

強理想グラフ予想とグラフの種数

関西学院大学（理）浅野考平（Kouhei Asano）

[I] 序論

理想グラフ予想に関しては、適当な概説が数多くある。ここでは、曲面に埋め込まれたグラフに対する理想グラフ予想に限って、概説を試みる。位相幾何学的グラフ理論上の結果が、それ自身は位相幾何学的グラフ理論の問題ではない強理想グラフ予想という問題にどの様に使われているかということを中心に説明したい。

[II] 定義と背景

次のような記号を用いる。

χ : 染色数.

ω : クリーク数.

θ : クリーク被覆数.

α : 独立数.

クリーク数, クリーク分割数, 独立数の定義を以下説明する.

2.1 クリーク数 $\omega(G)$.

グラフ $G=(V, E)$ において, V の部分集合 C が完全グラフを誘導するとき, C を クリーク (clique) という. G のクリークの最大位数を, G の クリーク数 (clique number) という. (完全部分グラフのことをクリークというのではなくて, 頂点の集合のことをいう)

2.2 クリーク被覆数 $\theta(G)$.

$G=(V, E)$ において, V の交わらないクリークへの分割を, クリーク被覆という.

クリーク被覆に含まれるクリークの個数の最小数をクリーク被覆数 (clique cover number) という。

2.3 $G=(V,E)$ において, V の部分集合 I に属する頂点が互いに隣接していないとき独立点集合 (independent set, stable set)であるという. G の独立点集合の最大位数を, G の独立数 (independence number, stable number)という。

注意

定義より明らかに,

$$(1) \chi(G) = \theta(G^c) \quad \omega(G) = \alpha(G^c)$$

(2) クリークに属する頂点を彩色するにはその位数以上の色が必要である。

したがって, $\chi(G) \geq \omega(G)$ である。(言い換えれば, $\theta(G) \geq \alpha(G)$)

また, G の補グラフに対して, 上の不等式を適用すれば, $\alpha(G) \leq \theta(G)$ 。

2.4 χ 理想グラフ, α 理想グラフ, 理想グラフ

G が χ 理想グラフ

$\Leftrightarrow G$ の任意の誘導部分グラフ H に対して, $\chi(H) = \omega(H)$ 。

G が α 理想グラフ

$\Leftrightarrow G$ の任意の誘導部分グラフ H に対して, $\alpha(H) = \theta(H)$ 。

G が α 理想かつ, χ 理想である時, 理想グラフであるという。

注意

(1) $\alpha(C_{2k+1}) = k$, かつ $\theta(C_{2k+1}) = k+1$ であるから C_{2k+1} は非理想グラフである。

また, K_n と C_{2k+1} のジョイン G は $\alpha(G) = k$ かつ, $\theta(G) = k+1$ であるので, これらのグラフも理想グラフではない。

(2) 2部グラフ G は理想グラフである。

なぜならば, $\chi = \omega = 2$, $\alpha = \theta = \{G$ の2部の内の位数の大きい方 $\}$ である。(必要ならば分割を適当に変更して。)

2.5 強理想グラフ予想 [Berge1961]

G が理想グラフであるための必要十分条件は長さ5以上の奇閉路、またはその補グラフを誘導部分グラフとして持たないことである。

Shannonの通信に関する論文のなかに $\alpha(G) \neq \theta(G)$ となる最小のグラフは長さ5の閉路であるという記述があり、それによって動機づけられた。

そのままでは難しいと考えられたので、数年後、次の弱理想グラフ予想が提案された。

[BC]参照

2.6 (弱)理想グラフ予想 [Berge]

G が α 理想グラフであるための必要十分条件は、 G の補グラフ G^c が α 理想グラフであることである。

この弱理想グラフ予想は、Lovasz [Lo2]により既に証明されており、理想グラフ定理と呼ばれている。

長さ5以上の誘導奇閉路をodd hole, 長さ5以上の奇閉路の補グラフである誘導部分グラフをodd antiholeという。この用語と、理想グラフ定理を用いると、強理想グラフ予想は次のように言い換えられる。

「 G がodd hole もodd antiholeも持たなければ、 $\alpha(G) = \theta(G)$ である。」

これが、強理想グラフ予想と同値であることは、すぐにわかる。何故なら、「」内の事柄が正しいとする。 G の任意の誘導部分グラフ H を考えると、 H はodd hole, odd antihole を持たないので、 $\alpha(H) = \theta(H)$ である。従って、 G は α 理想である。また、理想グラフ定理より x 理想である。

[Ⅲ] 基本的結果

理想グラフに関する基本的結果をまとめる。

3.1 理想グラフ定理

3.1.1 理想グラフ定理 [L01]

G が α 理想グラフであるための必要十分条件は、 G が x 理想グラフであることである。

Lovaszは、これより強い次の定理を証明した。

3.1.2 定理 [L01]

G が α 理想グラフであるための必要十分条件は、

「 G の任意の誘導部分グラフ H に対して、 $\alpha(H)\omega(H) \geq |H|$ 」

であることである。

$\alpha(H) = \omega(H^c)$ であるから、定理3.1.2より理想グラフ定理が導かれる。

3.2 臨界非理想グラフと (α, ω) 分割可能グラフ

G が臨界非理想グラフ (critically imperfect graph) $\Leftrightarrow G$ が理想グラフでなくて、 G の任意の誘導部分グラフが理想グラフである。

Lovaszの定理により、 G が臨界非理想グラフであれば、

$$|G| = \omega(G)\alpha(G) + 1$$

何故なら、任意の頂点 x に対して、

$$\omega(G-x) \leq \omega(G), \quad \alpha(G-x) \leq \alpha(G)$$

$$|G| - 1 = |G-x| \leq \omega(G-x)\alpha(G-x) \leq \omega(G)\alpha(G) \quad (G-x \text{ は理想グラフ})$$

$$|G| \leq \omega(G)\alpha(G)+1,$$

G は理想グラフではないので、 $|G| > \omega(G)\alpha(G)$ (G 自身以外の任意の誘導部分グラフ H は理想グラフだから、 $|H| \leq \alpha(H)\omega(H)$ 。従って、もし、 $|G| \leq \alpha(G)\omega(G)$ であれば、 G が非理想グラフであることに反する。)

3.2.1 定義 (α, ω) 分割可能グラフ ((α, ω) -partitionable graph)

α, ω を2以上の自然数とする。

G が(α, ω)分割可能グラフであるというのは、 G の位数が $\alpha\omega+1$ であって、任意の頂点 v に対して、 $G-v$ の頂点集合が、位数 ω の α 個のクリークに分解できかつ、位数 α の ω 個の独立点集合に分割できることをいう。

3.2.2 命題

任意の臨界非理想グラフは、(α, ω)分割可能グラフである。

(ただし、 α は $\alpha(G)$ 、 $\omega = \omega(G)$)

臨界非理想グラフであるから、位数は $\alpha\omega+1$ である。任意の頂点 v に対して $G-v$ は理想グラフで、かつ $|G-v| = \alpha\omega$ 。また、 $\omega(G-v) \geq \omega-1$ である。 $\omega(G-v) = \omega-1$ とする。 $G-v$ は理想グラフであるから、 $\chi(G-v) = \omega-1$ 。故に $\alpha(G-v) \geq |G-v| / (\omega-1) > \alpha$ これは、矛盾。故に $\omega(G-v) = \omega$ 。同様に、 $\alpha(G-v) = \theta(G-v) = \alpha$ 。 $G-v$ は理想グラフなので、 α 個の位数 ω のクリークに分割される。

6

(α, ω) 分割可能グラフの例

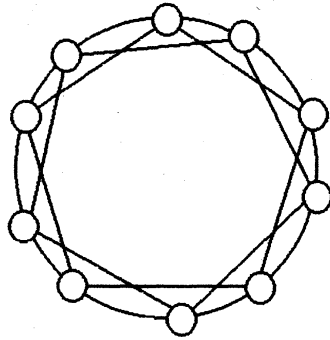
$\alpha, \omega \geq 3$

$(C_{\alpha\omega+1})^{\omega-1}$ は, (α, ω) 分割可能グラフである.

(ただし, G^k は G の距離が k 以下である頂点对を辺で結んでできた単純グラフ.)

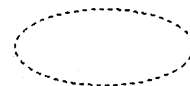
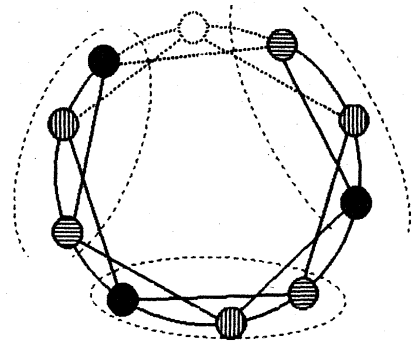
$\alpha \geq 3$ かつ $\omega \geq 3$ のとき, このグラフは, 臨界非理想グラフではない.

(非理想誘導部分グラフを含む, Chvatal) [Ch]



$(C_{10})^2$

$\alpha = \omega = 3, \quad \alpha\omega + 1 = 10$



クリーク分割



それぞれ独立点集合

3.2.3 命題

G が (α, ω) 分割可能グラフとする.

$|G| = \alpha\omega + 1, \quad \alpha(G) = \alpha, \quad \omega(G) = \omega, \quad \chi(G) = \omega + 1, \quad \theta(G) = \alpha + 1$

3.2.4 命題 [P] [BHT]

G を (α, ω) 分割可能グラフとする。 $|G| = n$.

- (1) G はちょうど n 個の位数 ω のクリークをもつ。
- (2) G はちょうど n 個の位数 α の独立点集合をもつ。
- (3) 各頂点はちょうど ω 個の、位数 ω のクリークに含まれる。
- (4) 各頂点はちょうど α 個の、位数 α の独立点集合に含まれる。
- (5) 位数 ω の各クリークはちょうど 1 個の位数 α の独立点集合と交わらない。
- (6) 位数 α の各独立点集合はちょうど 1 個の位数 ω のクリークと交わらない。

3.3 理想グラフとアルゴリズム

理想グラフの独立数問題は、線形計画法の問題に変換できる。そして、[GLS]によれば、この問題は、線形計画法の多項式時間アルゴリズムによって、グラフの位数の多項式で表せる時間で解ける。補グラフに対して、このアルゴリズムを、実行すると G のクリーク数が求められることができ、理想グラフであるから、染色数を求めることができる。

以下、線形計画法の問題への変換の方法を示す。

3.3.1 定義 fractional vertex packing number

G の各頂点に次のような条件を満足するように、重み $w(v)$ を与える。

各クリーク C に対して、 C に属する頂点の重みの和は、1以下になるようにする。

のとき頂点の重みの合計の最大値を fractional vertex packing number $\alpha^*(G)$

いう。

8

言い換えれば, fractional vertex packing number は, 次のような線形計画法の解である.

グラフ G の頂点集合 V とする.

$$\text{任意のクリーク } C \text{ に対して } \sum \{w(v) : v \in C\} \leq 1,$$

$$w(v) \geq 0, \quad v \in V(G)$$

という線形不等式が成立するという条件のもとで,

$$\sum \{w_i : 1 \leq i \leq n\} \text{ の値を最大にせよ.}$$

重みが整数であるという制限をつける. すなわち, 頂点の重みは1または0であるとする. 隣接する頂点はともに1という重みを持つことはないので, 1という重みを持った頂点の集合は独立点集合である. 逆に独立点集合 I に対して I に属する頂点に対して1という重みを与えれば, vertex packingの条件を満足する. 故に, 重みに整数であるという制限をつけたときのfractional vertex packing numberは独立数と等しい.

従って, $\alpha^*(G) \leq \alpha(G)$ である.

同様に, 次のような線形計画法を考える.

$$\text{各クリーク } C \text{ に対して, } y(C) \geq 0$$

$$\text{各頂点 } v \text{ に対して, } \sum \{y(C) : v \text{ は } C \text{ に含まれる.}\} \geq 1$$

という不等式のもとで,

$$\sum y(C) : C \text{ は } G \text{ のクリーク} \text{ を最小にせよ.}$$

$\sum y(C) : C \text{ は } G \text{ のクリーク}$ の最小値をfractional clique cover number という.

(実際 $y(C)$ が整数であるという条件をつければ f.c.n. はクリーク被覆数と一致する.)

この2つの問題は双対問題となるので、

fractional vertex packing number = fractional clique cover number

3.3.2 定理

Gが理想グラフ \Leftrightarrow

Gの任意の誘導部分グラフHに対して、独立数とf.v.p.n.が等しい。

3.3.3 補題

Gが (α, ω) 分割可能グラフであれば、 $\alpha^*(G) = \alpha + 1/\omega$

証明

① Gの各頂点に $1/\omega$ の重みを与える。このときGの最大クリークの大きさは、命題により、 ω であるから、重みの割当の条件を満足している。したがって

$$\alpha^* \geq (\alpha \omega + 1) * \omega = \alpha + 1/\omega$$

② fractional clique cover number について考える。

Gは (α, ω) 分割可能グラフであるから、各頂点はちょうど ω 個の位数 ω のクリークに属する。

位数 ω のクリークに対して1, その他のクリークに対して0という重みを与える。このとき条件を満足しているので、

$$f.c.c.n. \leq n * 1/\omega \text{ である。}$$

故に $\alpha^*(G) = f.c.c.n. \leq \alpha + 1/\omega$

独立数とf.v.p.n.が異なる例

長さ5の閉路の各頂点に $1/2$ を割り当てると、合計は2.5。しかし、独立数は2である。

定理の証明

(\leftarrow) G が理想グラフでないとする。 G は臨界非理想グラフ H を誘導部分グラフとして含む。
 H は (α, ω) 分割可能グラフである。補題により $\alpha^*(H) \neq \alpha(H)$ 。

(\rightarrow) G が理想グラフとする。 $\alpha(G) = \theta(G)$ だから、 G は $\alpha(G)$ 個の極大クリーク $C_1, \dots, C_{\alpha(G)}$ に分割される。各極大クリーク C_i に属する頂点の重みの合計は1以下でなければならないので、 $\alpha^*(G) \leq \alpha(G)$ である。定義より $\alpha^*(G) \geq \alpha(G)$ だから、 $\alpha(G) = \alpha^*(G)$ である。

● G が与えられたとき、理想グラフかどうかを判定する問題が P に属するか、 NP 完全であるかどうかは、未解決問題。ただし、平面グラフに対しては、多項式アルゴリズムが存在する。

3.4 その他

● 連結グラフ G において、頂点の集合 C に対して $G-C$ が非連結である時、 C は G の切斷 (cut) であるという。

3.4.1 定理 [Be]

G は連結グラフとする。 G の切斷 C に対して、 C が、クリークを成しているとする。
 $G-C$ の各連結成分が理想グラフであれば、 G は理想グラフである。

● 理想グラフであるための十分条件

3.4.2 定理

長さ4のパスを誘導部分グラフとして持たないならば、 $\alpha(G) = \omega(G)$ である。

帰納法で比較的簡単に証明できる。

● この定理の仮定である性質は、 G がこれを持てば G の任意の誘導部分グラフもこの性質

を持つ。(遺伝的性質という。)したがって、この性質は G が理想グラフでの十分条件である。しかし、必要条件ではない。何故ならば、長さ4のパス自身は理想グラフである。

●強理想グラフ予想に対して完全なグラフのクラス [Co]

あるクラスに属するグラフに対して強理想グラフ予想が正しければ、任意のグラフに対する強理想グラフ予想が正しいときがある。このようなとき、強理想グラフに対して完全なクラスという。グラフの変換 $G \rightarrow G'$ で、 G が理想グラフであるための必要十分条件が、 G' が理想グラフであるようなものを考えればよい。

例 amalgamation, clique bond, replacementなど

●種数を減らすような変換があれば良いが。

[IV] 平面グラフに対する強理想グラフ予想。

A. C. Tuckerによって、証明された。

4.1 定理 [Tu] 1973

平面グラフに対して、理想グラフ予想は正しい。

以下この定理の証明の概略を述べる。

G は臨界非理想グラフと仮定する。 G は長さが5以上の奇数である閉路であることを示す。

4.2 補題

G は上記の閉路ではないと仮定する。任意の頂点 x をとり、 $G-x$ の彩色を考える。

x の近傍 $N_G(x)$ の頂点 a, b が異なる色1, 2で彩色されいるとする。

もし、 $G-x$ のpath P で $P \cap N_G(x) = \{a, b\}$ かつ P 上の頂点はcolor 1, 2をもつものが存在したら、 a と b は隣接している。

証明

P は長さが偶数の誘導路である。従って、もし a と b が隣接していなければ、 P に x を加えた閉路は G におけるodd holeである。odd holeは非理想グラフであるからこれは仮定に反する。

4.3 補題

G はクリークをなす3-cutを持たない。

証明

G がこの様な3-cut T を含むとする。 $G-T$ の各連結成分は理想グラフである。 Bergeの補題により、 G は理想グラフである。

定理の証明

クリーク数 $\omega(G)$ による場合分けをする。

- ① $\omega(G)=1$ のとき、辺は存在しないので、 G は理想グラフであるから、仮定に矛盾。
- ② $\omega(G)=2$ のとき、

任意の頂点 x をとる。 $G-x$ は理想グラフである。 $\omega(G-x) \leq \omega(G)$ であるから、 $\omega(G-x)=1, 2$ の場合を考えれば良い。 $\omega(G-x)=1$ のとき G は2部グラフとなり、 G が非理想グラフであることに反する。

$\omega(G-x)=2$ とする。 $\chi(G-x)=2$ だから、 $G-x$ は2部グラフ。 G は非理想グラフなので、 2部グラフではない。従って、 G は奇閉路をもつ。(これは x を含む)

$N_G(x)$ の2つの頂点 a, b が $G-x$ の中でpathで結ばれているので、補題により a, b は隣接している。 a, b, x がクリークをなしているので、仮定に反する。

●上の2つの場合は平面性を使わない。

③ $\omega(G)=4$ のとき,

4色定理を用いると, $\chi(G)=4$. 任意の x に対して, $G-x$ は理想グラフであるから, G の任意の誘導部分グラフ H に対して $\chi(H)=\omega(H)$ になり, G が非理想グラフであることに反する.

(もちろんTuckerは直接 $\chi(G)=4$ であることを証明している.)

④ $\omega(G)=3$ のとき,

G は非理想グラフであるから $\chi(G)=4$ である. $\chi(G-x)=\omega(G-x)\leq\omega(G)=3$ より, $\chi(G-x)\leq 3$ である.

最小次数 $\delta(G)$ による場合分けをする.

$\delta(G)\leq 2$ の場合.

x を最小次数を持つ頂点とする. このとき, $G-x$ の3-彩色は G に拡張できるので, $\chi(G)=4$ に反する.

$\delta(G)=3$ の場合.

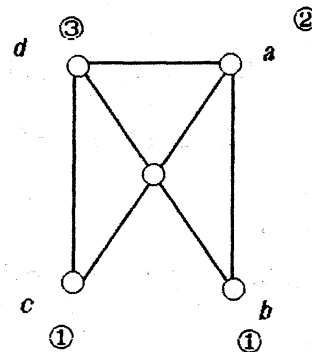
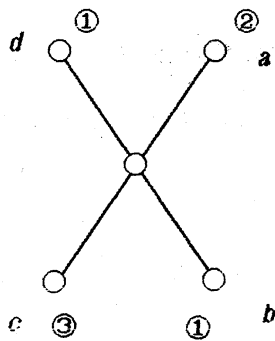
$N_G(x)=\{a,b,c\}$ とする. $G-x$ の3-彩色において, a,b,c は異なる色を持っている. ($\chi(G)=4$) それぞれの色を1,2,3とする. 1,2という2つの色の頂点の集合をによって $G-x$ において誘導された部分グラフにおいて, (a,b) pathが存在するはず. ($\chi(G)=4$) 補題により a,b は隣接しているはず. 同様に, b,c および c,a は隣接している.

このとき, $\{a,b,c\}$ (=Tとおく)は3-cutでかつクリークである. これは補題に反する.

$\delta(G)=4$ の場合.

$N_G(x)=\{a,b,c,d\}$ とおく. $N_G(x)$ には3色を用いられているはず. 従って次の2つの場合にわけられる.

(1) 1および2の色を持つ頂点の集合によって誘導される $G-x$ の部分グラフにおいて (a,b) -pathが存在する. (もし存在しなければ, b,c,d の色をそのままにして a の色を3に変換できる. $\chi(G)=4$ に反する.)



○の中は色を示す。

故に、補題により、 a, c は隣接している。 $\{a, c, x\}$ は3-cutでかつクリークであるから補題に反する。

(2)同様にすると、 a と b 、 c と d 、 d と a は隣接していることがわかる。

Tuckerはこの部分の結果を拡張し、次の定理を証明した。

4.4 定理 [Tu2]

$\omega(G)=3$ であるグラフに対して、強理想グラフ予想は成立する。

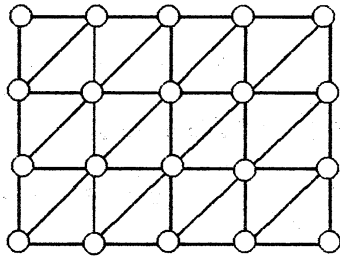
[V] 種数1のグラフに対する強理想グラフ予想。

C.Grinstead [Gr1] [Gr2]は種数1のグラフに対して、強理想グラフ予想が成立することを証明した。

5.1 補題 [Alt] [Ne]

種数1のグラフに対して、最小次数が6以上であれば6正則

さらに、6正則グラフは次のようにして構成したグラフと同型である。



向かい合った辺どうしを同一視し，トーラス上の6-正則グラフを構成する。

5.2 補題

G を臨界非理想グラフとする。 $\delta(G) \leq 6$ であれば $\omega(G) \leq 4$ である。

証明

最小次数を持つ頂点を x とする。

G は (α, ω) 分割可能グラフであるから，定理より， x は $\omega(G)$ 個の位数 $\omega(G)$ のクリークに含まれる。

① $\omega(G) = 5$ とする。

x を含むクリークは $N_G(x) \cup \{x\}$ に含まれる。従って， $N_G(x)$ は大きさ4のクリークを5個含む。

一方 $\omega(G) = 5$ なので， $N_G(x)$ は大きさ5のクリークを含まない。故に $N_G(x)$ の誘導部分グラフは K_6 から互いに隣接していない2つの辺を除いてできたグラフの部分グラフである。このグラフは大きさ4のクリークは高々4個しか含まない。これは矛盾。

$\omega(G) = 6$ とする。 $N_G(x)$ は6個の大きさ5のクリークを含む。すなわち $N_G(x)$ は大きさ6のクリークである。 $N_G(x) \cup \{x\}$ は大きさ7のクリークになり矛盾。

$\omega(G) = 7$ とすると， G は完全グラフであり，非理想グラフであることに反する。

5.3 補題 [Berge1961]

G が理想グラフであるとする。 G の任意の頂点 x をとる。

G に新しい頂点 y をくわえ、 y と $N_G(x)$ を辺で結んでできたグラフ $G \circ x$ は理想グラフである。

5.4 補題

G が理想グラフであるとする。 G の任意の頂点 x をとる。

G に新しい頂点 y をくわえ、 y と $N_G(x) \cup \{x\}$ を辺で結んでできたグラフは理想グラフである。

5.5 補題

G は臨界非理想グラフとする。 $\omega(G) > 3$ ならば $\delta(G) \geq 6$ である。

証明

$\omega(G) = 4$ かつ $\delta(G) = 5$ (< 5 のときも同様) とする。

最小次数を持つ頂点を x とする。 x は4個の大きさ4のクリークに含まれる。 従って、 $N_G(x)$ は大きさ3のクリークを4個含む。

また、大きさ4のクリークを含まないので、 $N_G(x)$ の少なくとも2つの頂点对は隣接していない。 もし3個以上の頂点对が隣接していなければ、大きさ3のクリークは高々2個である。 従って $N_G(x)$ が誘導する部分グラフは K_5 から隣接していない辺を除いてできたグラフである。

$G-x$ は理想グラフであるが、これは上の補題5.4に反する。

5.6 定理

種数1のグラフに対して強理想グラフ予想は正しい。

証明

種数1のグラフは $\delta(G) \leq 6$ である。従って、 $\omega(G) \leq 4$

一方 $\omega(G) \leq 3$ のとき、Tuckerの定理により、成立。

$\omega(G)=4$ のときだけを考えれば良い。

$\omega(G) \geq 4$ のとき、 $\delta(G) \geq 6$ なので6正則グラフとなり、特徴づけがなされている。

以下略。

[VI] 文献

強理想グラフ予想についての概説は有名なものがいくつかある。例えば、

[BC]C.Berge, V.Chvatal(eds.), Topics on Perfect Graphs, Ann. Discrete Math.21, North-Holland, Amsterdam 1984.

[Go]M.C.Golumbic, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Academic Press, New York 1981.

[Lo1]L.Lovasz, Perfect graphs, Selected Topics in Graph Theory 2, pp55-88. Academic Press, London 1983.

がある。特に[BC]および[Go]は本全部が概説と言ってよい。

[Alt]A. Altshuler, Construction and enumeration of regular maps on torus, Discrete Math. 4(1973)201-217.

[Be]C.Berge, Graphes et hypergraphes, North-Holland, Amsterdam 1973.

日本語訳, グラフの理論, サイエンス社 1976年

[BHT]R.G.Bland, H.C.Huang, L.E.Trotter, Jr., Graphical properties related to

- minimal imperfection, Discrete Math.27(1979)11-22.
- [Ch]V.Chvatal,A semi-strong perfect graph conjecture, Ann. Discrete Math.21 (1984)279-280.
- [Co]D.G.Corneil, Families of Graphs complete for the strong perfect graph conjecture,J.Graph Theory 10(1986)33-40
- [Gr1]C. Grinstead, The perfect graph conjecture for a class of graphs, PhD. Thesis. UCLA, Los Angeles(1978)
- [Gr2]C. Grinstead, The perfect graph conjecture for toroidal graphs, J. Combin. Theory(B) 30(1981) 70-74.
- [GLS]M.Groetschel, L.Lovasz, A.P.Shrijver, Polynomial algorithms for perfect graphs, Ann. Discrete Math 21(1981) 322-358
- [Lo2]L. Lovasz, A characterization of perfect graphs,J. Combin. Theory,(B)13 (1972)95-98.
- [Ne]S.Negami,Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs, Discrete Math.44(1983) 161-180.
- [P]M.W.Padberg, Perfect zero-one matrices, Math. Programing 6(1974)180-196.
- [Tu]A.C.Tucker, The strong perfect graph conjecture for planar graphs, Canad. J. Math. 25,25(1973)103-114.
- [Tu2]A. C. Tucker, Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic graphs, J. Combin. Theory(B)25(1977)143-149.