数理解析研究所講究録
689巻 1989年 185-194

波動形式の代数性
(Blasius-Clozel-Ramakrishnanの仕事の紹介)

東京工大 理 数学　黒川信重
(Nobushige Kurokawa)

正則な保型形式の場合は フーリエ級数や ヘッケ作用素の固有値に関して沢山の研究があり，とくに，それらの代数性はよく知られている。他方，実解析的な波動形式に関しては実2次体の量指標から Maass [6] によって作られた波動カスプ形式の場合（このときはフーリエ係数や ヘッケ作用素の固有値は一般に超越数となる）や アイゼンシュタイン級数の場合（この場合にも一般に超越的である）を除いては代数性は殆んど知られていなかった。Blasius-Clozel-Ramakrishnan の研究([1]-[3]) は この方向での最初の一般的な結果と言える。∞ 成分（アルキメデス成分）の条件から代数性はラプラス作用素の固有値が $\frac{1}{4}$ のときに限定されてしまう点が，正則な保型形式の場合には任意の(整数)重さで代数性が言える事と異なる点である。

1 結果

定理A (B-C-R [1][2])

f を $\Gamma_0(N)$ ($\subset SL_2(\mathbf{Z})$) に関する波動形式で $\Delta f = \frac{1}{4} f$ をみたし，ヘッケ作用素 $T(p)$ (p は N を割らない素数全体を動く) の同時固有関数とする： $T(p)f = a(p) f$。
このとき $a(p)$ は代数的数である。

ここで，$N \geqq 1$ は整数，

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod N \right\},$$

f は上半平面 $H = \{ z = x+iy \in \mathbf{C} \mid y>0 \}$ 上の実解析関数で modulo N のあるディリクレ指標 ε に対して

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d) f(z)$$

をすべての $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に関してみたすとする。また，

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

は上半平面のラプラス作用素である。

定理B (B-R[3]) f を上のとおりとし，2次のジーゲル保型形式に関する2つの仮定 (I, II: 後述) がみたされるとする。すると，2次元のガロア表現 $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to GL_2(\mathbf{C})$ であって $L(s,f) = L(s,\rho)$ をみたすものが存在する。

2つの仮定(I, II)は定理Bの証明方法を概観する際に述べるが、現在のところ難しい問題であり、一般的に証明できる見込みはまだないようである。したがって定理BはMaass [○]によって確認された場合(アイゼンシュタイン級数の場合と実2次体の量指標からテータ級数によって作られる波動形式の場合)以外の例を与えてはいない。

2 背景

Fを大域体(global field)とするとLanglandsによる非可換類体論の予想の核心は次の単射の存在である:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)) & \hookrightarrow & \mathrm{Rep}^{aut}(GL_\infty(\mathbb{A}_F)) = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Rep}^{aut}(GL_n(\mathbb{A}_F)) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \rho & \longmapsto & \pi(\rho) \end{array}$$

$$L(s,\rho) = L(s,\pi(\rho)).$$

ここで、Repは表現全体を表わし、$\mathbb{A}_F$はFのアデール環、autは保型表現を意味する。

知られている結果: $n=\deg(\rho)$ とおく。

① $n=1$: 任意のFに対して成立(類体論)

方法: $GL_1(\mathbb{A}_F) \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)^{ab}$ 準同型(reciprocity)を構成。

② Fの標数が正のとき（このときは $\rho: Gal(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_n(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ でもよい。）

$n=2$ は Drinfeld (1977頃) によって成立。

$n \geqq 3$ は Laumon (1986) や Flicker-Kazhdan [4] (1987) によってほぼ出来ている。

方法： Grothendieck による L 関数の判別式表示により Artin 予想を証明し，普遍的な $Gal(\bar{F}/F) \times GL_\infty(A_F)$ 加群 H を構成し，それを既約分解する：

$$H = \bigoplus_{(\rho,\pi)} m(\rho,\pi)\, \rho \boxtimes \pi \quad , \quad m(\rho,\pi) \geqq 0 \text{ 整数。}$$

このとき $L(s,\rho) = L(s,\pi) \iff m(\rho,\pi) \geqq 1$.

③ Fの標数が0のとき（このときは $\rho: Gal(\bar{F}/F) \to GL_n(\mathbb{C})$ のみしか出来ていない。）

$n=2$ のときは $Im(\rho)$ が可解なら $\pi(\rho)$ が存在 (Langlands 1976, Tunnel 1980).

$n \geqq 3$ のときは $Im(\rho)$ がべき零なら $\pi(\rho)$ が存在 (Arthur-Clozel [5].)。

方法： GL_n に対する base change.

$n=2$ のときには Artin 予想をみたす新しい例（今までの方法では知られていなかったという意味）が

見つかったが，$n \geq 3$では新しい例はない。（有限べき零群の既約表現はすべてmonomialであるためArtin予想は以前から知られていた場合になってしまう。）

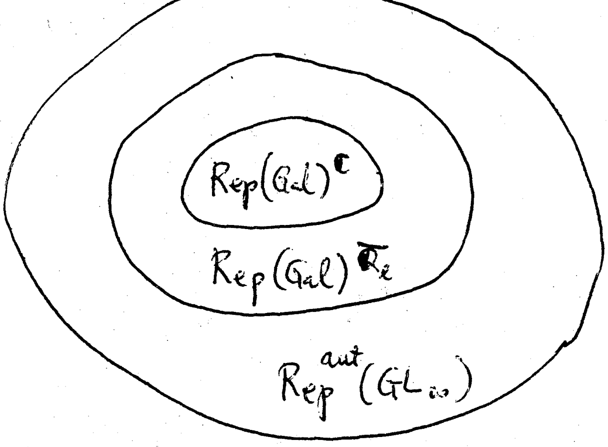
__問題__：$\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}) \hookrightarrow \mathrm{Rep}^{\mathrm{aut}}(GL_\infty)$ の像を特徴づけよ。

Fの標数が正のとき，これは上記②によって $\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal})^{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ にすれば全射であることがほぼわかっている。

Fの標数が0のときは

次が予想される：

（ただし，$\Gamma_{\mathbb{R}}(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$）



$$\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal})^{\mathbb{C}} = \mathrm{Rep}^{\mathrm{aut}}(GL_\infty)^{\text{Gal-type}}$$

$$= \left\{ \pi \;\middle|\; \begin{array}{c} L(s,\pi)\text{の}\Gamma\text{-因子が } \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^a \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^b \\ a, b \in \mathbb{Z}, \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal})^{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} = \mathrm{Rep}^{\mathrm{aut}}(GL_\infty)^{\text{algebraic}}$$

$$= \left\{ \pi \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Hecke eigenvalues} \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (\text{i.e. 各有限素点}v\text{で } L(s,\pi_v)^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}[N_v^{-s}]) \end{array} \right\}。$$

これを2次元の既約なガロア表現 $\rho: Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{C})$ の場合に，その予想される像 $\pi(\rho)$ を保型形式 f_ρ で明示すると次のようになる。$L(s,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ の Γ-因子は複素共役の ρ での行き先で決まり3つに分かれる。

(1) ρ(複素共役) $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Γ-因子 $= \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$,

$f_\rho(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nz}$: 予想では f_ρ は重さ1の(正則)保型形式.

(2+) ρ(複素共役) $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Γ-因子 $= \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^2$,

$f_\rho(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) K_0(2\pi ny)\cos(2\pi nx)$: 予想では

f_ρ は $\Delta f = \frac{1}{4} f$ の(偶)波動形式。

$z \mapsto -\bar{z}$ に関して

(2−) ρ(複素共役) $\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Γ-因子 $= \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^2$,

$f_\rho(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) K_0(2\pi ny)\sin(2\pi nx)$: 予想では

f_ρ は $\Delta f = \frac{1}{4} f$ の(奇)波動形式。

ただし，$K_0(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(yu)}{\sqrt{u^2+1}}\,du$ は変形Bessel関数。

③ 方法

fを定理A,Bのとおりとする。次のように保型表現を構成する:

$f \rightsquigarrow \pi$: $GL_2(\mathbb{A})$の保型表現　　$L(s,\pi)=L(s,f)$

$\downarrow$ $K/\mathbb{Q}$ 虚2次体による base change

π_K : $GL_2(\mathbb{A}_K)$の保型表現　　$L_K(s,\pi_K)=L(s,\pi)L(s,\pi\otimes(\frac{K}{\mathbb{Q}}))$

$\downarrow$ Kの量指標χによる twist

$\pi_K\otimes\chi$: $GL_2(\mathbb{A}_K)$の保型表現　　$L_K(s,\pi_K\otimes\chi)$

$\downarrow$ automorphic induction (Arthur-Clozel)　　$\|$

$\Pi'(f,\chi)=(\pi_K\otimes\chi)_{K/\mathbb{Q}}$: $GL_4(\mathbb{A})$の保型表現　　$L_{\mathbb{Q}}(s,\Pi'(f,\chi))$

$\downarrow$ Jacquet+Piatetski-Shapiro+Shalika の criterion　　$\|$

$\Pi(f,\chi)$: $GSp_4(\mathbb{A})$の保型表現　　$L_{\mathbb{Q}}^{spin}(s,\Pi(f,\chi))$
(次数2のジーゲル)

ここで $\Pi'(f,\chi)$ は $\theta(\chi)$をχから作られる$GL_2(\mathbb{A})$の保型表現(automorphic induction)とすると $\pi\otimes\theta(\chi)$ と書ける(はずのものである)が、現在のところ、この $GL_2\otimes GL_2\longrightarrow GL_4$ 構成は証明は出ていない(道具はそろっているが)ため上記の方法を使う。

なお、J+P-S+S の criterion (出版されていない) はほぼ次のとおり。

"定理" (J + P-S + S)

> π' を $GL_4(\mathbb{A})$ の保型表現とするとき
> $L(s,\pi') = L^{spin}(s,\pi)$ となる $GSp_4(\mathbb{A})$ の保型表現 π が存在する必要十分条件は
> $L(s,\pi',\Lambda^2\otimes\mu)$ が $s=1$ で 1位の極をもつような $\mathbb{Q}$ の量指標 μ が存在することである。

ここで Λ^2 は外積(2乗)。このことは L-群に関する関手性 (functoriality) からすれば自然であり、実質的には
$\iota : Sp_4(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_4(\mathbb{C})$ を自然な表現とすると
$\Lambda^2(\iota) : Sp_4(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_6(\mathbb{C})$ が $\Lambda^2(\iota) = (5\text{次元既約表現}) \oplus \mathbb{1}$
と分解することからわかる。

さて、上記のように構成された $\pi(f,\chi)$ について重要なことは $\pi(f,\chi)$ の ∞ 成分が "limit of discrete series" になることであり (K が虚2次体であるために $\theta(\chi)$ の ∞ 成分は discrete series に入る)、これから代数性が出る。

定理A の証明には ある K, χ に対して $L^{spin}(s,\pi(f,\chi))$ の係数が代数的であることを示せばよい。このために GSp_4 に関する跡公式にうまい試験関数を代入することにより $\pi(f,\chi)$ の寄与を取り出し共役類上の和が代数的であることから $\pi(f,\chi)$ のヘッケ固有値が代数的であることを示している ([2] の論文)。

定理Bにおいて用いられる仮定は次の二つである。

仮定I $L^{spin}(s,\pi(f,\chi))=L^{spin}(s,F)$ となる重さ2の正則なジーゲル保型形式F(次数2，ヘッケ作用素の同時固有関数)が存在する。

仮定II 次数2で重さが3以上の正則なジーゲル保型形式F(ヘッケ作用素の同時固有関数)が与えられたとき各素数ℓに対して $L^{spin}(s,F)\equiv L(s,\rho_F) \bmod \ell$ (係数ごと)をみたす標数ℓのガロア表現

$$\rho_F : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_4(\overline{\mathbb{F}}_\ell) \quad (GSp_4(\overline{\mathbb{F}}_\ell))$$

が存在する。

仮定IはL-packet(L関数が一致する保型表現全体)の問題でありArthurによる跡公式が有力な手段とみなされている。仮定IIは重さ3以上の場合であるが，それから重さ2の場合が従うのは次数1の通常の場合と同様であり，実際に使うのは仮定Iからわかるとおり重さ2の場合である。重さ3以上にすればジーゲル保型多様体を用いて代数幾何的に扱える可能性があるため，この形の仮定にしてある。(次数n，重さ$k \geqq n+1$のジーゲル保型形式Fに対して$L^{spin}(s,F)$は$L(s,H^{nk-\frac{n(n+1)}{2}}(\mathcal{Y}_{n,k}))$の因子と予想される：$\mathcal{Y}_{n,k}$は次数$n$のジーゲル保型多様体$\mathcal{M}_n=\Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}_n$上にアーベル多様体のファミリーを$k-n-1$乗して乗せた$nk-\frac{n(n+1)}{2}$次元のファイバー多様体；L関数の関数等式は

どちらも $s \mapsto nk - \frac{n(n+1)}{2} + 1 - s$。) 仮定I+仮定IIを用いれば定理Bが証明できることは Deligne-Serre [6] の方法を変形すればわかる。なお,仮定IIは次数1から持ち上がっているFに対しては次数1の場合にガロア表現(l進)が Deligne によって構成されているので成立するが,持ち上がっていないある1つの $F = \chi_{20}^{(3)}$ に対して $l = 71$ では成立することがわかっている([7])。

文献

[0] H. Maass: "Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen" Math. Ann. 121 (1949) 141–183.

[1] D. Blasius, L. Clozel and D. Ramakrishnan: "Algébricité de l'action des opérateurs de Hecke sur certains formes de Maass" C. R. Acad. Sci. Paris 305 (1987) 705–708.

[2] 同上: "Opérateurs de Hecke et formes de Maass: application de la formule des traces" C. R. Acad. Sci. Paris 306 (1988) 59–62.

[3] D. Blasius and D. Ramakrishnan: "Maass forms and Galois representations" preprint 1988 April.

[4] Y. Z. Flicker and D. A. Kazhdan: "Geometric Ramanujan conjecture and Drinfeld reciprocity law" preprint 1987 September.

[5] J. Arthur and L. Clozel: Base-change for GL_n, Ann. Math. Studies (1989 ?)

[6] P. Deligne and J-P. Serre: "Formes modulaires de poids 1" Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) 7 (1974) 507–530.

[7] N. Kurokawa: "Congruences between Siegel modular forms of degree two" Proc. Japan Acad. 55A (1979) 417–422.