

M - A N D, M - O R, N O T 演算を用いた多値論理関数の 簡単化に関する一考察

山口大学工学部 長尾敬之 (Takayuki Nagao)

高浪五男 (Itsuo Takanami)

井上克司 (Katushi Inoue)

1. はじめに

論理レベルを多値化することによって IC ピン数や配線数の減少、動作の高速化、特に直列伝送の高速化、等が期待できる。しかし、二値論理の場合のような統一的な論理系が確立されていないことなどが実用化に際しての問題点となっている。

本報告では、Lukasiewiczにより示された演算（文献（1）に従い、M-AND, M-OR, NOT演算と呼ぶ）を基本演算とする多値論理関数の簡単化の一手法を提案する。本方法は、文献（1）（2）に示された標準形およびCube表現を用いて簡単化を行うものであるが、文献（2）に示された方法に比較して特殊な場合を除き、更に簡単化することが出来る。

2. 準備

$L = \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$, p 値 変数 $x_i, x_j \in L$ ($1 \leq i, j \leq n$) とし、 p 値 n 変数 論理 関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を $L^n \rightarrow L$ と 定義 す る。

【定義 1】 p 値 変数 $x_i, x_j \in L$ に 対して M-AND 演 算 $x_i \cdot x_j$ を 以 下 の 様 に 定義 す る。

$$x_i \cdot x_j = \begin{cases} 0 & ; x_i + x_j \leq p-1 \\ x_i + x_j - (p-1) & ; x_i + x_j > p-1 \end{cases} \quad (1)$$

【定義 2】 p 値 変数 $x_i, x_j \in L$ に 対して M-OR 演 算 $x_i \vee x_j$ を 以 下 の 様 に 定義 す る。

$$x_i \vee x_j = \begin{cases} p-1 & ; x_i + x_j \geq p-1 \\ x_i + x_j & ; x_i + x_j < p-1 \end{cases} \quad (2)$$

【定義 3】 p 値 変数 $x_i \in L$ に 対して NOT 演算 \bar{x}_i を 以 下 の 様 に 定義 す る。

$$\bar{x}_i = (p-1) - x_i \quad (3)$$

た だ し、 $+$, $-$ は、通常の 算術 演算を 表す。

上記の M-AND, M-OR, NOT 演算 は、交換律、結合律、相補律 ベキ等律、ド・モルガンの法則を満足する。

また、 $a : x_i$ の m 次の M-OR の 意味での 和

$$\overbrace{(a_i x_i) \vee (a_i x_i) \vee \cdots \vee (a_i x_i)}^{m_i}$$

を $(a_i x_i)^m$ であらわす。定義 1, 2 より $(px)_{p-1} = p-1$ である。

3. p 値論理関数の標準形

文献 (1)、(2) より、p 値論理関数の標準形は、次式の様になる。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum f(\alpha) \prod ((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{x}_i)_{p-1} \quad (4)$$

ただし、 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in L^n$ 、 $1 \leq i \leq n$ であり、 \sum はすべての α についての M-OR の意味での総和を、 \prod は M-AND の意味での乗積を表す。

また、 $a_i \leq a_{i+1}$ とすると

$$((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_{i+1}+1)\bar{x}_i)_{p-1} = \begin{cases} p-1 & ; a_i \leq x_i \leq a_{i+1} \\ 0 & ; \text{それ以外のとき} \end{cases} \quad (5)$$

が成り立つ。式 (5) は $a_i = a_{i+1}$ のとき、式 (4) の積項に一致する。

4. Cube 表現

簡単化を行う際、関数を効率的に表現する方法として、文献 (2) に示されているような Cube 表現を用いる。Cube 表現は積項

$$\prod ((p-a_i)x_i)^{a_i} \dots ((a_{i-1}+1)x_i)^{a_{i-1}} \quad (6)$$

に 1 対 1 に対応しており、次のように定義される。

【定義 4】 関数値 k ($1 \leq k \leq p-1$) を持つ項の積項

$$\prod ((p-a_i)x_i)^{a_i} \dots ((a_{i-1}+1)x_i)^{a_{i-1}}$$

に対して Cube \mathbb{C}_k は

$$\mathbb{C}_k = \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_2 \dots \mathbb{C}_i \dots \mathbb{C}_n \quad (1 \leq i \leq n)$$

\mathbb{C}_i を座標 i のベクトルと呼ぶ。

ここで

$$\mathbb{C}_i = (c_{i,0}, c_{i,1}, \dots, c_{i,a_i}, \dots, c_{i,p-1}) \quad (0 \leq j \leq p-1)$$

であり、 $c_{i,j}$ は、 $a_i \leq j \leq a_{i+1}$ のとき 1 を、それ以外のとき 0 をとる。

次に、Cube 間で 次のような OR 演算、成分間の算術的和を定義する。

【定義 5】 Cube 間の OR 演算 $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$ 、成分間の算術和 $\mathbb{C}^+ + \mathbb{C}^-$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^- &= \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_2 \dots \mathbb{C}_n \cup \mathbb{C}_1' \mathbb{C}_2' \dots \mathbb{C}_n' \\ &= (\mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_1') \dots (\mathbb{C}_i \cup \mathbb{C}_i') \dots (\mathbb{C}_n \cup \mathbb{C}_n') \end{aligned}$$

ただし、

$$\mathbb{C}_i \cup \mathbb{C}_i' = (\max(c_{i,0}, c_{i,0'}), \max(c_{i,1}, c_{i,1'}), \dots, \max(c_{i,p-1}, c_{i,p-1'}))$$

とする。

$$\begin{aligned} C_1 + C_1' &= C_1 C_2 \cdots C_n \cdots C_1' C_2' \cdots C_n' \\ &= (C_1 + C_1') \cdots (C_1 + C_1') \cdots (C_n + C_n') \end{aligned}$$

ただし、+は通常の算術的な加算を意味する。

[例 1] Fig. 1に示す真理値表により与えられた4

値2変数関数の場合、1の値を持つセルに対応するCube表現は、

(1000)(0010)、2の値を持つセルに対応するCube表現は (01

00)(0100)、3の値を持つセルに対応するCube表現は (0010)

(0100)となる。また、2の値を持つセルに対応するCubeと 3

の値を持つセルに対応するCubeとのOR演算は、(0110)(0100)

となり、算術和は(0110)(0200)となる。

5. 簡単化の方法

本方法では、式(4)の標準形の各積項をCubeによって表現し、Cube間の隣接関係を調べることによって簡単化を行う。

隣接関係は、Cube間のOR演算、算術和を求め、その結果によって判断する。具体的には、以下ののような条件を満たす場合に、2つのCube(即ちそれらのCubeによって表現される項)は隣接しているという。

条件 1： 2つの Cube 間の OR 演算によって得られた Cube の座標 i のベクトル \mathbb{C}_i の成分に … 10…01… のような配列が存在しないこと。

条件 2： $\mathbb{C}_{i+1} + \mathbb{C}_{i+1}' \in [0, 1]^p$ を満たす $i (1 \leq i \leq n)$ が唯一一つ存在し、 $\mathbb{C}_{j+1} + \mathbb{C}_{j+1}' \in [0, 2]^p (1 \leq j \leq n, i \neq j)$ が成立すること。以下に例を示す。

[例 2] Fig. 1 に示した関数の場合、

$$\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2' = (1100)(0110)$$

$$\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_3' = (1100)(0110)$$

従って、条件 2 を満たさないため 1 の項と 2 の項は、隣接していない。また、

$$\mathbb{C}_2 + \mathbb{C}_3' = (0110)(0100)$$

$$\mathbb{C}_2 + \mathbb{C}_3' = (0110)(0200)$$

上記の条件 1, 2 を満たすため 2 の項と 3 の項は、隣接している。

式 (4) の標準形の積項 $\prod ((p-a_i)x_i)^{p-1}((a_i+1)\bar{x}_i)^{p-1}$ は式 (5) より、 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in L^n$ によって示されるセルが 0 以外の値を持っている場合に $p-1$ となり、そのセルの示す値が 0 のときには、0 となる。従って、式 (4) に示す標準形は、 α によって示されたセルが 0 以外の値を示すときには

$$\sum f(\alpha) \prod ((p-a_i)a_i)^{p-1}((a_i+1)\bar{a}_i)^{p-1}$$

$$= 0 \vee 0 \vee \dots \vee f(\alpha) \prod ((p-a_i)x_i)^{p-1}((a_i+1)\bar{x}_i)^{p-1} \vee$$

$\cdots \vee 0$

$$= f(\alpha) \prod ((p-a_i)a_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{a}_i)_{p-1} \quad (7)$$

$$= f(\alpha)$$

ここで、 $f(\alpha) = p-1$ のときには 式(7)は M-ORの定義より

$$(p-1) \prod ((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{x}_i)_{p-1}$$

$$= 1 \prod ((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{x}_i)_{p-1}$$

$$\vee (p-2) \prod ((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{x}_i)_{p-1}$$

$$= 1 \prod ((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{x}_i)_{p-1}$$

$$\vee 1 \prod ((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{x}_i)_{p-1} \vee \cdots$$

$$\vee 1 \prod ((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{x}_i)_{p-1} \quad (8)$$

と書き換えることが出来る。

また、M-ANDの定義より $(p-1)x = x$ となるので積項のなかの $(p-a_i)$ や (a_i+1) が $p-1$ となるときには 定数 $p-1$ を除去することができる。従って、論理関数の表現に使用する定数を減らすことができ、実際に論理回路を設計する際、論理ゲートへの定数入力も減少させることができるので、配線数の減少を図ることができる。

例えば、 $a_i = 1$ のとき、

$$((p-a_i)x_i)_{p-1} ((a_i+1)\bar{x}_i)_{p-1} = ((p-1)x_i)_{p-1} ((2\bar{x}_i)_{p-1}$$

$$= (x_i)_{p-1} (2\bar{x}_i)_{p-1}$$

となる。この場合、得られた結果は、元の積項に比較して

定数 $p-1$ が省略できていることがわかる。

更に、式(8)より、重複する同じ形の Cube が n 個存在する場合、それらをまとめて $n \times$ (対応する積項)と表現することによって論理関数中の積項の個数を減少させることができる。Fig.1 の関数の 2 のセルは、Cube 表現では $(0100)(0100), (0100)(0100)$ と 2 つの Cube で表現されるが積項によって表現する場合 本方法では、

$$\begin{aligned} & 2(3x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\ & = 2(x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \end{aligned}$$

と、表現され、文献(2)の表現

$$\begin{aligned} & (x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\ & \vee (x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \end{aligned}$$

より、積項の個数を減少させることが出来る。

以上のことから、標準形で与えられた論理関数の積項の個数の減少、定数の減少を行い、簡単化された関数を得る。

次に、具体的な手順を示す。

1st stage: 与えられた p 値論理関数を式(4)に従って展開する。

2nd stage: 1st stage で得られた標準形の各項のうち $f(\alpha) = p-1$ となる項を式(8)に従って展開する。

3rd stage: 各積項を定義4に従って Cube表現する。 $r=1$ とする。

4th stage: Cubeを $f(\alpha) < p-2$ の Cubeと $f(\alpha) = p-2$ の Cubeを区別して縦に並べて書き、第 r 列とする。

5th stage: 第 r 列の $f(\alpha) < p-2$ の Cube同志と $f(\alpha) = p-2$ の Cube同志でそれぞれ隣接関係を調べる。隣接する Cubeが存在しない場合は、7th stageへ行く。隣接する Cubeが存在するときには OR 演算によって得られた Cubeを第 $(r+1)$ 列として $f(\alpha) < p-2$ の Cubeと $f(\alpha) = p-2$ の Cubeを区別して縦に並べて書く。

このとき第 r 列の 2つの Cubeにマークをしておく。以上の操作を隣接する Cubeが存在しなくなるまで行う。

6th stage: $r \leftarrow r+1$ とし、4th stageへ行く。

7th stage: マークされていない Cubeを式(6)に従って積項に展開する。

8th stage: 7th stageで得られた積項を式(4)に従って展開する。このとき、式(4)の $f(\alpha)$ の値は、 $f(\alpha) = p-2$ の場合には、 $p-2$ となり、それ以外の場合には、同一の Cubeの個数となる。ここで、同一の Cubeとは、それぞれの Cubeの座標 i のベクトルの成分の 0, 1 の配列のパターンが等しいものをいう。

□

以上の処理を行うことによって論理関数の簡単化を行うことが出来る。

6. 例題

Fig. 2に示すような4値2変数論理関数 $f(x_1, x_2)$ について考える。

$$\begin{aligned} \text{1st stage} \text{より: } f(x_1, x_2) = & 1(2x_1)_3(3\bar{x}_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\ & \vee 2(4x_1)_3(1\bar{x}_1)_3(2x_2)_3(3\bar{x}_2)_3 \\ & \vee 2(3x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(2x_2)_3(3\bar{x}_2)_3 \\ & \vee 3(3x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2st stage} \text{より: } f(x_1, x_2) = & 1(2x_1)_3(3\bar{x}_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\ & \vee 2(4x_1)_3(1\bar{x}_1)_3(2x_2)_3(3\bar{x}_2)_3 \\ & \vee 2(3x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(2x_2)_3(3\bar{x}_2)_3 \\ & \vee 1(3x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\ & \vee 2(3x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \end{aligned}$$

3rd, 4th stageより: 各項のCube表現は、Tab. 1の第1列のようになる。

4th, 6th stageより: 第1列の(0010)(0100)と(0100)(0100)、(1000)(0010)と(0100)(0010)は それぞれ隣接しているため Cube間のOR演算の結果を第2列に書く。第2列には隣接するCubeは存在しない。

$$\begin{aligned}
 & \text{7th, 8th stage より: } f(x_1, x_2) = 1(3x_1)_3(3\bar{x}_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\
 & \quad \vee 2(4x_1)_3(2x_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\
 & \quad \vee 2(3x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(3x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\
 & = 1(x_1)_3(\bar{x}_1)_3(x_2)_3(2\bar{x}_2)_3 \\
 & \quad \vee 2(2\bar{x}_1)_3(x_2)_3(2x_2)_3 \\
 & \quad \vee 2(x_1)_3(2\bar{x}_1)_3(x_2)_3(2\bar{x}_2)_3
 \end{aligned}$$

□

この例の場合、標準形に比べて、項の数も減少し、また式中の定数も、標準形が1, 2, 3, 4を使用するのに対して、1と2だけと減少している。従って、明らかに簡単化されている。

7. むすび

本報告では Lukasiewicz の示した論理和、論理積、否定演算を基本演算とする p 値論理関数の簡単化の 1 手法について示した。本方法は、文献 (2) に示されている方法に比較しても明らかに、より簡単化を行うことが出来る。また、論理関数のなかで使用する定数が減少しているということは、実際の配線の際に有利であろうと思われる。

しかし、簡単化の際、Cube の並べ方によって結果が異なることが考えられるため簡単化に最も効果的な隣接項を探す方法

などが望まれる。また、減少させることができる定数の数が p の値に関係なく一定であるため、 p が大きくなると、あまり大きなメリットとはならないことなども今後の課題である。

参考文献

- (1) 藤田、佐藤、小高 "M-AND, M-OR, 及び NOT 演算による p 値論理関数の標準形" 信学論(D) J67-D No.10, pp.1266-1267
- (2) 藤田、佐藤、小高 " p 値論理関数の一簡化" 信学論(D) J69-D No.3 pp.477-479

x_2	0	1	2	3
x_1	0	1	2	3
0	0	0	1	0
1	0	2	0	0
2	0	3	0	0
3	0	0	0	0

Fig.1 4 値 2 变数論理
関数の例

x_2	0	1	2	3
x_1	0	1	2	3
0	0	0	2	0
1	0	3	2	0
2	0	1	0	0
3	0	0	0	0

Fig.2 4 値 2 变数論理
関数の例

Tab.1 Fig.2 の関数の Cube 表現と Cube の数の減少

	第 1 列	第 2 列
$f(\alpha)=1$	* (0010)(0100)	(0110)(0100)
	* (0100)(0100)	
$f(\alpha)=2$	* (1000)(0010)	(1100)(0010)
	* (0100)(0010)	
	(0100)(0100)	