数理解析研究所講究録
688巻 1989年 1-13

Jonesの指数理論とその発展

九大 教養 幸崎秀樹 (Hideki Kosaki)

von Neumann環理論は1930年代にMurray, von Neumannにより創造された。彼らはその研究の動機として作用素論、量子力学、表現論等をあげている。作用素環とはHilbert空間上の（有界線形）作用素のつくる $*$-algebraの事である。作用素環が1を含みstrong operator topologyに関して閉じている事にvon Neumann環と呼ばれる。（一方norm topologyに関して閉じている時は C^*-環と呼ばれる。）この分野の大きな特色は非可換且つ無限次元的な対象を扱っているという点にある。

Reduction理論により（表現を既約表現の直積分で表わすように）von Neumann環をfactorの直積分の形に書ける。ここでfactorとはcenterが $\mathbb{C}1$ となるvon Neumann環の事である。従ってfactorの研究が一番重要であると言える。Projection全体の構造を見る事により、Murray-von Neumannはまずfactorを次のように分類した。

$$\begin{cases} \text{type } \mathrm{I}_n \quad (n=1,2,\cdots,\infty) & (M_n(\mathbb{C}),\ B(H) \cdots n=\infty\text{の時}) \\ \text{type } \mathrm{II}_1 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{type } \mathrm{II}_\infty \\ \text{type } \mathrm{III}\end{array}\right.$$

type II_∞-factor は type II_1 と $B(H)$ (Hilbert空間 H 上の作用素全体)の tensor 積となる。一方 type III factor は trace を持たないが Modular理論を道具として Connes により更に type III_0, III_λ $(0<\lambda<1)$, III_1 と分類された。有限次元環の増大列の union の閉包となっている Approximately Finite Dimensional (=hyperfinite) factor の研究が理論上も又応用上も特に大切であるが、その完全分類が近年ようやく完成した。特に AFD II_1-factor は unique であり、これを以後 R と表わす事にする。

さて index理論とは factor M が subfactor N を含む時、M と N の作用素環論的な"比"を調べるという事である。($\dim M/\dim N$ では ∞/∞ となり意味が全くない。) つまり N と同型な copy が M の中にいくつ入っているかを数えたい。ここでは Jones による II_1-factor の index 理論 (1983) 及びその後の発展について説明する。その後、一般の factor 及び C^*環 に対する index 理論も登場したがそれらについては二つ目の講演及び稲谷氏の講演で説明されるのでふれない事にする。又 index理論を通じて作用素環論と他分野 (Knot 理論 ‥‥) との交流も活発になりつつあるが、ここでは作用素環論内部(?)での話題に話を限る事にする。

1. II_1-factorに対するJonesの指数理論

$M \supseteq N$をII_1-factor, II_1-subfactorとする。II_1-factorの大きな特長はunique normalized ($tr(1)=1$) traceを持つという事である。Mのunique normalized trace $tr=tr_M$でMに内積を入れる。

$$(x,y) \in M \times M \to tr(y^*x) \in \mathbb{C}$$

これによるMのcompletionを$L^2(M)$ (standard Hilbert space)とする。Mはleft multiplicationとして$L^2(M)$に作用している。(もともとMが作用していたHilbert空間は忘れる事にする。)
Mのcommutant $M' = \{x \in B(L^2(M)) ; xy=yx \ \forall y \in M\}$はMの$L^2(M)$へのright mult.全体となる。(以下von Neumann環のcommutantが時々登場するが、作用する空間を指定しない限りcommutantという概念は意味を持たない。) さて恒等式$tr(x^*x) = tr(xx^*)$は$x \in M \to x^* \in M$が$L^2(M)$上の(antilinear) unitary involutionに拡張される事を意味する。これをJと書く事にする。$*$-operation (adjointを取る事)が積の順序を逆にする事より$JMJ = M'$がわかる。$N (\subseteq M)$も$L^2(M)$へ(left multとして)作用しているが、そのcommutant $N' (\supseteq M')$は一般論によりtype II_1又はII_∞ factorとなる。type II_∞となる時はNがMの中で"非常に小さい"時なので、この時はJones index $[M:N]$は$+\infty$と定義される。一方type II_1

の時には N' も unique normalized trace $tr_{N'}$ を有する。定義より $L^2(M)=\overline{M}$ であるが closed subspace $\overline{N}$ を考える。$L^2(M)$ から $\overline{N}$ への projection e_N は $e_N \in N'$ 及び $Je_NJ=e_N$ を満たす。前者は $\overline{N}$ が N の作用で invariant だからで、後者は $\overline{N}$ が J で invariant であるからである。特に $tr_{N'}(e_N)$ に意味がある。Jones index $[M:N]$ は

$$[M:N] = 1/tr_{N'}(e_N)$$

で定義される。この時 $[M:N]$ が index と呼ばれるにふさわしい諸性質を持つ事がすぐにわかる。$\dim_{\mathbb{C}} M$ は $+\infty$ となり役に立たないが、Hilbert 空間 H (特に $H=L^2(M)$) への作用を考えて有限な量 $\dim_N H$ をうまく定めて index を定義した訳である。これは coupling constant の理論として知られている。

2. Basic Construction

Jones理論の中で重要な basic construction と呼ばれる構成法について説明する。$M \supseteq N$ が $L^2(M)$ に作用している時、$N' \supseteq M'$ 及び $e_N \in N'$ であったが、N' が M' と e_N で (von Neumann 環として) 生成されている事はすぐにわかる。($N' = \langle M', e_N \rangle$) 従って $JN'J$ は $JM'J = M$ 及び $Je_NJ = e_N$

で生成される。$JN'J$ を以後 M_1 と書き、$M \supseteq N$ の basic extension と呼ぶ。M_1 は $L^2(M)$ 上に作用しており $tr_{N'}$ を J で移す事により M_1 も unique normalized trace を持つ II_1-factor である事がわかる。($[M:N] < +\infty$ の時) 従って $M \supseteq N$ より新しい pair $M_1 \supseteq M$ が作られた。(今度は M_1 をその standard Hilbert space $L^2(M_1)$ に表現し直す事により) Jones index $[M_1 : M]$ が定まる。この時、$[M_1 : M] = [M : N]$ と index が保存される事が重要である。従って basic extension を繰り返す事により (となり合う物同志の index が常に一定な) II_1-factors の tower:

$$N \subseteq M \subseteq M_1 = \langle M, e_N \rangle \subseteq M_2 = \langle M_1, e_M \rangle = \langle M, e_N, e_M \rangle$$
$$\subseteq M_3 \subseteq M_4 \subseteq \cdots$$

が得られる。一度 basic extension を行う毎に新しく projection が加わるので、projection の列 $\{e_i\}_{i=0,1,2,\cdots}$ ($e_0 = e_N$, $e_1 = e_M$) が得られる。この projection の列は次の重要な関係式を満たす。

$$\begin{cases} e_i e_j = e_j e_i, & |i-j| \geq 2, \\ e_i e_{i\pm1} e_i = [M:N]^{-1} e_i . \end{cases}$$

これより次の Jones の基本定理の前半が出る。後半はこのような e_i の生成する環の構造を詳しく調べる事により得られる。(更にこの関係式が作用素環論と様々な他分野との接点を与えてくれる。)

<u>Theorem</u>　Jones index $[M:N]$ の値は $\{4\cos^2\frac{\pi}{n}\ ;\ n=3,4,\cdots\}$ $\cup\ [4,\infty]$ の中に入る。更にこの集合内の任意の値は (unique AFD II_1-factor) R のある subfactor の index の値として実現される。

3. Pimsner-Popa (1986) の仕事

Pimsner-Popa は 1986年に発表された論文で $M\supseteq N$ より定義される relative entropy $H(M/N)$ (Connes-Størmer により以前に他目的の為に導入された。) と Jones index $[M:N]$ の関係を詳しく調べた。relative commutant $M\cap N'$ の様子を調べる事が直接の動機である。一般的結果は $H(M/N)\leqq \ln[M:N]$ であるが、彼らは等号成立条件、relative commutant との関係、様々な example についての計算等を行った。

1の $e_N:\overline{M}\to\overline{N}$ は M を N へ写し $E_N=e_N|_M : M\to N$ は normal conditional expectation となっている。$[M:N]<+\infty$ の時、M の有限個の元 $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ で $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* e_0\lambda_i = 1$ を満たすものが取れる。簡単な恒等式　$e_0 x e_0 = E_N(x)e_0,\ x\in M$ に注意すると、$m\in M$ が

$$m=\sum_{i=1}^{m} E_N(m\lambda_i^*)\lambda_i$$

と書ける事がわかる。つまり M を N-module と見た時、$\{\lambda_i\}$ が

basisとなる。このbasisの選び方はある種の一意性があり、これをPimsner-Popa basisと呼ぶ。上の表示を利用して彼らはPimsner-Popa不等式

$$E_N(x) \geqq [M:N]^{-1}x, \quad x \in M_+$$

を証明した。この不等式は$[M:N]$の(解析的な)特長付けにもなっており重要である。(III型factorの指数理論でもくり返しくり返し使われる。)始めに書いたrelative entropyの不等式もこれより導かれる。

4. 問題

Jonesのindex理論に関する問題を以下に述べる。

4.1 $[M:N]<+\infty$の時、MとNがII_1-factorとしてどの程度似ているか?

Pimsner-Popa basisが取れる事から想像が付くように非常に似ているはずである。実際index有限のもとでII_1-factorの様々な性質(Property T等々)が保存される事が知られている。この方面の結果は多く大切でもあるが、紙面の都合もあるのでここではふれない事にする。

4.2 ($[M:N]<4$の時は$M\cap N'=\mathbb{C}1$となるが)$M\cap N'=\mathbb{C}1$と仮定した場合、4以上のJones indexの値はど

の位あるか？

この集合が閉集合である事は知られているがどの位大きいかについては未解決である。4に近い方の値としては $3+\sqrt{3}$ (Jones), $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ ($\fallingdotseq 4.56$) (John Schou), 約 4.21 (Ocneanu) 等が知られている。Hecke 環（他の物でもよい）の表現論を利用し、H. Wenzl. は彼の学位論文の中で 3^2, 4^2, ... 等に収束する index の値の列を作って見せた。

4.3 Rの (finite-index) subfactor の (up to conjugacy での) 分類

始めに書いたように AFD factor の分類は完成したので次には subfactor の分類が問題となる。Rは一番小さい無限次元 factorである (Connes) ので $[R:N]<+\infty$ の時 Nは factor としてはRと同型である。従ってRの subfactor の conjugacy class の分類に興味がある。つまり Galois 理論を作りたい。たとえば $[R:N]=2$ の時は、Goldmanの定理によりRはNの $\mathbb{Z}_2$-outer action の crossed product（又はNはRの $\mathbb{Z}_2$-outer action の fixed point subalgebra）として書ける。従って ConnesのRの automorphism の研究により index 2 の subfactor は unique となる。明らかに Jones index は分類の為の（荒いが非常に重要な）不変量を与えている。もっと詳しい不変量（願わくば完全不変量）が求めたい訳であるが、この方面については Ocneanu 及び Popa 等が精力的に研究を進めている。次の5

では最近の Ocneanu の理論について解説する。

5. Ocneanu の quantized group (paragroup)

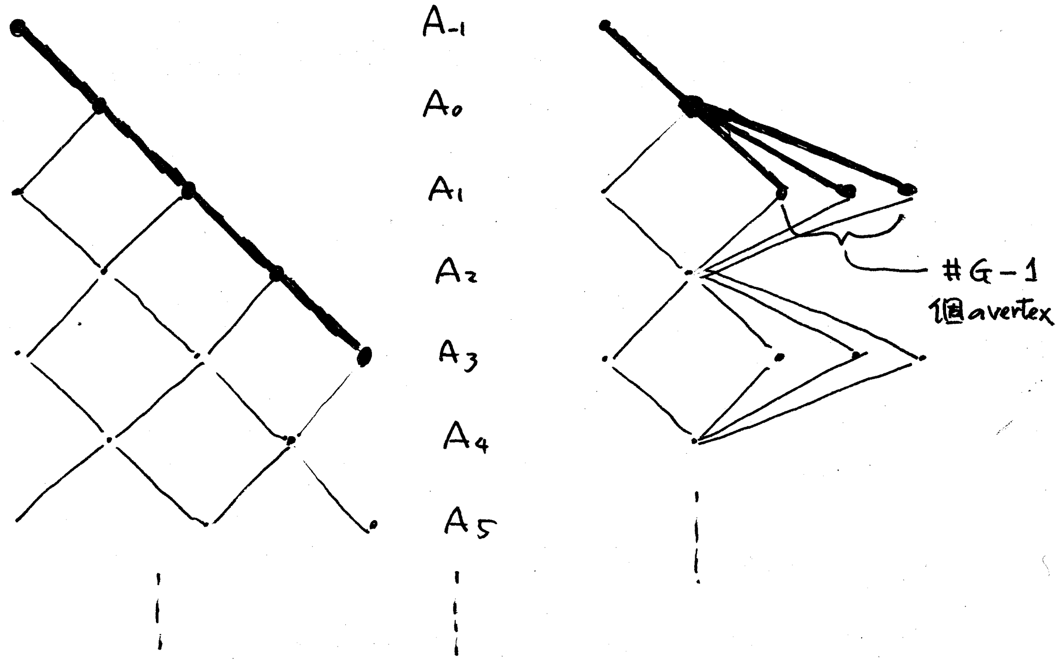
有限群の量子化とでも言うべき Ocneanu の paragroup について説明する。これに基ずいて彼は index 4 未満の R の subfactor の完全分類を完成させた。

まず II_1-factor の pair $M \supseteq N$ ($[M:N] < \infty$ 且つ $M \cap N' = \mathbb{C}1$) より paragroup $\langle \mathcal{G}_{M:N}, \{\gamma_k\}_{k=0,1,2,\cdots} \rangle$ と呼ばれる物がどのように表われて来るかを説明する。ここで $\mathcal{G}_{M:N}$ は principal graph と呼ばれるグラフであり、有限群の underlying set の量子化となっている。一方 $\{\gamma_k\}$ は (ある有限次元環の) anti-automorphism の列であり、群の積構造の量子化となっている。$N \subseteq M$ から次の tower が出る事は 2 で述べた。

$$N = M_{-1} \subseteq M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$$

ここで $[M_k : M_{-1}] = [M:N]^{k+1} < +\infty$ となるので $M_k \cap M_{-1}'$ が有限次元環 (つまり matrix 環の直和) となる事はすぐわかる。$A_k = M_k \cap M_{-1}'$ とおけば有限次元環の増大列 $\{A_k\}_{k=-1,0,\cdots}$ が得られる。($A_{-1} = A_0 = \mathbb{C}1$) 従って $\{A_k\}$ は Bratteli diagram により完全に記述される。たとえば $M = R \rtimes S_3 \supseteq N = R \rtimes S_2$ 及び $M = R \rtimes \mathbb{Z}_3 \supseteq N = R$ の時は各々次の

diagram を得る。



2つの例が示す通り、一般にあるレベルの皿は必ず前のレベルの皿のおり返しを含んでいる。あるレベルまでは前のレベルの皿のおり返し以外の物も次々に加わるが、ある深さ以降では新しいものが付け加わらず、巾の広がりが止まってしまう。このような時は depthが有限と定める。上の例では各々 depth 4, 2 となっている。index 4未満の時は有限な depth を持つが一般に depth は無限になりうる。太字で書いた部分(新たに加わるもの全体)を指定すればおり返しにより Bratteli diagram 全体が(つまり $\{A_k\}_k$ 全体が)定まる。太字の部分を principal graph $\mathcal{G}_{M:N}$ と呼ぶ。左の例の principal graph は Dynkin diagram A_5 であり、右の例で

$\# G = 3$ ($G = \mathbb{Z}_3$) の時は Dynkin diagram D_4 が表われている。Principal graph より index を読み取る事が出来る。(incidence matrix の最大固有値) これを paragroup の"位数"(群の要素の数) とみなす。

$2k+1$ 階の extension M_{2k+1} は本来 $L^2(M_{2k})$ に作用している M_{2k-1} より決まっている。しかし M_{2k+1} は $N \subseteq M_k$ の basic extension としてもつかまる。つまり M_k を $L^2(M_k)$ に作用させて、ここから決まる J-operator を J_k と書くと、N の $L^2(M_k)$ の作用の commutant N' を使い $J_k N' J_k$ が表れるが、$N \subseteq M_k \subseteq M_{2k+1}$ 及び $N \subseteq M_k \subseteq J_k N' J_k$ が同一視できる。(Pimsner-Popa) この事より $\gamma_k(x) = J_k x^* J_k$ ($x \in A_{2k+1} = M_{2k+1} \cap N'$) とおくと γ_k が A_{2k+1} の anti-automorphism を定めている。これらの family $\{\gamma_k\}_{k=0,1,2,\cdots}$ が paragroup の二番目の構成要素となっている。γ_0 は群の operation $g \to g^{-1}$ に対応し $\gamma_1 \circ \gamma_0$ は comultiplication に対応する。depth 有限の時はある深さまでの γ_k を見れば十分でそれ以降の情報は以前のもののくり返しである。たとえば depth 2 の場合は丁度 (有限次元) Hopf algebra が得られる。前頁の右の例では各点を結ぶ辺が1本しかなく、この時は A_1 が可換環である事を意味する。これは commutative Hopf algebra が群環であるという事実に対応している。

もちろん上で構成したparagroupは $M \supseteq N$ の不変量である。又．paragroupは様々な性質を満たす。これらの性質によりparagroup概念は公理化される。逆にparagroupから出発して II_1-factor, subfactor の pair が（path algebraの手法で）構成される。Pimsner-Popa basis を取る事は paragroup の subfactor への action を書き下した事に対応し、factor の元を(3で行ったように)(subfactor の元を係数とした）一次結合で書くという事が．factor を paragroupのsubfactor への action に関する"接合積"として表わすという事に対応する。

Ocneanu の仕事は index 4未満のRのsubfactor の分類が位数4未満のparagroup の分類に帰着する事を主張する。後者を実行し Ocneanu は次の完全分類を得た。

(i) Dynkin diagram A_n $(n \geqq 2)$ $\left(\text{index} = 4\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right)$ を有するsubfactor が1つ存在する。

(ii) Dynkin diagram D_{2n} $(n \geqq 2)$ $\left(\text{index} = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4n-2}\right)\right)$ を有するsubfactor が1つ存在する。

(iii) Dynkin diagram E_6 $\left(\text{index } 4\cos^2\frac{\pi}{12}\right)$ を有するsubfactor が丁度2つ存在する。

(iv) Dynkin diagram E_8 $\left(\text{index } 4\cos^2\frac{\pi}{30}\right)$ を有するsubfactor が丁度2つ存在する。

((i), (ii) の場合には principal graphが決まると $\{\Phi_k\}$ の決め

方が unique となる。一方 (iii), (iv) の場合には $\{N_k\}$ の決め方が丁度2通りある。)

以上のように index 4未満の場合は R の subfactor が完全に分類された。depth 無限の場合が今後の重要な研究課題である。