

3 値 B C H 符号の符号及び復号回路

関西大 工学部 村中 徳明 (Noriaki muranaka)

関西大 工学部 今西 茂 (Shigeru Imanishi)

1. まえがき

多値論理回路の応用である多値情報処理システムとして、四則演算などを行う多値演算システムの研究はかなり以前から行われているが^{(1)~(8)}、情報を伝達したり記憶したりするときに必要な多値符号システムの研究はほとんど行われていない。そこで、著者らは多値符号システムのうち最も基本的な3値符号システムを取り上げ、並列信号を扱った3値ハミング符号の符号および復号回路^{(9),(10)}、直列信号を扱った3値巡回ハミング符号の符号および復号回路⁽¹¹⁾や3値BCH符号の符号および復号回路⁽¹²⁾について報告した。前者は、並列に送られてくる信号を高速に訂正するのに有効であり、後者らは、連続して送られてくる信号を順次訂正するのに有効である。直列信号を扱った3値BCH符号は、2重誤り訂正符号であり、更に誤り訂正能力の高い符号が望まれる。

このため本論文では，3重誤り訂正可能な3値BCH符号の符号回路⁽¹³⁾および復号回路^{(14),(15)}について報告する。

ここでは，3重誤り訂正可能な3値BCH符号として，(26, 14)符号および(26, 13)符号を提案する。情報点数の理論上の限界は，ハミングの限界式およびバルシャルモフ・ギルバート・サックスの限界式^{(16),(17)}から16~12が求まるが，実際の限界は(26, 14)符号の情報点数14と考えられる。一方(26, 13)符号は，符号長26のうち情報点数13と符号の効率が悪いが，検査点数13の1つを全ディジットに対するパリティ検査点として用いているので，誤りの大きさを簡単に求めることができ，回路構成が(26, 14)符号の約半分になる。またこれらの回路構成には，CMOS-ICを用いた3値論理回路および3値FF回路など^{(18),(19)}を用いている。

2. 3値BCH符号

2. 1 t 重誤り訂正3値BCH符号

BCH符号は，1959年に Hocquenghem によって，また1960年に Bose と Chaudhuri によって独立に発見されたものであり，現在までに知られている代表的なランダム誤り訂正符号のうちで，最も誤り訂正能力が高く，かつ広範に定義されている符号の一つである^{(16),(17)}。

ここでは，ランダム t 重誤り訂正可能な3値BCH符号に

ついて報告する。 t 重誤り訂正符号を作るには、まず符号の最小距離を考慮する必要がある。符号 W における最小距離 d_{\min} は次式で定義される⁽¹⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} d_{\min} &= \min \{ d_H(w_i, w_j) \\ d_H &: \text{ハミング距離}, w_i, w_j \in W, w_i \neq w_j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

これより、 t 重誤り訂正の必要条件として、 d_{\min} (以下、 d' と略記) は次式で与えられる。

$$d' \geq 2t + 1 \quad (2)$$

BCH符号は、任意のガロア体 $GF(q)$ の元で構成され、その生成多項式は $GF(q)$ の拡大体 $GF(q^{m'})$ の元によって定められる。 α を乗位数 (Multiplicative order) n の $GF(q^{m'})$ の元として任意の整数 $r \geq 0$ および $d' (2 \leq d' \leq n)$ に対して $M_r(x)$, $M_{r+1}(x)$, \dots , $M_{r+d'-2}(x)$ を $\alpha^r, \alpha^{r+1}, \alpha^{r+2}, \dots, \alpha^{r+d'-2}$ の最小多項式とすると、BCH符号の生成多項式は次式で与えられる⁽¹⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} G(x) &= \text{LCM} [M_r(x), M_{r+1}(x), \dots, M_{r+d'-2}(x)] \\ \text{LCM} &: \text{最小公倍多項式} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

これから、BCH符号多項式が $\alpha^r, \alpha^{r+1}, \alpha^{r+2}, \dots, \alpha^{r+d'-2}$ を根として持つ符号であるとも言える。

2. 2 3重誤り訂正3値BCH(26, 14)符号

ここでは、符号長 n 、情報点数 k および検査点数 m とする符号語を考える。式(2)より、 $t=3$ のときの3重誤り訂正符号

は $d' = 7$ になるようにすればよい。

従って, $q=3, m'=3, n=26, d'=7$ および $r=1$ とした 3 重誤り訂正 3 値 BCH 符号の生成多項式は式 (3) から次式で与えられる。

$$G(x) = LCM [M_1(x), M_2(x), M_3(x), M_4(x), M_5(x), M_6(x)] \quad (4)$$

3 値 BCH 符号については, 任意の i はある $i' (< i)$ と整数 $l' \geq 1$ によって, $i = i' \times 3^{l'}$ と表され, α^i と $\alpha^{i'}$ は同じ最小多項式を持つ。従って, $M_1(x)$ と $M_3(x)$ の根 α^1 と α^3 は等しくなり, $M_3(x)$ は $M_1(x)$ に吸収され, $M_2(x)$ と $M_6(x)$ の根 α^2 と α^6 は等しくなり, $M_6(x)$ は $M_2(x)$ に吸収される。これより, 式 (4) の生成多項式は次式のようになる。

$$G(x) = M_1(x) \cdot M_2(x) \cdot M_4(x) \cdot M_5(x) \quad (5)$$

ここで, 最小多項式 $M_1(x), M_2(x), M_4(x)$ および $M_5(x)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_1(x) &= x^3 + 2x + 1, & M_2(x) &= 2x^3 + x^2 + x + 1 \\ M_4(x) &= 2x^3 + x + 1, & M_5(x) &= x^3 + x^2 + 2x + 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式 (5) および式 (6) より, 3 重誤り訂正 3 値 BCH (26, 14) 符号の生成多項式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^3 + 2x + 1)(2x^3 + x^2 + x + 1) \\ &\quad \cdot (2x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 2x + 1) \end{aligned} \quad (7)$$

$$= x^{12} + 2x^{11} + 2x^{10} + x^9 + 2x^6 + x + 1 \quad (8)$$

従って、次数は12であり、 $m=12$ および $k=14$ となる。この符号のパリティ検査行列 H は、式(7)から次式で与えられる。

$$H = \begin{bmatrix} \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \dots & \alpha^{20} & \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} & \alpha^{24} & \alpha^{25} \\ \alpha^0 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^8 & \alpha^{10} & \dots & \alpha^{14} & \alpha^{16} & \alpha^{18} & \alpha^{20} & \alpha^{22} & \alpha^{24} \\ \alpha^0 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} & \alpha^{16} & \alpha^{20} & \dots & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha^{14} & \alpha^{18} & \alpha^{22} \\ \alpha^0 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \alpha^{15} & \alpha^{20} & \alpha^{25} & \dots & \alpha^{22} & \alpha^1 & \alpha^6 & \alpha^{11} & \alpha^{16} & \alpha^{21} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $M_1(x)=0$ の根を α 、 $M_2(x)=0$ の根を α^2 、 $M_4(x)=0$ の根を α^4 、 $M_5(x)=0$ の根を α^5 とすると、 α^l ($l=0, 1, \dots, 25$) は表1に示すベクトル表現となる。表1から、 $M_1(x)$ と $M_5(x)$ は26回で、 $M_2(x)$ と $M_4(x)$ は13回で巡回しているのがわかる。

表1 $GF(3^3)$ の元 α^l のベクトル表現

$M_1(x)$	$M_2(x)$	$M_4(x)$	$M_5(x)$	α^l	1	x	x^2	ベクトル
				0	0			(000)
①	②	④	⑤	α^0	1			(100)
①			⑤	α^1		α		(010)
①	②	④	⑤	α^2			α^2	(001)
①			⑤	α^3	2	+	α^2	(201)
①	②	④	⑤	α^4	2+2	α +	α^2	(221)
①			⑤	α^5	2+2	α		(220)
①	②	④	⑤	α^6		2 α +	2 α^2	(022)
①			⑤	α^7	1	+	α^2	(101)
①	②	④	⑤	α^8	2+	α +	α^2	(211)
①			⑤	α^9	2+2	α +	2 α^2	(222)
①	②	④	⑤	α^{10}	1+2	α +	α^2	(121)
①			⑤	α^{11}	2+	α		(210)
①	②	④	⑤	α^{12}		2 α +	α^2	(021)
①			⑤	α^{13}	2			(200)
①	②	④	⑤	α^{14}		2 α		(020)
①			⑤	α^{15}			2 α^2	(002)
①	②	④	⑤	α^{16}	1	+	2 α^2	(102)
①			⑤	α^{17}	1+	α +	2 α^2	(112)
①	②	④	⑤	α^{18}	1+	α		(110)
①			⑤	α^{19}		α +	α^2	(011)
①	②	④	⑤	α^{20}	2	+	2 α^2	(202)
①			⑤	α^{21}	1+2	α +	2 α^2	(122)
①	②	④	⑤	α^{22}	1+	α +	α^2	(111)
①			⑤	α^{23}	2+	α +	2 α^2	(212)
①	②	④	⑤	α^{24}	1+2	α		(120)
①			⑤	α^{25}		α +	2 α^2	(012)

2. 3 3重誤り訂正3値 BCH (26, 13) 符号

ここでは，復号法を簡単にするため，生成多項式にパリティ検査ディジット $(x+2)$ を与える。この $(x+2)$ の項によりハミング距離が +1 の符号となり，生成多項式は $d'=6$ として考えることができる。これより，式(4)の生成多項式は次式のようなになる。

$$G(x) = LCM [M_1(x), M_2(x), M_3(x), M_4(x), M_5(x), (x+2)] \quad (10)$$

$$= M_1(x) \cdot M_2(x) \cdot M_4(x) \cdot M_5(x) \cdot (x+2) \quad (11)$$

式(6)および式(11)より，3重誤り訂正3値 BCH (26, 13) 符号の生成多項式は次式のようなになる。

$$G(x) = (x^3 + 2x + 1)(2x^3 + x^2 + x + 1)(2x^3 + x + 1) \\ \cdot (x^3 + x^2 + 2x + 1)(x + 2) \quad (12)$$

$$= x^{13} + x^{12} + 2x^{10} + 2x^9 + 2x^7 + x^6 + x^2 + 2 \quad (13)$$

従って，次数は13であり， $m=13$ および $k=13$ となる。

この符号の H は，式(12)から次式で与えられる。

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \cdots & \alpha^{20} & \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} & \alpha^{24} & \alpha^{25} \\ \alpha^0 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^8 & \alpha^{10} & \cdots & \alpha^{14} & \alpha^{16} & \alpha^{18} & \alpha^{20} & \alpha^{22} & \alpha^{24} \\ \alpha^0 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} & \alpha^{16} & \alpha^{20} & \cdots & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha^{14} & \alpha^{18} & \alpha^{22} \\ \alpha^0 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \alpha^{15} & \alpha^{20} & \alpha^{25} & \cdots & \alpha^{22} & \alpha^1 & \alpha^6 & \alpha^{11} & \alpha^{16} & \alpha^{21} \end{bmatrix} \quad (14)$$

3. 符号回路

3. 1 3値 BCH 符号の符号回路

3値 BCH 符号は， $(k-1)$ 次の多項式 $P(x)$ の係数に情報

を対応させ、 $x^{n-k} P(x)$ を生成多項式 $G(x)$ で割り、その剰余 $R(x)$ の2倍と $x^{n-k} P(x)$ の和を符号多項式 $F(x)$ とする。すなわち、次式のように表される。

$$x^{n-k} P(x) = Q(x) G(x) + R(x) \tag{15}$$

$$F(x) = x^{n-k} P(x) + 2R(x) = Q(x) G(x) \tag{16}$$

式(15)および式(16)より、符号回路は生成多項式の除算回路を用いて構成できる。ここでは、2.2の3重誤り訂正3値 BCH(26, 14)符号および2.3の3重誤り訂正3値 BCH(26, 14)符号の符号回路を考える。

3.2 3重誤り訂正3値 BCH(26, 14)符号回路の構成⁽¹⁵⁾

3重誤り訂正3値 BCH(26, 14)符号回路は、式(8)の生成多項式の除算回路を用いて、図1のように12段の3値シフトレジスタ、倍数器および加算器などで構成する。

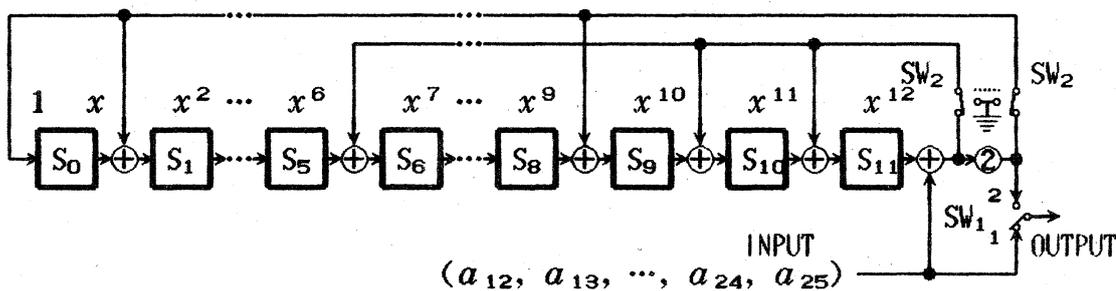


図1 3重誤り訂正3値 BCH(26, 14)符号回路
Fig.1 A triple-error-correcting ternary BCH(26, 14) encoder.

この回路において、まずスイッチ SW_1 を1側に閉じ、同時に SW_2 および SW_2' を閉じたままで情報を $a_{25}, a_{24}, \dots, a_{13}, a_{12}$ の順

に人力し， $a_{25}, a_{24}, \dots, a_{13}, a_{12}$ が出力し終った後に SW_1 を 2 側に閉じ，同時に SW_2 および SW_2' を開いて（実際にはアースに接続する）3 値シフトレジスタ $S_{11} \sim S_0$ に記憶されている剰余結果の 2 倍したものを，順に $a_{11}, a_{10}, \dots, a_1, a_0$ として出力する。

3. 2 3 値 BCH (26, 13) 符号回路の構成^{(13), (14)}

3 重誤り訂正 3 値 BCH (26, 13) 符号回路は，3. 2 の 3 値 BCH (26, 14) 符号回路と同様に，式 (13) の生成多項式の除算回路を用いて，図 2 のように 13 段の 3 値シフトレジスタ，倍数器及び加算器などで構成する。

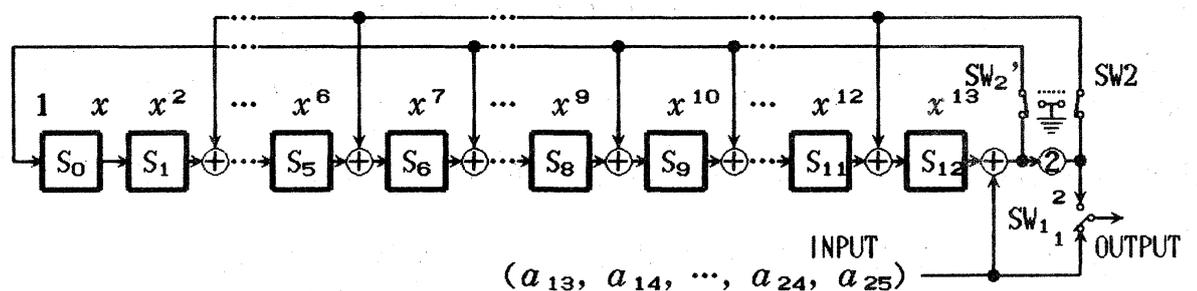


図 2 3 重誤り訂正 3 値 BCH (26, 13) 符号回路
Fig. 2 A triple-error-correcting ternary BCH (26, 13) encoder.

4. 復号回路

4. 1 3 値 BCH 符号の復号回路

3 値 BCH 符号の復号法では，まず受信系列からシンδροーム計算を行い，このシンδροームから誤りなし，単一誤り，2 重誤りおよび 3 重誤りを検出する。更に，誤りの大きさおよび誤りロケーション数を求めて訂正を行う。

ここでは、3. 2 の 3 値 BCH (26, 14) および 3. 3 の 3 値 BCH (26, 13) 符号回路で符号化された符号に単一誤り、2重誤りあるいは3重誤りが生じたときの訂正復号回路（以下、復号回路と略記）を考える。これらの復号回路は、以下で述べるシンδροーム計算回路、シンδροーム取り込み回路、誤りパターン検出回路（誤り数検出回路、誤りの大きさ検出回路、誤りロケーション数検出回路および訂正信号発生回路）などで図3のように構成する。

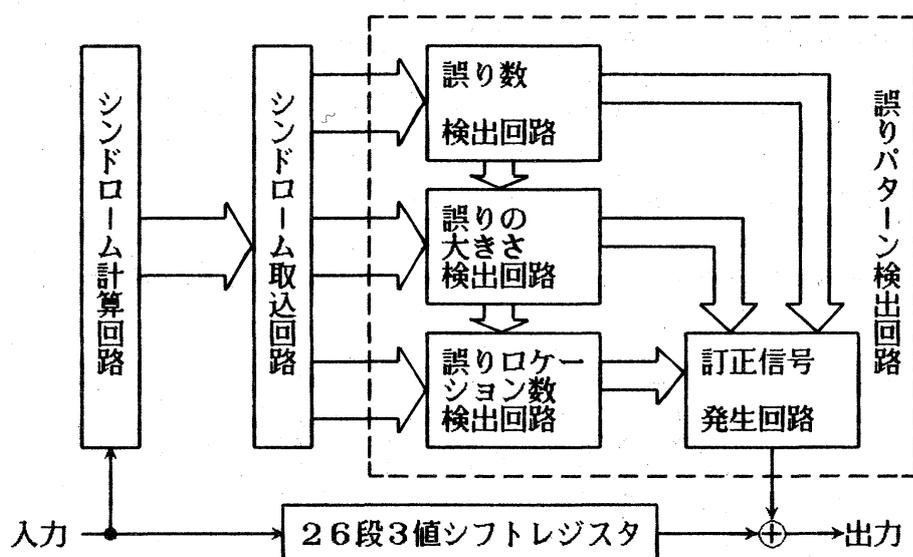


図3 3 値 BCH 符号の復号回路
Fig.3 A decoder with ternary BCH code.

4. 2 3 値 BCH (26, 14) 符号の復号回路⁽¹⁵⁾

4. 2. 1 シンδροーム計算回路

受信系列 $v = (b_0, b_1, \dots, b_{24}, b_{25})$ とすれば、式(9)のパリティ検査行列 H から計算されるシンδροーム s は次式で与えら

$$s = H v^T = \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 \alpha^1 + \dots + b_{24} \alpha^{24} + b_{25} \alpha^{25} \\ b_0 + b_1 \alpha^2 + \dots + b_{24} \alpha^{22} + b_{25} \alpha^{24} \\ b_0 + b_1 \alpha^4 + \dots + b_{24} \alpha^{18} + b_{25} \alpha^{22} \\ b_0 + b_1 \alpha^5 + \dots + b_{24} \alpha^{16} + b_{25} \alpha^{21} \end{bmatrix} \quad (17)$$

れ、シンドローム計算回路はシンドロームのディジット B , C , D および E の計算回路からなる。 B , C , D および E 計算回路の構成法を、例として B 計算回路で示す。

元の状態 (a_0, a_1, a_2) を α 倍した結果を、 (a_0', a_1', a_2') とすれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_0' + a_1' \alpha + a_2' \alpha^2 &= \alpha (a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2) \\ &= 2a_2 + a_0 \alpha + (a_1 + a_2) \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$a_0' = 2a_2, \quad a_1' = a_0, \quad a_2' = a_1 + a_2 \quad (19)$$

式 (19) から B 計算回路は図 4 のように構成できる。

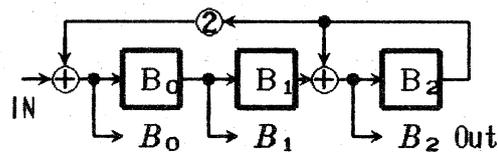


図 4 B 計算回路
Fig.4 A B generator.

同様にして、 C , D および E 計算回路は式 (20) , 式 (21) および式 (22) で構成できる。

$$a_0' = 2a_1 + 2a_2, \quad a_1' = 2a_2, \quad a_2' = a_0 + a_1 + a_2 \quad (20)$$

$$a_0' = 2a_0 + 2a_1, \quad a_1' = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2, \quad a_2' = a_0 + 2a_2 \quad (21)$$

$$a_0' = 2a_0 + a_2, \quad a_1' = 2a_0 + 2a_1, \quad a_2' = 2a_1 + a_2 \quad (22)$$

4. 2. 2 シンドローム取り込み回路

シンドローム取り込み回路は，4. 2. 1のシンドローム計算回路で求めたシンドロームの値などを26回に1回，3値レジスタに格納する。

4. 2. 3 誤りパターン検出回路

誤りパターン検出回路は，誤り数検出回路で誤りなし，単一誤り，2重誤りおよび3重誤りを検出し，誤りの大きさ検出回路および誤りロケーション数検出回路で誤りの大きさおよび誤りロケーション数を求めて，訂正信号発生回路から訂正信号を出力する。

(1-1) 誤りなしの検出

次式が成立するとき誤りなしである。

$$B=0, C=0 \quad (23)$$

(1-2) 単一誤りの検出

単一誤りが第 i 桁に生じた場合，誤りロケーション数を $r_i = \alpha^i$ ，誤りの大きさを e_i とすると B ， C および D は式 (24) で与えられ，式 (25) が成立するとき単一誤りである。

$$B=e_i r_i, C=e_i r_i^2, D=e_i r_i^4 \quad (24)$$

$$B^6 + 2CD=0 \quad (25)$$

式 (24) に $e_i = 1$ を代入して， r_i を消去すると次式が得られる。

$$B^2 + 2C=0 \quad (26)$$

式(26)が成立するとき $e_i = 1$, 成立しないとき $e_i = 2$ が求まる。

誤りロケーション数 r_i を根とする多項式に, 式(24)から求めた r_i を代入すると式(27)が得られる。 r_i は, 式(27)の x に α^i をすべて代入する方法で求める。

$$x - r_i = 0 \rightarrow x + 2e_i B = 0 \quad (27)$$

(1-3) 同レベル2重誤りの検出

誤りの大きさが同じ2重誤りが第 i 桁および第 j 桁に生じた場合, 誤りロケーション数を $r_i = \alpha^i, r_j = \alpha^j$, 誤りの大きさを $e_i = e_j = e$ とすると, B, C, D および E は式(28)で与えられ, 式(29)が成立するとき誤りの大きさが同じ2重誤りである。

$$\left. \begin{aligned} B &= e(r_i + r_j), C = e(r_i^2 + r_j^2) \\ D &= e(r_i^4 + r_j^4), E = e(r_i^5 + r_j^5) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} (2B^2 C + D)(B^5 + BC^2 + E) &= 0 \\ \text{又は } B \neq 0, C = D = 0, BE &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式(28)に $e=1$ を代入して求めた式(30)が成立するとき $e=1$, 成立しないとき $e=2$ が求まる。

$$2B^2 C + D + 2B^4 + C^2 = 0 \quad (30)$$

r_i および r_j を根とする多項式に, 式(28)から求めた $r_i + r_j$ および $r_i r_j$ を代入すると次式が得られる。

$$(x - r_i)(x - r_j) = 0 \rightarrow x^2 + 2eBx + eC + 2B^2 = 0 \quad (31)$$

(1-4) 異レベル2重誤りの検出

誤りの大きさが異なる2重誤りが第*i*桁および第*j*桁に生じた場合，誤りロケーション数を $r_i = \alpha^i$, $r_j = \alpha^j$, 誤りの大きさを $e_i = 2e_j = e$ とすると， B , C , D および E は式(32)で与えられ，式(33)が成立するとき誤りの大きさが異なる2重誤りである。

$$\left. \begin{aligned} B &= e(r_i + 2r_j), C = e(r_i^2 + 2r_j^2) \\ D &= e(r_i^4 + 2r_j^4), E = e(r_i^5 + 2r_j^5) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} C^2(BE + CD) + 2B^2(C^4 + D^2) &= 0 \\ \text{又は } B \neq 0, C = D = 0, B^5 + 2E &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

r_i および r_j を根とする多項式に，式(32)から求めた r_i および r_j を代入すると次式が得られる。

$$e = 1 \text{ のとき, } x - r_i = 0 \rightarrow Bx + B^2 + C = 0 \quad (34)$$

$$e = 2 \text{ のとき, } x - r_j = 0 \rightarrow Bx + 2B^2 + C = 0 \quad (35)$$

(1-5) 同レベル3重誤りの検出

(1-1)~(1-4)以外するとき3重誤りである。誤りの大きさが同じ3重誤りが第*i*桁，第*j*桁および第*k*桁に生じた場合，誤りロケーション数を， $r_i = \alpha^i$, $r_j = \alpha^j$, $r_k = \alpha^k$, 誤りの大きさを $e_i = e_j = e_k = e$ とすると， B , C , D および E は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} B &= e(r_i + r_j + r_k), C = e(r_i^2 + r_j^2 + r_k^2) \\ D &= e(r_i^4 + r_j^4 + r_k^4), E = e(r_i^5 + r_j^5 + r_k^5) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式(36)に $e=1$ を代入して求めた式(37)が成立するとき $e=1$,
 $e=2$ を代入して求めた式(38)が成立するとき $e=2$ である。

$$C(B^4 + C^2) + B^2 D + B^2(B^4 + 2C^2) + DC + 2BE = 0 \quad (37)$$

$$2C(B^4 + C^2) + 2B^2 D + B^2(B^4 + 2C^2) + DC + 2BE = 0 \quad (38)$$

γ_i, γ_j および γ_k を根とする多項式に, 式(36)から求めた
 $\gamma_i + \gamma_j + \gamma_k, \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_i, \gamma_i \gamma_j \gamma_k$ を代入すると次式
 が得られる。

$$(x - \gamma_i)(x - \gamma_j)(x - \gamma_k) = 0 \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} B \neq 0 \text{ のとき, } e B x^3 + 2B^2 x^2 + (BC + 2e B^3)x \\ + (eC + 2B^2)^2 + C^2 + 2eD = 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$B = 0 \text{ のとき, } e C x^3 + 2C^2 x + 2eE = 0 \quad (40)$$

(1-6) 異レベル3重誤りの検出

(1-1) ~ (1-4) 以外のとき3重誤りである。(1-1) ~
 (1-6) の誤りの条件には, 誤りなし, 単一誤り, 2重誤り,
 3重誤りの優先順位がある。

誤りの大きさが異なる3重誤りが第 i 桁, 第 j 桁および
 第 k 桁に生じた場合, 誤りロケーション数を $\gamma_i = \alpha^i, \gamma_j = \alpha^j,$
 $\gamma_k = \alpha^k$, 誤りの大きさを $e_i = e_j = 2e_k = e$ とすると, $B, C,$
 D および E は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} B = e(\gamma_i + \gamma_j + 2\gamma_k), C = e(\gamma_i^2 + \gamma_j^2 + 2\gamma_k^2) \\ D = e(\gamma_i^4 + \gamma_j^4 + 2\gamma_k^4), E = e(\gamma_i^5 + \gamma_j^5 + 2\gamma_k^5) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

式(4)に $e=1$ を代入して求めた式(4)が成立するとき $e=1$,
 成立しないとき $e=2$ である。

$$\left. \begin{aligned} (B^2 + 2C)(E (E+B (2D+B^4 + B^2 C^2)) + 2D (C^3 \\ + B^2 D + CD) + C^3(2B^4 + B^2 C + C^2) + B^{12} + 2D^3 = 0 \end{aligned} \right\} (42)$$

式(4)から求めた $\gamma_i + \gamma_j + \gamma_k$, $\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_i$, $\gamma_i \gamma_j \gamma_k$
 を代入すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x - \gamma_i = 0 \rightarrow ((B^2 + eC)^2 + C^2 + eD) x \\ + e (B (B^4 + C^2) + E) = 0 \end{aligned} \right\} (43)$$

$$\left. \begin{aligned} (x - \gamma_j)(x - \gamma_k) = 0 \rightarrow ((B^2 + eC)^2 + C^2 + eD)(x + eB^2) \\ + e (B (B^4 + C^2) + E) x + eDB^2 + 2BE + CD + 2eC^3 = 0 \end{aligned} \right\} (44)$$

4. 3 3値 BCH (26, 13) 符号の復号回路 (14)

4. 3. 1 シンドローム計算回路

式(14)のバリティ検査行列 H から計算されるシンドローム s
 は次式で与えられる。

$$s = H v^T = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 + \dots + b_{24} + b_{25} \\ b_0 + b_1 \alpha^1 + \dots + b_{24} \alpha^{24} + b_{25} \alpha^{25} \\ b_0 + b_1 \alpha^2 + \dots + b_{24} \alpha^{22} + b_{25} \alpha^{24} \\ b_0 + b_1 \alpha^4 + \dots + b_{24} \alpha^{18} + b_{25} \alpha^{22} \\ b_0 + b_1 \alpha^5 + \dots + b_{24} \alpha^{16} + b_{25} \alpha^{21} \end{bmatrix} \quad (45)$$

式(45)から, A 計算回路は各ディジットをそれぞれ順に加え
 ればよいから, 図5のように構成できる。 A 計算回路以外は,
 3値 BCH (26, 14) 符号と同じである。

4. 3. 2 シンドローム取り込み回路

シンドローム取り込み回路は，4.3.1のシンドロームの値などを26回に1回，3値レジスタに格納する。

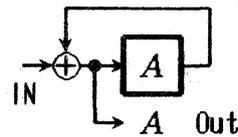


図5 A計算回路
Fig.5 An A generator.

4.3.3 誤りパターン検出回路

(2-1) 誤りなしの検出

式(23)が成立するとき誤りなしである。

(2-2) 単一誤りの検出

$$A = e_i \quad (46)$$

式(24)および式(46)から式(47)が得られる。式(47)が成立するとき単一誤りであり，誤りの大きさはAである。式(27)に式(46)を代入すると式(48)が得られ，誤りロケーション数が求まる。

$$A \neq 0, AB^2 + 2C = 0 \quad (47)$$

$$x + 2AB = 0 \quad (48)$$

(2-3) 同レベル2重誤りの検出

$$A = e_i + e_j = 2e \neq 0 \quad (49)$$

式(28)および式(49)から式(50)が得られる。式(50)が成立するとき同レベル2重誤りであり，誤りの大きさは2Aである。式(31)に式(49)を代入すると式(51)が得られ，誤りロケーション数が求

まる。

$$(B^2 + AC)^2 + C^2 + AD = 0 \quad (50)$$

$$x^2 + ABx + 2AC + 2B^2 = 0 \quad (51)$$

(2-4) 異レベル 2 重誤りの検出

$$A = e_i + e_j = 0 \quad (52)$$

式 (32) および式 (52) から式 (53) が得られる。式 (53) が成立するとき異レベル 2 重誤りであり、式 (34) および式 (35) から誤りの大きさおよび誤りロケーション数が求まる。

$$C(B^4 + C^2) + B^2 D = 0 \quad (53)$$

(2-5) 同レベル 3 重誤りの検出

(2-1) ~ (2-4) 以外のとき 3 重誤りである。

$$A = e_i + e_j + e_k = 3e = 0 \quad (54)$$

式 (37) が成立するとき $e=1$ 式 (38) が成立するとき $e=2$ である。式 (39) および式 (40) から誤りロケーション数が求まる。

(2-6) 異レベル 3 重誤りの検出

(2-1) ~ (2-4) 以外のとき 3 重誤りである。 (2-1) ~

(2-6) の誤りの条件には、誤りなし、単一誤り、2 重誤り、3 重誤りの優先順位がある。

$$A = e_i + e_j + 2e_k = e \neq 0 \quad (55)$$

式 (43) および式 (44) に式 (55) を代入すると次式が得られる。式 (56) が成立するとき $e_k = 2A$ 、式 (57) が成立するとき $e_i = e_j = A$ であ

る。式(56)および式(57)から誤りロケーション数が求まる。

$$((B^2 + AC)^2 + C^2 + AD)x + A(B(B^4 + C^2) + E) = 0 \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} &((B^2 + AC)^2 + C^2 + AD)(x + AB)^2 + A(B(B^4 + C^2) + E)x \\ &+ ADB^2 + 2BE + CD + 2AC^3 = 0 \end{aligned} \right\} (57)$$

5. 検討

ここでは、3重誤り訂正3値BCH符号のうち、3値BCH(26, 14)符号(以下、(26, 14)符号と略記)と3値BCH(26, 13)符号と略記)の符号回路および復号回路について簡単な比較検討を行う。まず、符号回路では式(8)および式(13)あるいは図1および図2から、(26, 13)符号の方が(26, 14)符号より、3値レジスタおよび加算器がそれぞれ1個多いのが分る。復号回路のシンドローム計算回路では、式(17)および式(45)から分るように、(26, 13)符号の方が(26, 14)符号と比べて、A計算回路が余分に必要である。しかし、誤りパターン検出回路ではAから誤りの大きさがすぐに求まるので、(26, 13)符号の方が(26, 14)符号より簡単になる場合が多い。具体的には、 $A \neq 0$ のときであり、(26, 13)符号では、単一誤りの検出において式(26)を省略できる。同レベル2重誤り検出においては、式(29)は式(50)のように簡単になり、式(30)は省略出来る。異レベル3重誤り検出においては、式(42)を省略できる。また、 $A = 0$ のときでも、異レベル2重誤り検出においては、

式(42)を省略できる。また、 $A=0$ のときでも、異レベル2重誤り検出においては、式(33)が式(53)のように簡単になる。ただし、各検出式は、出来る限り簡単な式を用いたが、最簡形でないかも知れないので、更に検討する必要がある。実現回路上では、(26, 13)符号の復号回路は(26, 14)符号の復号回路の約半分のハード量になる。以上のことから、情報点数が1個少なくなることを許すならば、ハード量の少ない(26, 13)符号の方が実用的と考えられる。なお、誤りパターン検出回路のROM化を行えば、情報点数の多い(26, 14)符号の方が実用的となる。

6. むすび

本論文では、直列信号を扱った3値BCH符号のうち、ランダム3重誤り訂正可能な符号の例として、(26, 14)符号および(26, 13)符号を取り上げ、これらの符号および復号回路の構成について述べた。これらは、いずれも良好な実験結果を得ており、十分実用可能である。実現回路のハード量から言うと、(26, 13)符号の方が(26, 14)符号よりも有利に考えられる。また、これらのBCH符号は当然4値以上の多値に拡張可能である。現在、並列信号を扱った3値BCH符号の符号および復号回路⁽²⁰⁾⁽²¹⁾、更に符号の効率(k/n)を上げる3値Reed-solomon符号およびROM化による誤りパター

ン検出回路の簡単化⁽²²⁾を検討中である。

文 献

- (1) 三根, 長谷川, 島田: “三進四則演算方式”, 信学論 (C), 54-C, 1, pp.66-73 (昭46-01).
- (2) 三根, 長谷川, 島田: “三進算術演算装置”, 情報処理, 12, 9, pp.528-533 (昭46-09).
- (3) 樋口, 小林: “3値しきいゲートに基づくデジタルフィルタの構成”, 信学論 (D), J62-D, 2, pp.49-52 (昭54-02).
- (4) 村中, 今西: “絶対値表示による3値加減乗除算回路”, 多値論理研究ノート, 第5巻, No.4, pp.5.1-5.10, (昭61-01).
- (5) 川人, 亀山, 樋口: “VLSI向き4値 Signed-Digit 数多値演算回路の構成”, 信学論 (D), J69-D, 5, pp.679-686 (昭61-05).
- (6) 村中, 今西: “SD表現による3値加減乗算回路”, 多値論理研究ノート, 第7巻, No.7, pp.7.1-7.10, (昭62-01).
- (7) 村中, 今西: “SD表現による3値除算回路”, 多値論理研究ノート, 第8巻, No.6, pp.6.1-6.10, (昭62-07).
- (8) 村中, 今西: “絶対値表示による3値加減乗除算回路の構成”, 信学論 (D), J70-D, 12, pp.2374-2383 (昭62-12).
- (9) 村中, 今西: “3値ハミング符号の符号及び復号回路”, 情報理論とその応用研究会, 第7回シンポジウム, pp.126-131 (昭59-11).
- (10) 鷹野, 中谷, 村中, 今西: “3値ハミング符号の符号及び復号回路の構成”, 昭60関西連大, G8-24.
- (11) 村中, 今西: “3値巡回ハミング符号の符号及び復号回路”, 多値論理研究ノート, 第2巻, No.4, pp.4.1-4.10, (昭59-06).
- (12) 村中, 今西: “3値BCH符号の符号及び復号回路”, 信学技報, FTS85-4, Vol.85, No.43, pp.23-30 (昭60-05).
- (13) 中谷, 鷹野, 村中, 今西: “3値BCH符号の符号回路II”, 昭60関西連大, G8-25.
- (14) 西川, 世古, 村中, 今西: “3値BCH符号の復号回路”, 昭61関西連大, G8-1.
- (15) 森, 八木, 村中, 今西: “3値BCH符号の復号回路III”, 昭62関西連大, G8-17.
- (16) W.W. Peterson and E.J. Weldon: “Error Correctin Codes”, 2nd Edition, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1972.
- (17) 宮川, 岩垂, 今井: “符号理論”, 昭晃堂, 1973.
- (18) 村中, 今西: “CMOS-ICを用いた3値論理回路”, 信学論 (D), J65-D, 12, pp.1513-1519 (昭57-12).
- (19) 村中, 今西: “3値3安定フリップフロップ回路の構成”, 信学論 (D), J67-D, 3, pp.241-248. (昭59-03).
- (20) 世古, 西川, 村中, 今西: “3値BCH符号の並列符号及び復号回路”, 昭61関西連大, G8-2.
- (21) 八木, 森, 村中, 今西: “3値BCH符号の並列符号及び復号回路II”, 昭62関西連大, G8-16.
- (22) 松井, 南野, 村中, 今西: “3値REED-SOLOMON符号及び復号回路II”, 昭63関西連大, G8-3.