数理解析研究所講究録
688巻 1989年 77-97

最小指数とエントロピー

北大応電研　日合文雄　(Fumio Hiai)

Jones[10] は coupling constant と Umegaki の条件付期待値 [19] を使って II_1 factor とその subfactor の間の指数理論を構築した. Pimsner-Popa[16] は Connes-Størmer[5] が導入したエントロピーを II_1 factor-subfactor に対して計算し, エントロピーと Jones 指数との関係を確立した. 他方 Kosaki[11] は Connes の spatial 理論[3] と Haagerup の operator valued weight の理論 [6] をベースに, Jones 指数を一般の factor から subfactor への条件付期待値の指数(Kosaki 指数)に拡張した. 筆者[7]は factor-subfactor が与えられたとき, その間の条件付期待値の Kosaki 指数の最小化を考え, 最小指数であるための特徴づけを与えた.

以下, §1では [7] の結果を紹介し, §2では最小指数の基本性質を調べる. §3では, Pimsner-Popa の与えたエントロピーと Jones 指数の関係式を念頭において, 一般の v.N. 代数とその部分代数に対してエントロピーの新しい定義を導入する. §4では指数有限の factor-subfactor の場合に最小指数とエントロピーとの関係を明らかにする. §2の結果は完全な証明を付けたが, §§3, 4は証明を省略した(詳細は[8]).

§1. 最小指数の特徴づけ

以下, v.N. 代数はすべてσ-finite とする. M を factor, N を

M の subfactor とし，M から N への条件付期待値の全体を $\mathcal{E}(M,N)$ で表す．$E \in \mathcal{E}(M,N)$ の Kosaki 指数は $\mathrm{Index}\ E = E^{-1}(1)$ で定義される．ここに E^{-1} は N' から M' への operator valued weight であり，spatial derivative に関する等式

$$\frac{d\varphi \cdot E}{d\phi} = \frac{d\varphi}{d\phi \cdot E^{-1}}$$

で定まる．ただし φ, ϕ はそれぞれ N, M' 上の忠実正規な semi-finite weights（E^{-1} は φ, ϕ の取り方に依らない）．

まず簡単な事実として，

(1) $E \in \mathcal{E}(M,N)$ が $\mathrm{Index}\ E < 4$ ならば，$N' \cap M = \mathbb{C}$ であり，$\mathcal{E}(M,N) = \{E\}$．

(2) $E \in \mathcal{E}(M,N)$ が $\mathrm{Index}\ E < \infty$ ならば，$N' \cap M$ は有限次元であり，すべての $F \in \mathcal{E}(M,N)$ に対して $\mathrm{Index}\ F < \infty$．

(2) より，$\mathrm{Index}\ E < \infty$, $\forall E \in \mathcal{E}(M,N)$, または $\mathrm{Index}\ E = \infty$, $\forall E \in \mathcal{E}(M,N)$.

定理 1.1.[7] ある $E \in \mathcal{E}(M,N)$ で $\mathrm{Index}\ E < \infty$ のとき，唯一つの $E_0 \in \mathcal{E}(M,N)$ が存在して，

$$\mathrm{Index}\ E_0 = \min\{\mathrm{Index}\ E : E \in \mathcal{E}(M,N)\}.$$

さらに，$E \in \mathcal{E}(M,N)$ に対して次は同値：

(i) $E = E_0$,

(ii) $E|N' \cap M$, $E^{-1}|N' \cap M$ がトレースであり，$E^{-1}|N' \cap M = (\mathrm{Index}\ E)E|N' \cap M$,

(iii) $E^{-1}|N' \cap M = (\mathrm{Index}\ E)E|N' \cap M$,

(iv) $E|N'\cap M$ がトレースであり，$N'\cap M$ の minimal central projections $q_1,\cdots,q_m$ $(\Sigma q_i=1)$ に対し

$$E(q_i)=(\mathrm{Index}\,E_{q_i}/\mathrm{Index}\,E)^{1/2},\quad 1\leqq i\leqq m.$$

ここに $N'\cap M$ の projection p に対し，$E_p\in\mathcal{E}(pMp,Np)$ は $E_p(x)=E(p)^{-1}E(x)p$ で定まる.

上の条件 (iv) は [7] に明示されてないが，証明からすぐにわかる. Longo[12] もこの条件で最小指数を特徴づけている.

定理1.1 で $N'\cap M\neq\mathbb{C}$ ならば，Index E, $E\in\mathcal{E}(M,N)$, は $[\mathrm{Index}\,E_0,\infty)$ のすべての値を取る.

§2. 最小指数の基本性質

任意の factor-subfactor $M\supseteq N$ に対して，最小指数 $[M:N]_0$ を

$$[M:N]_0=\min\{\mathrm{Index}\,E:\,E\in\mathcal{E}(M,N)\}$$

で定める. ただし，$\mathcal{E}(M,N)=\emptyset$ または Index $E=\infty$ $(E\in\mathcal{E}(M,N))$ のときは $[M:N]_0=\infty$ とする.

この節では，v.N. 代数はすべて factor とする.

命題2.1. $[M:N]_0=[N':M']_0$.

証明. $[M:N]_0=\mathrm{Index}\,E_0<\infty$ とすると，$E_0'=(\mathrm{Index}\,E_0)^{-1}E_0^{-1}\in\mathcal{E}(N',M')$ かつ $\mathrm{Index}\,E_0'=\mathrm{Index}\,E_0$ であるから，$[N':M']_0\leqq[M:N]_0$. 同じ議論で逆も成立. □

命題2.2. $M \supseteq M_1 \supseteq N_1 \supseteq N$ のとき，$[M_1:N_1]_0 \leqq [M:N]_0$.

証明. $M \supseteq L \supseteq N$ に対し，次の (1), (2) を示せばよい：

(1) $[L:N]_0 \leqq [M:N]_0$,

(2) $[M:L]_0 \leqq [M:N]_0$.

$[M:N]_0 = \mathrm{Index}\, E_0 < \infty$ のとき，$E_0 | L \in \mathcal{E}(L,N)$ であり，次の補題2.3 より $\mathrm{Index}(E_0 | L) \leqq \mathrm{Index}\, E_0$. よって (1) が成立．$N' \supseteq L' \supseteq M'$ に (1) と命題2.1 を用いれば，(2) も成立． □

補題2.3. $M \supseteq L \supseteq N$, $E \in \mathcal{E}(M,N)$ のとき，$\mathrm{Index}(E | L) \leqq \mathrm{Index}\, E$.

証明. $\mathrm{Index}\, E < \infty$ として，M の standard 表現を取れば，N, N' 上にそれぞれ忠実正規な states φ, ϕ が存在する．$\phi_1 = \phi | M'$, $\phi_2 = \phi | L'$ とおく．[3] の記号を用いて，$M' \subseteq L'$ より $\mathcal{H}_{\phi_1} \subseteq \mathcal{H}_{\phi_2}$ かつ $D(\mathcal{H}, \phi_1) \supseteq D(\mathcal{H}, \phi_2)$. $\xi \in D(\mathcal{H}, \phi_2)$ に対して，$R^{\phi_1}(\xi) = R^{\phi_2}(\xi) | \mathcal{H}_{\phi_1}$ より $\theta^{\phi_1}(\xi, \xi) \leqq \theta^{\phi_2}(\xi, \xi)$ となり，

$$\varphi \cdot E(\theta^{\phi_1}(\xi, \xi)) \leqq \varphi \cdot E(\theta^{\phi_2}(\xi, \xi)).$$

よって positive quadratic forms

$$q_i(\xi) = \varphi \cdot E(\theta^{\phi_i}(\xi, \xi)), \quad \xi \in D(\mathcal{H}, \phi_i), \quad i = 1, 2,$$

の閉包について，$D(\overline{q_1}) \supseteq D(\overline{q_2})$ かつ $\overline{q_1}(\xi) \leqq \overline{q_2}(\xi)$, $\forall \xi \in D(\overline{q_2})$. つまり $d\varphi \cdot E / d\phi_1 \leqq d\varphi \cdot (E | L) / d\phi_2$. 従って

$$\frac{d\varphi}{d\phi_1\ E^{-1}} = \frac{d\varphi \cdot E}{d\phi_1} \leqq \frac{d\varphi \cdot (E | L)}{d\phi_2} = \frac{d\varphi}{d\phi_2 \cdot (E | L)^{-1}}$$

となり $\phi_1 \cdot E^{-1} \geqq \phi_2 \cdot (E \mid L)^{-1}$. 故に $E^{-1}(1) \geqq (E \mid L)^{-1}(1)$. □

実は，補題2.3は幸崎氏により証明されている次の結果(Pimsner-Popa 不等式)から明らか：M が有限次元でなければ，任意の $E \in \mathcal{E}(M, N)$ に対して

$$(\mathrm{Index}\ E)^{-1} = \max\{\lambda \geqq 0 : E(x) \geqq \lambda x,\ \forall x \in M_+\}.$$

M が II_1 factor の場合，これは [16] で証明された．M が有限次元でも $E - \lambda\,\mathrm{id}$ が完全正値という条件に置き換えれば，同じ式が成立．しかし，上の結果の証明で "右辺 $>0 \Rightarrow \mathrm{Index}\ E < \infty$" が非常に難しいということなので，補題2.3の直接の証明を与えた．

定理2.4. $M_i \supseteq N_i$ $(i = 1, 2)$ のとき，

$$[M_1 \otimes M_2 : N_1 \otimes N_2]_0 = [M_1 : N_1]_0 [M_2 : N_2]_0.$$

証明．まず，$\mathcal{E}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{E}(M_i, N_i) \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ はすぐにわかる．次に $E \in \mathcal{E}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$, $\mathrm{Index}\ E < \infty$ とすると，$(\mathrm{Index}\ E)^{-1} E^{-1} \in \mathcal{E}(N_1' \otimes N_2', M_1' \otimes M_2')$ より $\mathcal{E}(N_i', M_i') \neq \emptyset$. また $(N_1 \otimes N_2)' \cap (M_1 \otimes M_2) = (N_1' \cap M_1) \otimes (N_2' \cap M_2)$ が有限次元だから，$N_i' \cap M_i$ が有限次元．よって $F_i \in \mathcal{E}(M_i, N_i)$ に対し $\mathrm{Index}\ F_i < \infty$ $(i = 1, 2)$. 従って $[M_1 \otimes M_2 : N_1 \otimes N_2]_0 < \infty \Rightarrow [M_i : N_i]_0 < \infty$ $(i = 1, 2)$ がいえた．最後に $[M_i : N_i]_0 = \mathrm{Index}\ E_i < \infty$ $(i = 1, 2)$ とすると，次の補題2.5より $(E_1 \otimes E_2)^{-1} = E_1^{-1} \otimes E_2^{-1}$ であるから，

$$(E_1 \otimes E_2)^{-1} \mid (N_1 \otimes N_2)' \cap (M_1 \otimes M_2)$$

$$= (\mathrm{Index}\ E_1)(\mathrm{Index}\ E_2) E_1 \otimes E_2 \mid (N_1 \otimes N_2)' \cap (M_1 \otimes M_2).$$

故に定理1.1より，$[M_1 \otimes M_2 : N_1 \otimes N_2]_0 = (\mathrm{Index}\ E_1)(\mathrm{Index}\ E_2)$. □

補題2.5. $E_i \in \mathcal{E}(M_i, N_i)$ $(i = 1, 2)$ に対して，$(E_1 \otimes E_2)^{-1} = E_1^{-1} \otimes E_2^{-1}$. よって $\mathrm{Index}(E_1 \otimes E_2) = (\mathrm{Index}\ E_1)(\mathrm{Index}\ E_2)$.

証明. これは spatial derivative に関する等式

$$\frac{d(\varphi_1 \otimes \varphi_2)}{d(\phi_1 \otimes \phi_2)} = \frac{d\varphi_1}{d\phi_1} \otimes \frac{d\varphi_2}{d\phi_2}$$

の直接の系である. しかし補題だけなら，以下に述べる証明（幸崎氏による）が簡単である.

φ_i, ϕ_i をそれぞれ N_i, M_i' 上の忠実正規な semifinite weights とすると，$\sigma_t^{\varphi_1 \cdot E_1 \otimes \varphi_2 \cdot E_2} = \sigma_t^{\varphi_1 \cdot E_1} \otimes \sigma_t^{\varphi_2 \cdot E_2}$, $\sigma_t^{\phi_1 \otimes \phi_2} = \sigma_t^{\phi_1} \otimes \sigma_t^{\phi_2}$ より，$\mathrm{Ad}\left(\frac{d\varphi_1 \cdot E_1}{d\phi_1} \otimes \frac{d\varphi_2 \cdot E_2}{d\phi_2}\right)^{it}$ および $\mathrm{Ad}\left(\frac{d(\varphi_1 \cdot E_1 \otimes \varphi_2 \cdot E_2)}{d(\phi_1 \otimes \phi_2)}\right)^{it}$ は $M_1 \otimes M_2$ および $M_1' \otimes M_2'$ 上に同じ action を引き起す[3]. M_i が factor だから

$$\frac{d(\varphi_1 \cdot E_1 \otimes \varphi_2 \cdot E_2)}{d(\phi_1 \otimes \phi_2)} = \alpha \frac{d\varphi_1 \cdot E_1}{d\phi_1} \otimes \frac{d\varphi_2 \cdot E_2}{d\phi_2} \qquad (\alpha > 0)$$

同様に

$$\frac{d\varphi_1}{d\phi_1 \cdot E_1^{-1}} \otimes \frac{d\varphi_2}{d\phi_2 \cdot E_2^{-1}} = \beta \frac{d(\varphi_1 \otimes \varphi_2)}{d(\phi_1 \cdot E_1^{-1} \otimes \phi_2 \cdot E_2^{-1})} \qquad (\beta > 0)$$

よって $(E_1 \otimes E_2)^{-1} = \gamma E_1^{-1} \otimes E_2^{-1}$ $(\gamma > 0)$. $e_{N_1 \otimes N_2} = e_{N_1} \otimes e_{N_2}$

に注意して，[11] より

$$1 = (E_1 \otimes E_2)^{-1}(e_{N_1 \otimes N_2}) = \gamma E_1^{-1}(e_{N_1}) \otimes E_2^{-1}(e_{N_2}) = \gamma .$$

故に $(E_1 \otimes E_2)^{-1} = E_1^{-1} \otimes E_2^{-1}$.（上の証明は Index $E_i < \infty$ または $=\infty$ にかかわらない．）□

定理2.5 は [12] にもある。

$M \supseteq L \supseteq N$ のとき，$[M:N]_0 \leqq [M:L]_0[L:N]_0$ は明らか.

命題2.6. $M \supseteq L \supseteq N$, $[M:N]_0 = \mathrm{Index}\ E_0 < \infty$ のとき，次は同値：

(i) $[M:N]_0 = [M:L]_0[L:N]_0$,

(ii) $\exists E \in \mathcal{E}(M,L)$ s.t. $E_0 = E_0 \cdot E$,

(iii) φ を N 上の忠実正規 state とすると，$\sigma^{\varphi \cdot E_0}(L) = L$, $\forall t \in \mathbb{R}$（この条件は φ の取り方に依らない）.

証明. (i)⇒(ii). 命題2.2 より $[M:L]_0 < \infty$, $[L:N]_0 < \infty$ であるから，$E \in \mathcal{E}(M,L)$, $F \in \mathcal{E}(L,N)$ が存在して Index $E = [M:L]_0$, Index $F = [L:N]_0$. $F \cdot E \in \mathcal{E}(M,N)$ かつ Index $F \cdot E = (\mathrm{Index}\ E)(\mathrm{Index}\ F) = [M:N]_0$. よって $E_0 = F \cdot E$. 従って $E_0 | L = F$ となり，$E_0 = E_0 \cdot E$.

(ii)⇒(i). $F = E_0 | L \in \mathcal{E}(L,N)$ とおくと,

$$\begin{aligned}[M:N]_0 &= \mathrm{Index}\ F \cdot E = (\mathrm{Index}\ E)(\mathrm{Index}\ F) \\ &\geqq [M:L]_0[L:N]_0.\end{aligned}$$

(ii)⇒(iii). $\varphi \cdot E_0 = \varphi \cdot E_0 \cdot E$ より $\sigma^{\varphi \cdot E_0}(L) = L$.

(iii)⇒(ii). $E\in\mathcal{E}(M,L)$ が存在して $\varphi\cdot E_\emptyset=\varphi\cdot E_\emptyset\cdot E$. よって $E_\emptyset=E_\emptyset\cdot E$. □

命題2.7. $M\supseteq L\supseteq N$, $N'\cap M=(N'\cap L)\vee(L'\cap M)$ のとき, $[M:N]_\emptyset=[M:L]_\emptyset[L:N]_\emptyset$.

証明. $[M:L]_\emptyset=\infty$ または $[L:N]_\emptyset=\infty$ ならば, 命題2.2より $[M:N]_\emptyset=\infty$. よって $[M:L]_\emptyset<\infty$, $[L:N]_\emptyset<\infty$ とすると, $E\in\mathcal{E}(M,L)$, $F\in\mathcal{E}(L,N)$ が存在して $\mathrm{Index}\ E=[M:L]_\emptyset$, $\mathrm{Index}\ F=[L:N]_\emptyset$. 任意の $x\in L'\cap M$, $y\in N'\cap L$ に対して

$$\begin{aligned}(F\cdot E)^{-1}(xy)&=E^{-1}\cdot F^{-1}(xy)\\&=E^{-1}(x)F^{-1}(y)\\&=(\mathrm{Index}\ E)(\mathrm{Index}\ F)E(x)F(y)\\&=(\mathrm{Index}\ E)(\mathrm{Index}\ F)F\cdot E(xy).\end{aligned}$$

従って $(F\cdot E)^{-1}|N'\cap M=(\mathrm{Index}\ E)(\mathrm{Index}\ F)F\cdot E|N'\cap M$ となり, 定理1.1より $[M:N]_\emptyset=\mathrm{Index}\ F\cdot E=[M:L]_\emptyset[L:N]_\emptyset$. □

定理2.4において, $M_1\otimes M_2\supseteq N_1\otimes M_2\supseteq N_1\otimes N_2$ は命題2.7の仮定を満す. よって命題2.7を使うと, 定理2.4の証明が少し簡単になる.

次の定理では, α を局所コンパクト群 G の $M(\supseteq N)$ 上の action とし, $\alpha_g(N)=N$, $\forall g\in G$, とする. ここに, $M\rtimes_\alpha G$ などが σ-finite であるようにするため, G は第2可算としておく（この仮定は本質的なものではない）.

定理 2.8. (1) Crossed products $M \rtimes_\alpha G$, $N \rtimes_\alpha G$ が factors のとき, $[M \rtimes_\alpha G : N \rtimes_\alpha G]_0 = [M:N]_0$.

(2) $\alpha \mid N$ が semi-dual とする ($\alpha \mid N$ が dominant ならそうである). Fixed point algebras M^α, N^α が factors ($\Leftrightarrow$ $M \rtimes_\alpha G$, $N \rtimes_\alpha G$ が factors) のとき, $[M^\alpha : N^\alpha]_0 = [M:N]_0$.

証明. (1) $\widetilde{M} = M \rtimes_\alpha G$, $\widetilde{N} = N \rtimes_\alpha G$ とおくと, [13] より

$\widetilde{M} = (M \otimes B(L^2(G)))^{\alpha \otimes Ad(\rho)}$, $\widetilde{N} = (N \otimes B(L^2(G)))^{\alpha \otimes Ad(\rho)}$.

$[M:N]_0 = \text{Index } E < \infty$ $(E \in \mathcal{E}(M,N))$ とすると, 任意の $g \in G$ に対して, $\alpha_g E \alpha_g^{-1} \in \mathcal{E}(M,N)$ かつ $\text{Index}(\alpha_g E \alpha_g^{-1}) = \text{Index } E$ (これは補題2.3 の下で述べた事実から明らかであるが, 直接に示すのも容易). 最小指数を与える E の一意性から, $\alpha_g E \alpha_g^{-1} = E, \forall g \in G$. つまり E と α は可換であるから, $E \otimes id$ は $\alpha \otimes Ad(\rho)$ と可換. よって $\widetilde{E} = E \otimes id_{B(L^2(G))} \mid \widetilde{M} \in \mathcal{E}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$ となり, 補題2.3 と補題2.5 より $\text{Index } \widetilde{E} \leq \text{Index}(E \otimes id) = \text{Index } E$. 従って $[\widetilde{M}:\widetilde{N}]_0 \leq [M:N]_0$.

次に, $\hat{\alpha}$ を α の dual co-action として(このとき $\hat{\alpha} \mid \widetilde{N}$ が $\alpha \mid N$ の dual co-action), $\approx{M} = \widetilde{M} \rtimes_{\hat{\alpha}} G$, $\approx{N} = \widetilde{N} \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ とおくと, [13] より

$$\overset{\approx}{M} \cong M \otimes B(L^2(G)), \quad \overset{\approx}{N} \cong N \otimes B(L^2(G)).$$

$[\widetilde{M}:\widetilde{N}]_0 = \text{Index } F < \infty$ $(F \in \mathcal{E}(\widetilde{M}, \widetilde{N}))$ とすると, $F_{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha} F \hat{\alpha}^{-1} \in \mathcal{E}(\hat{\alpha}(M), \hat{\alpha}(N))$ であり, 次の図式

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\tilde{M}} \arrow[d, "\tilde{F}"'] & \cong \tilde{M}^{\hat{\alpha}} \otimes B(L^2(G)) = & \hat{\alpha}(M) \otimes B(L^2(G)) \arrow[d, "F_{\hat{\alpha}} \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}"] \\
\tilde{\tilde{N}} & \cong \tilde{N}^{\hat{\alpha}} \otimes B(L^2(G)) = & \hat{\alpha}(N) \otimes B(L^2(G))
\end{tikzcd}$$

によって $\tilde{F} \in \mathcal{E}(\tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{N}})$ が定まる．このとき

$$\mathrm{Index}\,\tilde{F} = \mathrm{Index}(F_{\hat{\alpha}} \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{Index}\,F_{\hat{\alpha}} = \mathrm{Index}\,F.$$

従って $[\tilde{\tilde{M}}:\tilde{\tilde{N}}]_0 \leq [\tilde{M}:\tilde{N}]_0$. さらに定理2.4より

$$[\tilde{\tilde{M}}:\tilde{\tilde{N}}]_0 = [M \otimes B(L^2(G)) : N \otimes B(L^2(G))]_0 = [M:N]_0.$$

故に $[\tilde{M}:\tilde{N}]_0 = [M:N]_0$.

(2) $\alpha \mid N$ が（よって α も） semi-dual だから，[13] より

$$M \rtimes_{\alpha} G \cong M^{\alpha} \otimes B(L^2(G)), \quad N \rtimes_{\alpha} G \cong N^{\alpha} \otimes B(L^2(G)).$$

よって (1) より，$[M^{\alpha} : N^{\alpha}]_0 = [M \rtimes_{\alpha} G : N \rtimes_{\alpha} G]_0 = [M:N]_0$. □

定理2.8は最初 G の可換性を仮定していたが，一般の局所コンパクト群でよいことを中神氏から示唆された．

§3. 条件付エントロピー

M を忠実正規な規格化されたトレース τ をもつ v.N. 代数とし，N を M の v.N. 部分代数とするとき，[5, 16] で導入されたエントロピー $H(M \mid N)$ は

$$(*) \qquad H(M \mid N) = \sup_{(x_i)} \sum_i \{\tau(\eta E(x_i)) - \tau(\eta x_i)\},$$

ここに $\eta(t) = -t\log t$, E は M から N への τ-条件付期待値，sup

は $x_i \in M_+$, $\Sigma x_i = 1$ であるすべての $(x_1, \cdots, x_n)$ にわたって取る．

M が II_1 factor, N が subfactor のとき，[16]によれば，$N' \cap M$ が atomic でなければ $H(M \mid N) = \infty$ であり，$N' \cap M$ が atomic ならば

$$(**) \qquad H(M \mid N) = \sum_k \tau(f_k) \log \frac{[M_{f_k} : N_{f_k}]}{\tau(f_k)^2},$$

ただし $\{f_k\}$ は $N' \cap M$ の atoms であり $\Sigma f_k = 1$. ところで $[M_{f_k} : N_{f_k}] = \mathrm{Index}\, E_{f_k} = \tau(f_k) E^{-1}(f_k)$, [11], となるから，上式は

$$H(M \mid N) = -\sum_k \tau(f_k) \log \frac{\tau(f_k)}{E^{-1}(f_k)}$$

と書ける．従って，$-H(M \mid N)$ は $\tau \mid N' \cap M$ と $E^{-1} \mid N' \cap M$ の相対エントロピー [1, 2, 20] と見なせる．

いま v.N. 代数 M 上に忠実正規 state φ が与えられたとする．以下，N は M の v.N. 部分代数であり，M から N への φ-条件付期待値 E が存在するものとする(i.e. $\sigma^{\varphi}(N) = N, \forall t \in \mathbb{R}$)．このとき，$\varphi$, N に関する M の条件付エントロピー $H_\varphi(M \mid N)$ を次のように定義する：$E^{-1} \mid N' \cap M$ が semifinite でなければ $H_\varphi(M \mid N) = \infty$. $E^{-1} \mid N' \cap M$ が semifinite ならば $\omega = \varphi \mid N' \cap M$, $\hat{\omega} = \varphi \cdot E^{-1} \mid N' \cap M$ とおいて

$$(***) \qquad H_\varphi(M \mid N) = -S(\omega \mid \hat{\omega}),$$

ただし $S(\omega \mid \hat{\omega})$ は ω と $\hat{\omega}$ の相対エントロピーであるが，$\hat{\omega}(1) < \infty$ とは限らないので

$$S(\omega \mid \hat{\omega}) = \inf\{S(\omega \mid \omega') : \omega' \in (N' \cap M)_*^+,\ \omega' \leqq \hat{\omega}\}$$

と定める．[5, 16] では $H(M \mid N)$ を "相対エントロピー" と呼んでいるが，ここでは用語の混用を避けるため古典論と同じく "条件付エントロピー" を用いた．

実際は，以下に述べるように，$H_\varphi(M \mid N)$ は計算しやすい式で与えられることがわかる．$E^{-1} \mid N' \cap M$ が semifinite のとき，[6]より

$$\sigma_t^\omega = \sigma_t^E = \sigma_{-t}^{E^{-1}} = \sigma_{-t}^{\hat{\omega}}$$

であるから，E の centralizer $(N' \cap M)_E$ に affiliate する $h \geqq 0$ が存在して $\hat{\omega} = \omega(h\cdot)$, [14]. このとき $h \geqq 1$ (i.e. $\hat{\omega} \geqq \omega$) であり，相対エントロピーの monotonicity[2, 18] と sufficient subalgebra の議論[9, 15] を使うと，

$$H_\varphi(M \mid N) = \omega(\log h) = \varphi(\log h)$$

が証明できる．これより

命題 3.1. (1) $H_\varphi(M \mid N) \geqq 0$, $H_\varphi(M \mid N) = 0 \Leftrightarrow M = N$.

(2) $N' \cap M$ の projections $p_1, \cdots, p_n$ $(\Sigma p_i = 1)$ に対し

$$H_\varphi(M \mid N) \leqq \sum_{i=1}^n \varphi(p_i) \log \frac{\varphi(E^{-1}(p_i))}{\varphi(p_i)} \leqq \log \varphi(E^{-1}(1)).$$

命題 3.2. φ_i を M_i 上の忠実正規 state とする ($i = 1, 2$). M_i から $N_i (\subseteq M_i)$ への φ_i-条件付期待値が存在するとき，

$$H_{\varphi_1\otimes\varphi_2}(M_1\otimes M_2 \mid N_1\otimes N_2) = H_{\varphi_1}(M_1 \mid N_1) + H_{\varphi_2}(M_2 \mid N_2).$$

定理3.3. $Z(M)$ が atomic のとき，次が成立：

(1) $H_\varphi(M \mid N) < \infty$ ならば，$N' \cap M$ は I 型であり，$(N' \cap M)_E$ は finite な I 型（i.e. matrix algebras の直和）である．

(2) $\{p_i\}$ を $Z(M)$ の atoms の全体とすると，

$$H_\varphi(M \mid N) = \Sigma_i\ \varphi(\eta E(p_i)) + \Sigma_i\ \varphi(p_i) H_{\varphi_i}(MP_i \mid NP_i),$$

ただし $\varphi_i = \varphi(p_i)^{-1}\varphi \mid Mp_i$. 特に N が factor のとき，上式で $\varphi(\eta E(p_i)) = \eta\varphi(p_i)$.

定理3.4. M が factor として $H_\varphi(M \mid N) < \infty$ のとき，次が成立：

(1) $(N' \cap M)_E$ の minimal projections $\{f_k\}$ $(\Sigma f_k = 1)$ に対して，

$$H_\varphi(M \mid N) = \Sigma_k\ \varphi(f_k)\log\frac{E^{-1}(f_k)}{\varphi(f_k)}$$

$$= \Sigma_k\ \varphi(f_k)\log\frac{\mathrm{Index}\ E_{f_k}}{\varphi(E(f_k)^2)}\ .$$

(2) $\{q_j\}$ を $Z(N)$ の atoms の全体とすると，

$$H_\varphi(M \mid N) = \Sigma_j\ \eta\varphi(q_j) + \Sigma_j\ \varphi(q_j) H_{\varphi_j}(q_j M q_j \mid N q_j),$$

ただし $\varphi_j = \varphi(q_j)^{-1}\varphi \mid q_j M q_j$.

定理3.5. N が factor として $H_\varphi(M \mid N) < \infty$ のとき，次が成立：

(1) $N' \cap M$ は I 型であり，$(N' \cap M)_E$ は finite な I 型である．

(2) $(N' \cap M)_E$ の minimal projections $\{f_k\}$ $(\Sigma f_k = 1)$ に対して，

$$H_\varphi(M \mid N) = \sum_k \varphi(f_k) \log \frac{E^{-1}(f_k)}{\varphi(f_k)}$$

$$= \Sigma \varphi(f_k) \log \frac{\mathrm{Index}\, E_{f_k}}{\varphi(f_k)^2}.$$

系3.6. $H_\varphi(M \mid N) < \infty$ のとき，次は同値：

(i) $Z(M)$ は atomic,

(ii) $Z(N)$ は atomic,

(iii) $N' \cap M$ は I 型．

$M \supseteq N$ が II_1 factors のとき，定理3.4(1) は (**) の式と一致する．また，河上・吉田両氏は (*)の $H(M \mid N)$ に対し，M (resp. N) が factor のとき定理3.4(2) (resp. 定理3.3(2)) と同じ公式を得ている[21]．従って

系3.7. M を II_1型 v.N. 代数，τ をトレースとするとき，M または $N(\subseteq M)$ が factor ならば，$H_\tau(M \mid N)$ は (*) の $H(M \mid N)$ と一致する．

注意. $M \supseteq N$ が有限次元の場合，$H_\tau(M \mid N)$ は (*) の $H(M \mid N)$ と一致しない．例えば $M = M_n(\mathbb{C})$, $N = \mathbb{C}$ の場合，$H_\tau(M \mid \mathbb{C}) =$

$2 \log n$, しかし $H(M|\mathbb{C}) = H(M) = \log n$, [5]. この事実は Pimsner-Popa 不等式が有限次元で成立しないことに対応している.

条件付エントロピーが当然満すべき性質として, 次のものが挙げられる: $M \supseteq L \supseteq N$ とし, M から L および N への φ-条件付期待値が存在するとき,

(a) $H_{\varphi}(M|N) \leqq H_{\varphi}(M|L) + H_{\varphi|L}(L|N)$,

(b) $H_{\varphi}(M|L) \leqq H_{\varphi}(M|N)$,

(c) $H_{\varphi|L}(L|N) \leqq H_{\varphi}(M|N)$.

少し仮定を置くと, (a), (b) の成立が証明できる. (c) についてはわからない.

条件付エントロピーの定義 (***) は関係式 (**) が一般に成立するように考え出したものであり, やや便宜的である. 本当は, E^{-1} (よって Index E) を含まないもっと初等的な定義から出発すべきであろう. 例えば (*) のアナロジーや [4] にある $M \supseteq N$ が有限次元の場合の定義を一般にすることなどが考えられる. しかし, このような定義が (***) と一致することをいうのは (たとえ M が II_1型であっても φ がトレースでなければ) 難しそうに思われる.

§4. 最小指数と条件付エントロピー

この節では再び $M \supseteq N$ を factor-subfactor とし, $[M:N]_0 = \text{Index}\, E_0 < \infty$ を仮定する. 任意の $E \in \mathcal{E}(M, N)$ に対し, $E|N' \cap M$, $E^{-1}|N' \cap M$ は scalar-valued であるから, $H_{\varphi}(M|N)$ は $\varphi \cdot E =$

E となる M 上の忠実正規 state φ の取り方に依らない．従って $H_\varphi(M|N)$ を $H_E(M|N)$ で書く．

命題3.1(2) より，$E \in \mathcal{E}(M,N)$ に対し $H_E(M|N) \leq \log \mathrm{Index}\, E$ であるが，さらに次が成立：

命題4.1. $H_E(M|N) \leq \log\, [M:N]_0$, $\forall E \in \mathcal{E}(M,N)$.

最小指数の新たな特徴づけとして，

定理4.2. $E \in \mathcal{E}(M,N)$ に対して次は同値：

(i) $\mathrm{Index}\, E = [M:N]_0$,

(ii) $H_E(M|N) = \log\, [M:N]_0$,

(iii) $H_E(M|N) = \log \mathrm{Index}\, E$,

(iv) $N' \cap M$ の任意の projections $p_1, \cdots, p_n$ $(\Sigma\, p_i = 1)$ に対し

$$\sum_{i=1}^{n} E(p_i) \log \frac{\mathrm{Index}\, E_{p_i}}{E(p_i)^2} = \log \mathrm{Index}\, E,$$

(v) $N' \cap M$ の任意の projection $p (\neq 0)$ に対し

$$\mathrm{Index}\, E_p = E(p)^2\, \mathrm{Index}\, E.$$

$N' \cap M \neq \mathbb{C}$ のとき，$H_E(M|N)$, $E \in \mathcal{E}(M,N)$, が取る値の範囲は次のようになる：

定理4.3. $N' \cap M \neq \mathbb{C}$ ならば,

$$\{H_E(M \mid N) : E \in \mathcal{E}(M, N)\} = (\log\alpha,\ \log [M:N]_0],$$

ここに

$$\alpha = [M:N]_0 \min\{E_0(p)^2 : 0 \neq p \in N' \cap M \ \text{projection}\}$$
$$= \min\{[M_p:N_p]_0 : 0 \neq p \in N' \cap M \ \text{projection}\}.$$

系4.4. 次は同値:

(i) $\inf\{H_E(M \mid N) : E \in \mathcal{E}(M, N)\} = 0$,

(ii) $N' \cap M$ の projection $p (\neq 0)$ が存在して $M_p = N_p$.

例. R を hyperfinite II_1 factor とし, R_λ を Jones[10] の構成した subfactor とする. $\lambda = [R:R_\lambda]^{-1} < 1/4$ のとき, [16] によれば

$$H(R \mid R_\lambda) = 2(\eta\, t + \eta\,(1-t)),$$

ここに $t(1-t) = \lambda$. また projection $f \in R'_\lambda \cap R$, $\tau(f) = t$, と isomorphism $\theta : R_f \to R_{1-f}$ が存在して $R_\lambda = \{x \oplus \theta(x) : x \in R_f\}$. このとき $R'_\lambda \cap R = \mathbb{C} f + \mathbb{C}(1-f)$. τ' を R'_λ 上の規格化トレースとして, $R_f = (R_\lambda)_f$ より

$$1 = [R_f : (R_\lambda)_f] = [R:R_\lambda]\tau(f)\tau'(f)$$

となり，$\tau'(f) = 1-t$. よって [7] より

$$[R:R_\lambda]_0$$

$$= [R:R_\lambda]\{(\tau(f)\tau'(f))^{1/2} + (\tau(1-f)\tau'(1-f))^{1/2}\}^2 = 4.$$

従って最小指数 $[R:R_\lambda]_0$ は Jones 指数 $[R:R_\lambda]$ と一致しない．Index E, $E \in \mathcal{E}(R, R_\lambda)$，の範囲は $[4, \infty)$である．また $H_E(R \mid R_\lambda)$, $E \in \mathcal{E}(R, R_\lambda)$，の範囲は $(0, \log 4]$ であり，$H(R \mid R_\lambda) < \log 4$.

最後に，筆者が特に興味のある一つの問題を挙げておこう．

問題．$[M:N]_0 = \mathrm{Index}\, E_0 < \infty$として，$E_0 : M \to N$ から始めて順次 basic construction [11] を施すと $N \subseteq M_0 = M \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ と条件付期待値 $E_n : M_n \to M_{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が得られる．このとき $[M_n : M_{n-1}]_0 = \mathrm{Index}\, E_n = \mathrm{Index}\, E_0$ は明らか．そこで問題は $[M_n:N]_0 = \mathrm{Index}(E_0 \cdot E_1 \cdot \cdots \cdot E_n)$，i.e. $[M_n:N]_0 = [M:N]_0^{n+1}$ が成立するかである．これは $H_{E_0 \cdot \cdots \cdot E_n}(M_n \mid N) = (n+1) H_{E_0}(M \mid N)$ と同値である．特に M が II_1 factor で $H(M \mid N) = \log [M:N]$ ($\Leftrightarrow$ $[M:N]_0 = [M:N]$) のとき，$H(M_n \mid N) = \log [M_n:N]$ ($\Leftrightarrow$ $[M_n:N]_0 = [M_n:N]$) となることが [17] で証明されている．故にこの場合，上の問題は正しい． 上述の例の $M = R$, $N = R_\lambda$ $(\lambda < 1/4)$ の場合に $[M_n:N]_0 = [M:N]_0^{n+1} = 4^{n+1}$ かどうか試してみたかったが，計算できなかった．

文　献

[1] H. Araki, Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **11** (1976), 809-833.

[2] H. Araki, Relative entropy for states of von Neumann algebra II, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **13** (1977), 173-192.

[3] A. Connes, On the spatial theory of von Neumann algebras, J. Funct. Anal., **35** (1980), 153-164.

[4] A. Connes, Entropie de Kolmogoroff-Sinai et méchanique statistique quantique, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **301** (1985), 1-6.

[5] A. Connes and E. Størmer, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, Acta Math., **134** (1975), 289-306.

[6] U. Haagerup, Operator valued weights in von Neumann algebras, I, II, J. Funct. Anal., **32** (1979), 175-206; **33** (1979), 339-361.

[7] F. Hiai, Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **24** (1988), 673-678.

[8] F. Hiai, Minimum index for subfactors and entropy, in preparation.

[9] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Sufficiency, KMS condition and relative entropy in von Neumann algebras, Pacific J. Math., **96** (1981), 99-109.

[10] V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math., **72** (1983), 1-25.

[11] H. Kosaki, Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors, J. Funct. Anal., **66** (1986), 123-140.

[12] R. Longo, Index of subfactors and statistics of quantum fields, preprint, 1988.

[13] Y. Nakagami and M. Takesaki, Duality for Crossed Products of von Neumann algebras, Lecture Nores in Math., No. **731**, Springer-Verlag, 1979.

[14] G. K. Pedersen and M. Takesaki, The Radon-Nikodym theorems for von Neumann algebras, Acta Math., **130** (1973), 53-87.

[15] D. Petz, Sufficient subalgebras and the relative entropy of states of a von Neumann algebra, Commun. Math. Phys., **105** (1986), 123-131.

[16] M. Pimsner and S. Popa, Entropy and index for subfactors, Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4, **19** (1986), 57-106.

[17] M. Pimsner and S. Popa, Iterating the basic construction, Trans. Amer. Math. Soc., **310** (1988), 127-133.

[18] A. Uhlmann, Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory, Commun. Math. Phys., **54** (1977), 21-32.

[19] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator

algebra, Tôhoku Math. J., **6** (1954), 177-181.

[20] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, IV (entropy and information), Kōdai Math. Sem. Rep., **14** (1962), 59-85.

[21] 吉田, 相対エントロピーと指数, 「作用素環と指数理論」予稿集, 数理解析研, 1989 (本稿究録).