

多値論理関数を実現するセル配列の故障検査

山口大学工学部 高浪 五男 (Itsuo Takanami)

山口大学工学部 井上 克司 (Katsushi Inoue)

1. はじめに

[1] において, 単純なスイッチ機能をもつ基本セルを2次元的に規則的に配置したセル配列によって, 任意の多値論理関数を実現する方法を与えた. ここでは, まず, 与えられたセル配列が実現する関数を求める方法を考察する. これを用いて, 配列を構成する各セルの故障を検出する検査入力を求めるアルゴリズムを与える. この方法はサイズ $r \times s$ の配列に対し, $r \times s$ ステップのオーダーで検査入力を計算する. すべてのセルに対し検査入力が必要しも存在しないこと, 配列の行または列の置換によってセルに対する検査入力の存在性が変わることを例題によって示す.

2. 基本セルとセル配列

基本セルは図1(a)に示されるように上と左からの二つの入

力 (I^u, I^r) と，下と右への出力 (O^d, O^r) 及び一つの制御入力 c をもつ． c は 0 または 1 のいずれかであり， $c=0$ のときと $c=1$ のときの様子を図 1(b) と (c) に示す．

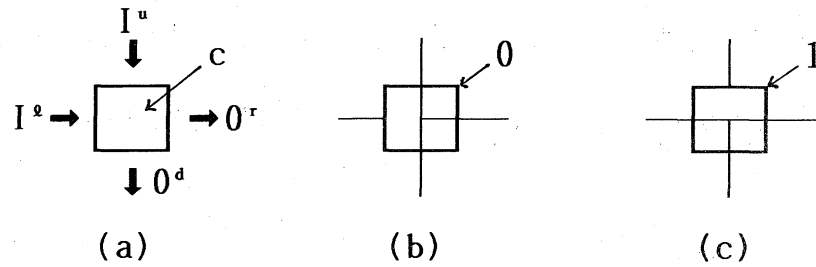


図 1 基本セルの構造とその動作

セル配列構造は，基本セルを方形格子状に並べ，各セルは図 2 のように接続されている．以降では，図 2 の構造を簡単のため図 3 のように表現する．

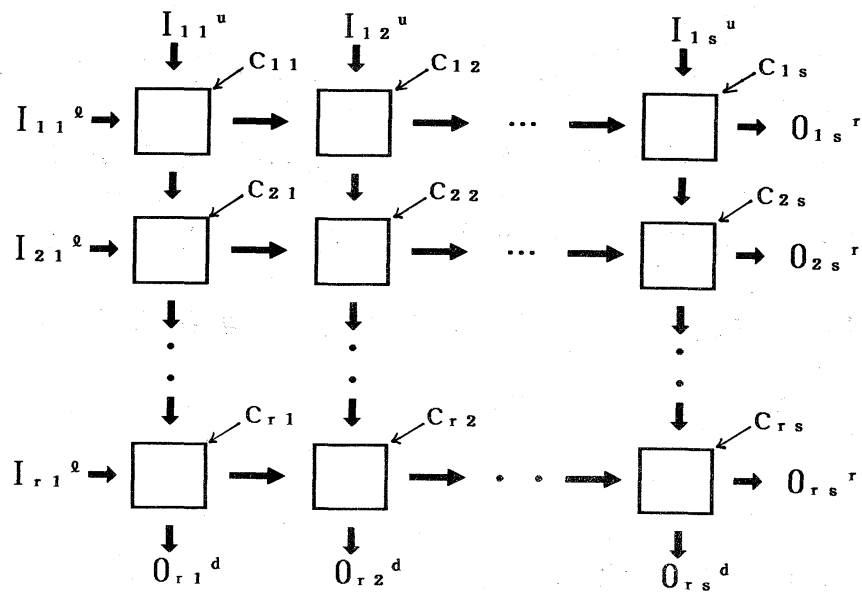


図 2 セル配列の構造

	I_{11}^u	I_{12}^u	...	I_{1s}^u
I_{11}^g	C_{11}	C_{12}	...	C_{1s}
I_{21}^g	C_{21}	C_{22}	...	C_{2s}
...
I_{r1}^g	C_{r1}	C_{r2}	...	C_{rs}

図3 セル配列の表現

3. セル配列の制御入力

$L = \{0, 1, \dots, K-1\}$ を真理値集合とする。各セルの制御入力 c_{ij} は L^n から $\{0, 1\}$ へのある適当な関数である。実際には、 c_{ij} として以下のように定義されるリテラルが入力される。

x を L の任意の要素をとる変数とし、 $a \subseteq L$ について、

$$x^a = \begin{cases} 1 & : x \in a \\ 0 & : \text{上記以外するとき} \end{cases}$$

と定義し、 x^a を "リテラル" と呼ぶ。

リテラル間の積 " \cdot " 及び和 " $+$ " を通常の数値ブール代数におけると同様に定義する。

図4は3値の半加算器を実現するセル配列の例である。

		0		
		X_1^{12}	X_2^0	X_2^0
1		X_2^1	X_1^{01}	X_2^1
		X_2^2	X_2^2	X_1^{02}
		X_1^2	X_2^0	X_2^0
2		X_2^1	X_1^1	X_2^1
		X_2^2	X_2^2	X_1^0
				← 出力セル

図4 3値半加算器を実現するセル配列

セル配列の上辺からは0が、上の部分配列の左辺からは1が、下の部分配列の左辺からは2が、それぞれ入力される。この配列の出力は右下隅のセル（以下、出力セルと呼ぶ）から取り出される。

4. セル配列が実現する関数

$C(r, s)$ を r 行 s 列のセル配列とし、 $c_{ij}(X)$ を (i, j) -セルの制御入力とする。入力 $a \in L^n$ に対し、各 $c_{ij}(a)$ は0か1のいずれかであり、それに対応して各セルの状態は図1(a)または(b)の様になる。このとき、それぞれのセルの状態に応じて出力セルにはセル配列の上辺または左辺から入力された信号（これは L の要素である）が現れる。これが入力 $a \in L^n$ に対する出力である。このようにしてセル配列は L^n から L への関数を実現する。

以下では、セル配列が与えられたとき、これが実現する関数を求める方法を考察する。

定義1: 入力 $a \in L^n$ に対し、 (i, j) -セルから隣接するセルのスイッチを辿って出力セルに到達できるとき、入力 a は (i, j) -セルから出力セルに至るパスを生成するという。□

定義2: $p_{ij}(X)$ を次の様な L^n から $\{0, 1\}$ への関数とする。任意の $a \in L^n$ について、

$p_{ij}(a) = 1 \Leftrightarrow a$ は (i, j) -セルから出力セルへのパスを生成する。 □

性質1: $p_{ij}(X)$ は次の再帰式を満たす。

$1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ なるすべての i, j について、

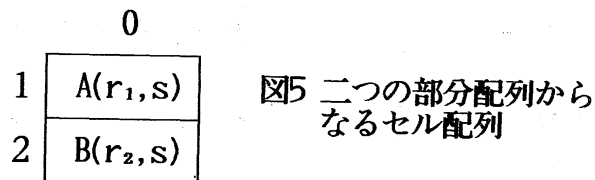
$$p_{ij}(X) = c_{i, j+1}(X) \cdot p_{i, j+1}(X) + \overline{c_{i+1, j}(X)} \cdot p_{i+1, j}(X) \quad (1)$$

ただし、 $p_{rs}(X) = 1$ で、 $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ なるすべての i, j について $p_{i, s+1}(X) = p_{r+1, j}(X) = c_{i, s+1}(X) = c_{r+1, j}(X) = 0$ 。

証明：任意の $a \in L^n$ について、 $p_{ij}(a) = 1$ であるための必要十分条件は $c_{i, j+1}(a) = p_{i, j+1}(a) = 1$ であるか、または $c_{i+1, j}(a) = 0$ で $p_{i+1, j}(a) = 1$ であるかである。 □

式(1)で計算した $p_{ij}(X)$ を用いてセル配列が実現する多値論理関数 $F(X)$ を計算することができる。そのことを、図5に示すような二つの部分配列 $A(r_1, s)$, $B(r_2, s)$ から成るセル

配列 $C(r, s)$ (ただし, $r=r_1+r_2$) について示す. $A(r_1, s)$ の上辺からは0が 左辺からは1が, $B(r_2, s)$ の左辺からは2が, それぞれ入力されているものとする.



(1) セル配列 $C(r, s)$ について, 式 (1) により $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ なるすべての i, j について, $p_{i,j}(X)$ を計算する.

$$(2) \quad F_1(X) = \sum_{1 \leq i \leq r} c_{i,1}(X) \cdot p_{i,1}(X)$$

$$F_2(X) = \sum_{r+1 \leq i \leq r} c_{i,1}(X) \cdot p_{i,1}(X)$$

とすると, 任意の入力 $a \in L^n$ について,

$$F(a) = \begin{cases} 1 & : F_1(a)=1 \text{ のとき} \\ 2 & : F_2(a)=1 \text{ のとき} \\ 0 & : \text{上記以外 のとき} \end{cases}$$

となることは明らかであろう.

以上の議論は 3 値論理関数の場合について述べたが, 容易に分かるように, 一般の K 値論理関数の場合に適用できる.

次に, 上辺から 0 が, 左辺から 1 が入力されているセル配列 $C(r, s)$ が実現する 2 値論理関数の場合について考察する.

定義 3 : L^n から $\{0, 1\}$ への関数 $q_{i,j}(X)$ を次の様に定義する. 任意の入力 $a \in L^n$ について,

$$q_{ij}(a)=1 \Leftrightarrow (i,j)\text{-セルの出力が } 1 \quad \square$$

性質 2 : $q_{ij}(X)$ は次の再帰式を満たす.

$1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ なるすべての i, j について,

$$\begin{aligned} q_{ij}(X) = & c_{ij}(X) \cdot q_{i, j-1}(X) \\ & + \overline{c_{ij}(X)} \cdot q_{i-1, j}(X) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし, $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ なるすべての i, j について $q_{i, 0}(X)=1$ で $q_{0, j}(X)=0$.

証明 : 任意の $a \in L^n$ について, $q_{ij}(a)=1$ であるための必要十分条件は $c_{ij}(a)=q_{i, j-1}(a)=1$ であるか, または $c_{ij}(a)=0$ で $q_{i-1, j}(a)=1$ であるか, である. \square

式(2)で計算した $q_{rs}(X)$ がこのセル配列が実現する 2 値関数となる.

5. セルの故障とその検査入力

ここでは故障ヶ所が高々一つである, いわゆる単一故障の場合についてのみ考察する.

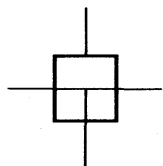
定義 4 : 考察しているタイプの故障について, セル配列に入力 $a \in L^n$ を与えることにより (i, j) -セルの故障を検出できるとき, a を (i, j) -セルのその故障に対する検査入力という.

\square

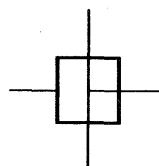
まず, セルのスイッチの動作に関する二つの故障について

調べる。

定義5 : セルの出力がその制御入力に無関係に図6(a)に示すように左側の入力につながった状態になっているとき, そのセルのスイッチは1-縮退故障であるという。同様に, セルの出力が図6(b)に示すように上側の入力につながった状態になっているとき, 0-縮退故障であるという。□



(a) 1-縮退故障



(b) 0-縮退故障

図6 セルのスイッチの縮退故障

(i, j) -セルのスイッチの1-縮退故障に対する検査入力の集合を $ST1(i, j)$ で, 0-縮退故障に対するそれを $ST0(i, j)$ で, それぞれ表す。

まず, セル配列 $C(r, s)$ には上辺からは0が, 左辺からは1が入力されている場合を考える。次のことが成り立つことは明らかであろう。

性質3 : (1) 入力 $a \in L^n$ が $ST1(i, j)$ の要素であるための必要十分条件は $q_{r,s}(a) \oplus q_{r,s}(a, c_{i,j}=1) = 1$ が成り立つことである。ここに, \oplus は排他的論理和で, $q_{r,s}(a, c_{i,j}=1)$ はセル配列への入力は a であるが (i, j) -セルの制御入力 $c_{i,j}$ は1 (すなわち, (i, j) -セル以外のすべての (u, v) -セルの制御入力は $c_{u,v}(a)$ で,

$c_{ij}=1$)のときの出力セルの出力である。

(2) 入力 $a \in L^n$ が $ST0(i, j)$ の要素であるための必要十分条件は $q_{rs}(a) \oplus q_{rs}(a, c_{ij}=0) = 1$ が成り立つことである。ここに、 $q_{rs}(a, c_{ij}=0)$ はセル配列への入力は a であるが (i, j) -セルの制御入力 c_{ij} は 0 のときの出力セルの出力である。□

性質 3 を用いてすべてのセルの検査入力を求めようとする
と計算ステップが $r^2 \cdot s^2$ 程度かかりそうである。以下では
前節で定義した関数 $p_{ij}(X)$ と $q_{ij}(X)$ を用いて検査入力を求め
る方法を与える。

性質 4 : (1) 入力 $a \in L^n$ が $ST1(i, j)$ の要素であるための必要
十分条件は $q_{i-1, j}(a) = 0$ で $c_{ij}(a) = 0$ で $q_{i, j-1}(a) = 1$ で $p_{ij}(a) = 1$
である。すなわち、

$$ST1(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q_{i-1, j}(a)} \cdot \overline{c_{ij}(a)} \cdot q_{i, j-1}(a) \cdot p_{ij}(a) = 1\}$$

(2) 入力 $a \in L^n$ が $ST0(i, j)$ の要素であるための必要十分条件
は $q_{i-1, j}(a) = 0$ で $c_{ij}(a) = 1$ で $q_{i, j-1}(a) = 1$ で $p_{ij}(a) = 1$ である。

すなわち、

$$ST0(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q_{i-1, j}(a)} \cdot c_{ij}(a) \cdot q_{i, j-1}(a) \cdot p_{ij}(a) = 1\}$$

証明：(1) についてののみ示す。十分性は明らかであるので、
必要性を示す。性質 3 より (a) ($q_{rs}(a) = 1$ で $q_{rs}(a, c_{ij}=1) = 0$)
であるか、(b) ($q_{rs}(a) = 0$ で $q_{rs}(a, c_{ij}=1) = 1$)。

(a) の場合：明らかに $c_{ij}(a) = 0$ である。 $q_{rs}(a) = 1$ より、入力

a は左辺から (i, j) -セルを通り, 出力セルに至るパスを生成する. しかも $c_{ij}(a)=0$ より, このパスは $(i-1, j)$ -セルを通る. 一方, $q_{rs}(a, c_{ij}=1)=0$ より, 上辺から $(i, j-1)$ -セルへのパスが生成されている. 従って, 左辺から $(i-1, j)$ -セルへのパス(1-パス)と上辺から $(i, j-1)$ -セルへのパス(0-パス)とが交差することになるが, これは不可能である. よって, この場合はない.

(b)の場合: $c_{ij}(a)=0$ である. 入力 a は上辺から (i, j) -セルを通り, 出力セルに至るパスを生成する(すなわち, $p_{ij}(a)=1$). しかも $c_{ij}(a)=0$ より, このパスは $(i-1, j)$ -セルを通る(すなわち, $q_{i-1, j}(a)=0$). 一方, $q_{rs}(a, c_{ij}=1)=1$ より, 左辺から $(i, j-1)$ -セルへのパスが生成されている(すなわち, $q_{i, j-1}(a)=1$). □

以上の議論は一般の K 値論理関数の場合に拡張できる. ここでは, 二つの部分セル配列 $A(r_1, s)$ と $B(r_2, s)$ が図5のように上下に接合されている場合について, 検査入力を求めるアルゴリズムを与える. より複雑に接合されている場合についても, ほぼ同様である.

セルのスイッチの縮退故障の検査入力を求める

アルゴリズム

(1) セル配列 $C(r, s)$ について, 式(1)により各 (i, j) -セルに対する $p_{ij}(X)$ を計算する.

(2) 部分配列 $A(r_1, s)$ 及び $B(r_2, s)$ をそれぞれ一つの独立したセル配列と見做して, 式(2)により $A(r_1, s)$ の各 (i, j) -セルに対する $q^A_{ij}(X)$ 及び $B(r_2, s)$ の各 (i, j) -セルに対する $q^B_{ij}(X)$ をそれぞれ計算する.

(3) $A(r_1, s)$ の (i, j) -セル ($1 \leq i \leq r_1, 1 \leq j \leq s$), 及び $B(r_2, s)$ の (i, j) -セル ($1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq s$) のスイッチの1-縮退故障に対する検査入力の集合をそれぞれ $ST1^A(i, j)$, $ST1^B(i, j)$ で, 0-縮退故障に対するそれをそれぞれ $ST0^A(i, j)$, $ST0^B(i, j)$ で表すと

$$ST1^A(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q^A_{i-1, j}(a)} \cdot \overline{c_{ij}(a)} \\ \cdot q^A_{i, j-1}(a) \cdot p_{ij}(a) = 1\}$$

$$ST1^B(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q^B_{i-1, j}(a)} \cdot \overline{c_{ij}(a)} \\ \cdot q^B_{i, j-1}(a) \cdot p_{i+r_1, j}(a) = 1\}$$

$$ST0^A(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q^A_{i-1, j}(a)} \cdot \overline{c_{ij}(a)} \\ \cdot q^A_{i, j-1}(a) \cdot p_{ij}(a) = 1\}$$

$$ST0^B(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q^B_{i-1, j}(a)} \cdot \overline{c_{ij}(a)} \\ \cdot q^B_{i, j-1}(a) \cdot p_{i+r_1, j}(a) = 1\} \quad \square$$

次に, スイッチのオープン故障について考察する. この故

障は，図7(a),(b)に示すようにスイッチが上側にも下側にも接続されていないか，スイッチの出力端が断線している状態のことである。

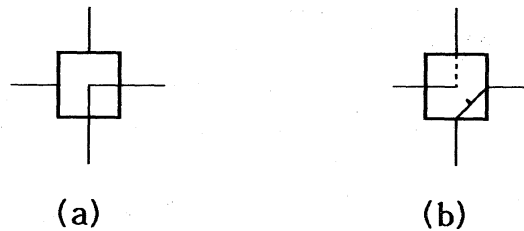


図7 スイッチのオープン故障

このとき，セルの出力端はフローティング状態であるが，その出力は $L=\{0, \dots, k-1\}$ のいずれかの要素になっていると考えられる．以下では，この出力値が変動しないものとし，その値が E であるときスイッチ・オープン E -縮退故障という． (i, j) -セルのスイッチ・オープン E -縮退故障に対する検査入力の集合を $SoE(i, j)$ で表す．

まず，セル配列 $C(r, s)$ には上辺からは 0 が，左辺からは 1 が入力されている場合を考える．次のことが成り立つのは明らかであろう．

性質 5 : (1) 入力 $a \in L^n$ が $So1(i, j)$ の要素であるための必要十分条件は $q_{r,s}(a) \oplus q_{r,s}(a, I_{i, j+1}^0 = I_{i+1, j}^0 = 1) = 1$ が成り立つことである．ここに， $q_{r,s}(a, I_{i, j+1}^0 = I_{i+1, j}^0 = 1)$ はセル配列への入力は a であるが $(i, j+1)$ -セルの左からと $(i+1, j)$ -セルの上からの入力を 1 に固定したときの出力セルの出力

である。

(2) 入力 $a \in L^n$ が $\text{So0}(i, j)$ の要素であるための必要十分条件は $q_{rs}(a) \oplus q_{rs}(a, I_{i, j+1}^0 = I_{i+1, j}^0 = 0) = 1$ が成り立つことである。ここに、 $q_{rs}(a, I_{i, j+1}^0 = I_{i+1, j}^0 = 0)$ はセル配列への入力は a であるが $(i, j+1)$ -セルの左からと $(i+1, j)$ -セルの上からの入力は 0 に固定したときの出力セルの出力である。□

性質 5 を用いてすべてのセルの検査入力を求めようとする計算ステップが $r^2 \cdot s^2$ 程度かかりそうである。以下では前節で定義した関数 $p_{ij}(X)$ と $q_{ij}(X)$ を用いて $r \cdot s$ ステップのオーダーで検査入力を求め方法を与える。

性質 6 : (1) 入力 $a \in L^n$ が $\text{Sol}(i, j)$ の要素であるための必要十分条件は $q_{ij}(a) = 0$ で $p_{ij}(a) = 1$ である。すなわち、

$$\text{Sol}(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q_{ij}(a)} \cdot p_{ij}(a) = 1\}.$$

(2) 入力 $a \in L^n$ が $\text{So0}(i, j)$ の要素であるための必要十分条件は $q_{ij}(a) = 1$ で $p_{ij}(a) = 1$ である。すなわち、

$$\text{So0}(i, j) = \{a \in L^n \mid q_{ij}(a) \cdot p_{ij}(a) = 1\}.$$

証明 : (1) についてののみ示す。十分性は明らかであるので必要性のみ示す。 $a \in \text{Sol}(i, j)$ について $p_{ij}(a) = 0$ ならば、 a は (i, j) -セルを通らないセル配列の上または左辺から出力セルへのパスを生成している。従って、 $q_{rs}(a) = q_{rs}(a, I_{i, j+1}^0 = I_{i+1, j}^0 = 1)$ となり、性質 5 の (1) に反する。よって、 $p_{ij}(a) =$

1である。 $q_{ij}(a)=1$ ならば同様の理由で性質5の(1)に反する。 □

以上の議論は一般のK値論理関数の場合に拡張できる。ここでは、二つの部分セル配列 $A(r_1, s)$ と $B(r_2, s)$ が図5のように上下に接合されている場合について、検査入力を求めるアルゴリズムを与える。より複雑に接合されている場合についても、ほぼ同様である。

セルのスイッチ・オープン縮退故障の検査入力を求めるアルゴリズム

(1) セル配列 $C(r, s)$ について、式(1)により各 (i, j) -セルに対する $p_{ij}(X)$ を計算する。

(2) 部分配列 $A(r_1, s)$ 及び $B(r_2, s)$ をそれぞれ一つの独立したセル配列と見做して、式(2)により $A(r_1, s)$ の各 (i, j) -セルに対する $q^A_{ij}(X)$ 及び $B(r_2, s)$ の各 (i, j) -セルに対する $q^B_{ij}(X)$ をそれぞれ計算する。

(3) $A(r_1, s)$ の (i, j) -セル ($1 \leq i \leq r_1, 1 \leq j \leq s$), 及び $B(r_2, s)$ の (i, j) -セル ($1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq s$) のスイッチのオープンE-縮退故障に対する検査入力の集合をそれぞれ $SoE^A(i, j)$, $SoE^B(i, j)$ で表すと

$$SoE^A(i, j) = \{a \in L^n \mid p_{ij}(a) = 1\}.$$

$$\text{Sol}^A(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q^A_{ij}(a)} \cdot p_{ij}(a) = 1\}.$$

$$\text{So0}^A(i, j) = \{a \in L^n \mid q^A_{ij}(a) \cdot p_{ij}(a) = 1\}.$$

$$\text{So2}^B(i, j) = \{a \in L^n \mid \overline{q^B_{ij}(a)} \cdot p_{i+r, j}(a) = 1\}.$$

$$\text{Sol}^B(i, j) = \{a \in L^n \mid q^B_{ij}(a) \cdot p_{i+r, j}(a) = 1\}.$$

$$\text{So0}^B(i, j) = \text{Sol}^B(i, j). \quad \square$$

6. 例題

図4の3値半加算器のセル配列に対する各セルの関数 q_{ij} ,

p_{ij} 及びスイッチの縮退故障に対する検査入力を図8に示す.

この場合, 配列の列の交換, 並びに部分セル配列内の行の交換によってセル配列が実現する関数は不変であるので, 列や行の交換を行なってみた. 図8(b)は2列と3列及び下の部分配列の1行と2行を同時に交換した場合である. 検査入力に変化するのが見られる. なお, 図で $*b$ は x_2^b を, $a*$ は x_1^a を, $a*b$ は $x_1^a \cdot x_2^b$ をそれぞれ意味する.

(1 2 3)

12*	*0	*0
1	01	*1
*2	*2	02*
2*	*0	*0
1	1	*1
*2	*2	0*

図8
← セル配列の制御入力

上の部分配列の関数 q_{ij}



```
FUNCTION QA
12*012+ 12*0+ 12*0+
12*02+012*1+ 2*0+01*1+1*02+ 12*0+01*1+
012*12+12*0+ 12*0+01*1+012*2+ 1*01+01*1+12*0+02*2+
```

FUNCTION Q_B
 2*012+ 2*0+ 2*0+
 2*02+012*1+ 2*0+1*1+ 2*0+1*1+
 012*12+2*0+ 1*1+2*0+012*2+ 1*1+2*0+0*2+

↑
 下の部分配列の関数q_{ij}

PATH FUNCTION P
 01*0+ 2*1+ 1*2+
 01*0+0*1+ 02*1+ 1*2+
 01*0+2*2+ 02*1+2*12+ 12*2+
 012*0+ 0*01+2*1+12*0+ 12*02+
 1*1+ 0*01+12*1+ 12*012+
 0*2+ 0*012+ 012*012+

←関数p_{ij}

S-A-1 FAULT

---	2*1+	---
---	2*1+	1*2+
---	2*1+	1*2+
---	2*1+	---
---	02*1+	---
---	0*1+	12*2+

←1-縮退故障の検査入力

S-A-0 FAULT

---	---	---
---	0*1+	---
---	2*2+	2*2+
---	---	---
---	1*1+	1*1+
---	0*2+	0*2+

←0-縮退故障の検査入力

(1 3 2)

12*	*0	*0
*1	*1	01*
2	02	*2
<hr/>		
*1	*1	1*
2*	*0	*0
2	0	*2

S-A-1 FAULT

---	1*2+	---
---	1*2+	2*1+
---	1*2+	2*1+
---	---	2*1+
---	2*2+	02*1+
---	12*2+	02*1+

S-A-0 FAULT

---	---	---
---	0*1+	0*1+
---	2*2+	---
---	---	---
---	2*0+	2*0+
---	0*2+	0*2+

(b)列と行を交換したセル配列とその故障検査入力

文献

- (1) 高浪五男, 井上克司: セル配列による多値論理関数の実現, 多値論理研究ノート 第10巻 第4号, 1988.7
- (2) M.Hatta, I.Takanami and K.Inoue: A Realization of Ternary Logic Functions by Using Cellular Arrays, Proceedings of the 10th International Symposium on Multiple-valued Logic. 1980-6.
- (3) S.B. Akers: A rectangular logic array, IEEE Trans. on Comp., Vol.C-21, pp.848-857, 1972.
- (4) J.A. Bate and J.C. Musio: Three cell structures for ternary cellular arrays: IEEE Trans. on Comp., Vol.C-26, pp.1191-1202, Dec. 1977.
- (5) G. Hachimine and M. Kimura: Synthesis for ternary logic functions by cellular arrays and identification of cells in an array, IECE Japan Trans. Vol.J61-D, pp.703-710, Sept. 1978.