるという.

Gが大きさ３のとき成立しない.

Example



G　　H　　G　　H

1.2 頂点デッキ（deck）, 辺デッキ（edge-deck）

D(G)をGの部分グラフの族 {G-v : v∈V} と定義し, 頂点デッキという.

D'(G)＝{G-e：e∈E} とし，辺デッキという．（D(G)はGの位数とおなじ個数の部分グラフを含み，D'(G)はGの大きさと同じ個数の部分グラフをふくむ．）

「グラフHがグラフGの(辺) 再構成グラフ（reconstruction, edge-reconstruction）である．」

⇔Hの頂点（辺）デッキが，Gの頂点（辺）デッキと等しい．

再構成問題，（辺再構成問題）を頂点（辺）デッキを用いて，言い換えれば，

「Gの位数が3以上（大きさが4以上）ならば，Gの再構成（辺再構成）グラフは，Hと同型 である．」ということになる．

以下，再構成問題を考えるときは位数３以上，辺再構成問題を考えるときは大きさ４以上のグラフを，対象とする．

1.3 認識可能性，辺認識可能性

問題を弱める．もし再構成（辺再構成）予想が正しければ，頂点デッキ（辺デッキ）によって，グラフの（同値類の）すべての性質が決定される．

(1)性質Pに対して，Gが性質Pをもつなら，Gの再構成グラフ（辺再構成グラフ）も性質Pをもつとき，Pは認識（辺認識）可能（recognizable, edge-recognizable）であるという．

(2)グラフの族　classFに対しても，GがclassFに属するならば，再構成（辺再構成）グラフもクラスFの属するとき，クラスFは認識（辺認識）可能であるという．

(3)グラフの不変量に対しても同様に，「認識可能」，「辺認識可能」定義する．

●グラフのある族，クラスFに対して，クラスFが再構成（辺再構成）可能であるという証明は，２つの段階に分けることが考えられる．

①クラスFは認識（辺認識）可能である．

②クラスFに属するグラフGの再構成（辺再構成）グラフHが，クラスFに属するならば，Hは，Gと同型である．

注意

(1)Fの任意のグラフが，②の性質を持つならば，「Fは弱（辺）再構成可能（weakly reconstructible, －edge－）である．」という．

(2)位相幾何的性質で規定したグラフの族に対して，上記の２つの問題を論じる．しかし，現在のところわずかな結果しかない．（後述）

[Ⅱ]　基本結果

2.1 次数列の認識可能性とKellyの補題

2.1.1　定理 Gの位数，大きさ，次数列は（辺）認識可能である

証明

①認識可能であること

●Gの頂点デッキD(G)を考える．

位数は明らかに認識可能である．

●大きさ．

$V=\{v_1,\cdots,v_n\}$とする．$G-v_i$の大きさをm_iとする．Gの任意の辺$e=(v_i,v_j)$は$G-v_i$および$G-v_j$以外のD(G)に属する．すなわち，n-2個のD(G)の元に属する．

故に$\Sigma\ \{m_i:1\leqq i\leqq n\}=(n-2)m$である．

従って，$m=\Sigma\ \{m_i:1\leqq i\leqq n\}/n-2$となり，D(G)により決定される．

●次数列

v_iの次数$d(v_i)=m-m_i$であるから，明らかに，次数列は，D(G)より決定される．

②辺認識可能であること

位数，大きさは明らかに辺認識可能である．

次数列については，かなり面倒で，次の定理を用いる．証明は[BCL]にもある．

2.1.2 定理　Kelly's Lemma[K]1957

G,Fをグラフとし，Fの位数はGの位数より小さいとする．

このとき，Gの部分グラフでFと同型であるものの個数s(F,G)は認識可能である．

同様の方法で，「Fの大きさがGの大きさより小さいとすると，s(F,G)は辺認識可能である．」ことが証明できる．

注意

この定理より，ただちに，位数３以上（大きさ４以上）の正則グラフは再構成（辺再構成）可能であることがわかる．

2.2 連結性

2.2.1 定理

非連結なグラフは再構成可能である．

証明は，[BCL]参照．また，Gの連結度はD(G)に属するグラフの連結度の最小値に１を加えたものであるから，次の定理が成立する．

2.2.2 定理

連結度は認識可能．

2.3 樹木

再構成問題の最も古典的な結果として次の定理がある．証明は[BCL]にもある．

2.3.1 定理Kelly,P.J.1957[K]

位数３以上の木は，再構成可能である

2.4 再構成問題と辺再構成問題の関係

2.4.1 定理Greenwell,D.D.[Gr]1971

Gが孤立点を持たないとき，もし，Gが再構成可能であれば，
辺再構成可能である.

注意

Gが孤立点を持つとき，明らかに再構成可能である．一方，孤立点を持つグラフがすべて辺再構成可能であれば，任意のグラフは辺再構成可能である.

2.4.2 定理Harary-Palmer 1965 [HP] Hemninger 1968[He]

Gをサイズが４以上のグラフとする.

Gが辺再構成可能⇔Gの線グラフL(G)が再構成可能

←の証明がHarary-Palmer 1965，証明は短い

→の証明がHemninger 1969

注意

この定理より，すべての線グラフが再構成可能であるならば，再構成予想は正しい.

（線グラフには特徴があり，線グラフでないようなグラフが存在する．）

また，辺再構成予想がすべてのグラフについて正しければ，再構成予想も正しい.

[Ⅲ] グラフの種数と再構成問題

3.1 平面グラフ

3.1.1 定理Giles 1974[Gi]

外平面的グラフは再構成可能である.

在知られている最良の結果は以下の２つの定理である. これらの論文は連続して発表された.

3.1.2 定理Fiorini and Lauri 1981[FL1]

極大平面グラフは認識可能である.

3.1.3 定理 Lauri 1981[L1]

極大平面グラフは，再構成可能である.

極大平面グラフで，最小次数が４以上であるグラフに対しては，Fiorini and Manvel が再構成可能であることを証明していた[FM]. この部分はこの種の定理の証明の方針をよ示していると思うので概略を述べる. （証明は，[FL1]の証明をもとにしている. ）

埋め込みに関する基本的な用語を説明する.

Gをグラフ，Fを曲面とする.

f_1, f_2 : G → Fを埋め込みとする. f_1, f_2が同値

⇔適当なFの同相写像hとGの自己同型写像σが存在して，

$h \cdot f_1 = f_2 \cdot \sigma$ （像を重ねることができる. ）

GのFへの埋め込みが１つの同値類しかもたないとき，Gは<u>一意的に埋め込み可能</u>

(uniquly embeddable) であるという.

$f:G \rightarrow F$を埋め込みとする. Gの任意の自己同相写像σに対して適当なFの同相写像

h が存在して,

$h \cdot f = f \cdot \sigma$となるとき, fはGのFへの忠実(faithful)な埋め込みという.

GからFへの一意的かつ忠実に埋め込み可能であるとき,GのFへの2つの埋め込みf_1, f_2に対して,Gの閉路Cが$f1$において領域の境界であるための必要十分条件は,f_2において領域の境界であることである.

平面的グラフの埋め込みに関する次の古典的結果をもちいる.

3.1.4 定理 Whiteney 1932[W](根上による言い換え[N1])

3連結平面的グラフは球面に一意的かつ忠実に埋め込み可能である.

3.1.5 定理Chartland-Kaugars-Lick 1972[CKL]

Gがk連結かつ最小次数$\delta(G) \geq 1/2(3k-1)$であれば,適当な頂点vが存在して,G-vは k連結である.

従って,Gを最小次数が4以上のグラフとすると適当な頂点v_0が存在して$G-v_0$は3連結である.

3.1.6 補題

Gを最小次数が4以上の3連結グラフとする.

Gが極大平面グラフであるための必要十分条件は,任意のvに対して$G-v$が$d(v)$表現可能であることである.

（k表現(k-representation)とは，１つの領域がk角形でありそれを除いて，すべての領域は３角形であるような平面への埋め込みである．）

証明の概略.

必要条件であることは明きらかであるので，十分条件であることを証明する.

Gの任意の頂点vに対して，G-vはd(v)表現を持つと仮定する.

①Chartlandの結果により，適当な頂点vに対して，G-vは３連結である.

仮定によりG-vはd(v)表現可能である.

②G-vのd(v)-表現を考える．Gにおいてvに隣接しているd(v)個の頂点がこの表現のd(v)角形領域の境界にあれば証明終り.　vに隣接している頂点wがk角形領域にないと仮定し，このとき，適当な頂点u（u≠v）が存在して，G-uがK_{33}または，K_5と同相な部分グラフを ふくむことを証明する.

3.1.7 定理

最小次数が４以上の極大平面グラフの族は認識可能である.

証明

Gを条件を満足するグラフとする.

Gは３連結である．HをGの再構成グラフとする．すなわち，Gの頂点デッキとHの頂点デッキは等しい．従って，任意のHの頂点vに対してH-vはd(v)-表現をもつ.

故に，補題により，Hは極大平面グラフである.

3.1.8 定理

最小次数が４以上の３連結な極大平面グラフは，再構成可能である.

証明

Gを条件を満足するグラフとする．HをGの再構成グラフとする．Hは最小次数が４以上の極大平面グラフである．（したがって，３連結）G,Hを平面に埋め込む．

vをG-vが３連結になるような頂点とする．　Whiteneyの定理より，G-vの埋め込みかたは唯一つである．一方，H-v≅G-vであるから，Gの埋め込みからvを取り除いたものと，H の埋め込みからvを取り除いたものは同じと考えて良い．

この埋め込みにおいて，d(v)（≧４）角形の領域は唯一つ．vはその領域内になければならない．

故に，GとHは同型である．

注意

最小次数が４以上の極大平面グラフの族の認識可能性は，　Whiteneyの定理（３連結平面グラフがuniquly and faithfullyに埋め込み可能である）だけでは，証明できない．補題2.6の証明が本質的）

3.2　その他

3.2.1 定理[J. Lauri　1981][L2]

(1)連結度３，最小次数４以上射影平面の三角形分割は弱再構成可能.

(2)連結度３，最小次数４以上のトーラスの三角形分割は弱再構成可能.

注意

この定理の条件は，連結度が３である．３連結グラフに対して証明しているのではない．

●曲面の三角形分割（すなわち，曲面への極大埋め込みが存在するグラフ）の再構成問題に制限する．すなわち，

(1)曲面の三角形分割は認識可能か?

(2)曲面の三角形分割は弱再構成可能か?

という，２つの問題を考える．

(1)は，次の予想を証明すれば良い．

> 3.2.2 予想[L3]
>
> Gをグラフとする．任意の頂点vに対してG-vが曲面Fのd(v)表現をもてば，Gは Fの三角形分割である．

この予想の証明は一般には難しいと考えられる．平面に対する証明が，補題2.6である．そして，これは，Kuratowskiの定理を本質的に用いている．射影平面が，次の目標であると思われるが，射影平面のKuratowski typeの定理[A1]，[A2]を直接もちいることは難しい．

(2)についても，射影平面がこの予想の解決に最も近い．

根上の次の結果（の証明）が本質的に利用可能であると思われる．

「K_6以外の５連結な射影平面の三角形分割（極大射影平面的グラフ）は，一意的かつ忠実に埋め込み可能である．[N2]」

[Ⅳ]　グラフの種数と辺再構成問題

再構成問題に関する結果より，辺再構成問題の方が，良い結果がある．例えば，

> 4.1 定理 S.Fiorini J.Lauri[FL2]
>
> ４連結平面グラフは，辺再構成可能である．

Fiorini が１９７８年に４連結最小次数が５である平面グラフは辺再構成可能であることを証明している．[F]

また，平面以外でも，射影平面の三角形分割について，解決されている．

4.2 定理 S.Fiorini and J. Lauri 1982[FL3]

(1)射影平面の三角形分割は，辺再構成可能である．

(2)連結度３で，ある曲面の三角形分割であるようなグラフは，辺再構成可能である．

注意

(2)は実際には，連結度３，かつ，任意の３－cut{a,b,c}はクリークであるようなグラフの族は辺再構成可能であることを証明し，連結度３の三角形分割がこの条件を満足していることを証明したのに過ぎない．

辺再構成問題に関しては，[L3]がそのテクニックを含めて解説しているので，ここでは述べないことにする．

［Ｖ］　文献

以下の文献表は，主に，曲面の埋め込みと再構成問題の両方に関連した文献に限定した．[BH]，[Na]は，再構成問題一般に対する概説であり，詳しい文献表がある．ただし，少し古いので，最新のものは含まれていない．[L3]は新しいものも含まれている．

[A1]D.Archdeacon, A Kuratowski theorem for the projective plane, Thesis, The Ohio State University (1980)

[A2]D.Archdeacon, A Kuratowski theorem for the projective plane, J.Graph Theory 5(1981), 243-246

[BCL]M.Behzad, G.Chatland and L.Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Prindle (1979？)日本語訳　グラフとダイグラフの理論　秋山－西関訳（共立）1981

[BH]J.Bondy and R.L.Hemminger, Graph reconstruction - A survey, J.Graph Theory 1(1977) 227-268.

[CKL]G.Chartland, A.Kaugars, D.R.Lick, Critically n-connected graphs, Proc.

Amer. Math. Soc. 32(1972) 63 - 68.

[F]S.Fiorini, On the edge-reconstruction of planar graphs, Math.Proc.Camridge Philos.Soc.83(1978) 31-35

[FL1]S.Fiorini, and J.Lauri, The reconstruction of maximal planar graphs I. recognition, J. Combin. Theory(B)30 (1981) 188-195.

[FL2]S.Fiorini and J.Lauri, Edge-reconstruction of 4-connected planar graphs, J. Graph Theory, &(1982) 33-42

[FL3]S.Fiorini and S.Lauri, On the edge reconstruction of graphs which triangulate surfaces, Quart.J.Math.33(1982) 191-214.

[FM]S.Fiorini and B.Mandel,A Theorem on planar graphs with an applocation to the reconstruction problemII, J.Combin. Inform. and Syst. Sci.3(1978)200-216.

[Gi]W.B.Giles, The reconstruction of outerplanar graphs, J. Combin.Theory(B)16 (1974) 215-226.

[Gr]D..D.Greenwell, Reconstructing graphs, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971) 431-433.

[HP]F.Harary and E.M.Palmer, A note on similar points and similarlines of a graph, Rev. Rounaine Math. Pures et Appl. 10 (1965) 1489- 1492.

[He]R.L.Hemminger, On reconstrcting a graph, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 185-187.

[LO]J.Lauri,Edge-reconstruction of planar graphs with minimum valencey 5, J. Graph Theory 3(1979)269-286.

[L1]J.Lauri, The reconstructinon of maximal planar graphs II.reconstruction, J. Combin.Theory(B)30 (1981) 196-214.

[L2]J.Lauri, The reconstruction of planar graphs, Doctoral Thesis, The Open University, England 1981.

[L3])J.Lauri, Graph reconstruction-Some techniques and new properties, ARS combinatoria 24B (1987) 35-61.

[K]P.J.Kelly, A congruence theorem for trees, Pacific J.Math. 7(1957) 961-968.

[Na]C.St.J.A.Nash-Williams, The reconstruction problem, Selected Topics in Graph Theory(L.W.Beineke and R.J. Wilson,eds),Academic Press, London, 1978, 205-236.

[N1]S.Negami,Uniqueness and faithfulness of embedding of graphs into surfaces, Dissertation. Tokyo Institute of Technology 1985.

[N2]S.Negami, Uniquely and faithfully embeddable projective-planar triangulations, J. Combin. Theory(B)36 (1984) 189-193.

[W]H.Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer.J.Math. 54 (1932) 150-168.