

$Sp(2; \mathbb{R}) = Sp_4(\mathbb{R})$ の class 1 Whittaker 関数について

東京大学・理学部 織田孝幸

§0. 導入. よく知られているように, k を局所体とし, $GL_2(k)$ の admissible 表現 (既約) (π, H) の Whittaker model を考え, その vector を u とおくと, u は $GL_2(k)$ の split torus 上 2- 積分して Mellin 変換を考えると, π に associate する正しい local L-factor を与えることが知られている. (cf. Jacquet - Langlands [1]).

u を一般化するとは GL_n のときは成功することが知られている. (cf. Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika [2]).

一般の reductive algebraic groups のときは 2 つの困難故に現状では一般にはよくわかっていない. 理論の発展はとてこたっている. 2 つの難点とは:

(i) Whittaker model の存在と一意性の問題が一般にはよくわかっていない. $k = \mathbb{R}$ のときは存在は知られているが (Vogan) この場合は非常に sophisticated な議論が必要. (cf. 例として松本久義氏の仕事).

(ii) 正しい "Mellin 変換" がよくわかった。

ここでは「誤り道」を特別な例についてきちっとたどって、今後の参考にすることを目標とする。この目標もまだ完遂できていないが、できる計算をまとめて中間報告とする。

講演では左如 p 進体のとき、 $Sp(2, k) = Sp_4(k)$ rank 2 の symplectic 群の class 1 Whittaker function の 2重 Mellin 変換 (ie. Whittaker function の 2重 Hecke series といふのが実質的にこれにあたる) を問題にしたが、これについては日仏解析数論シンポジウムの Proceeding に submit したので (cf. Oda [2]), 以下では $k = \mathbb{R}$ 実数体とし、このとき class 1 の Whittaker functions とする Mellin 変換 (2重の) について、いくつかの計算をしたのでこれをまとめる。

計算の check のために REDUCE を使った。設計・制作者に感謝する。

Whittaker 関数の Mellin 変換は微分方程式より差分方程式と見なすことは、青本先生に示唆された。深く感謝します。

例1. $Sp(2; \mathbb{R})$ に関連した記号と Jacquet vector の定義

$$Sp(2; \mathbb{R}) := \{ g \in M_4(\mathbb{R}) \mid {}^t g J g = J ; J = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \}$$

とある。 $Sp(2; \mathbb{R})$ の minimal parabolic subgroup π は、 $\pi \subset \bar{\pi}$ は

$$P_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \hline 0 & & * & * \\ * & * & & * \end{array} \right) \in Sp(2; \mathbb{R}) \right\}$$

とある。 P_0 の unipotent radical は

$$N_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ \hline 0 & & 1 & 0 \\ * & * & & * \end{array} \right) \in P_0 \right\}$$

とある。 N_0 の任意の元は

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * & * \\ \hline 0 & & 1 & 0 \\ * & * & & * \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} & & n_1 & n_2 \\ & & n_2 & n_3 \\ \hline & & & 1_2 \end{array} \right)$$

の形の積として表わされる。

$$K = Sp(2; \mathbb{R}) \cap O(4) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) \mid A + \sqrt{-1}B \in U(2) \right\}$$

とあり、

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array} \right) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

とある。 Iwasawa 分解

$$Sp(2; \mathbb{R}) = N_0 A K$$

とある。

N_0 の \mathbb{Z} -ワリ-指標 ψ_0 を

$$\psi_0 \left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & & 1 & 0 \\ & & -n_0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1_2 & n_1 & n_2 & \\ & n_2 & n_3 & \\ \hline 0 & & & 1_2 \end{array} \right) \right) = \exp[2\pi i (n_0 + n_3)]$$

で定義する。明らかなに ψ_0 は N_0 の交換子群 $[N_0, N_0]$ 上では trivial。

$$A_+ = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array} \right) \mid a_1 > 0, a_2 > 0 \right\}$$

の \mathbb{Z} -ワリ-指標 を

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array} \right) \longmapsto \begin{matrix} i\nu_1 & i\nu_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \quad (\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R})$$

で定め、これは $\left(\begin{array}{c|c} \varepsilon & \eta \\ \hline \varepsilon^{-1} & \eta^{-1} \end{array} \right)$ ($\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1$) 上 trivial

として、 A に延長し、 \pm に N_0 上 trivial として、 $N_0 A$ の

\mathbb{Z} -ワリ-指標とし、 $G = Sp(2; \mathbb{R})$ に \mathbb{Z} -ワリ-に induce

して得られる G の \mathbb{Z} -ワリ-表現 $\pi_{(\nu_1, \nu_2)}$ を考へる。これは

principal \mathbb{Z} -series といふべき表現である。 $\pi_{(\nu_1, \nu_2)}$ は class 1

の表現で (既約でない限り)、scalar (零を除く) で unique な K -不変

ベクトルがある。 N_0 の指標 ψ_0 に対する $\pi_{(\nu_1, \nu_2)}$ の Whittaker

model の中での K -invariant vector は次のように計算される。

(cf. Jacquet [4])

$\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{Z} -ワリ-指標とす。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \mathfrak{a} \mathfrak{k}$ ($\mathfrak{n} \in N_0, \mathfrak{a} \in A_+, \mathfrak{k} \in K$) に対して

$$\varphi(g) = \varphi(nak) = \varphi(na) = \varphi(a) = a_1^{i\nu_1} a_2^{i\nu_2}$$

$$\text{例 1} \quad a = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline a_1^{-1} & a_2^{-1} \end{array} \right) \in A_+.$$

$$w_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1_z \\ \hline -1_z & 0 \end{array} \right) \in Sp(z; \mathbb{R}) \text{ の Weyl 群 } \text{ の longest element } \varepsilon,$$

$$\varphi_{w_0}(g) = \varphi(w_0 g)$$

と表す。

$$(*) \quad W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(g) = \int_{N_0} \varphi_{w_0}(ng) \overline{\psi_0(n)} \, dn.$$

$z = z^n \, dn$ は N_0 上の Haar measure.

$W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(g)$ は $W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(ng_0) = \psi_0(n) W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(g)$ と表すことができる。これは右の K -invariant であるから、 A_+ 上の値を計算し直すことができる。これは次の積分表示である。

$$g = n_g \cdot a \cdot k_g \quad (n_g \in N_0, a \in A_+, k_g \in K)$$

と表現分解 (2.4.6) と表す。

$$\begin{aligned} \varphi_{w_0}(ng) &= \varphi(w_0 ng) = \varphi(w_0 n n_g a) \\ &= \varphi(w_0 a a^{-1} n n_g a) = \varphi(w_0 a w_0^{-1} w_0 \cdot a^{-1} n n_g a) \\ &= (w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} \varphi_{w_0}(a^{-1} n n_g a) \end{aligned}$$

$$\text{例 1} \quad w_0 a w_0^{-1} = a' = \left(\begin{array}{c|c} a'_1 & a'_2 \\ \hline a_1'^{-1} & a_2'^{-1} \end{array} \right) \text{ と表すことができる。}$$

$$(w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} = (a'_1)^{i\nu_1} (a'_2)^{i\nu_2} \text{ と表すことができる。}$$

$$g = a \quad \text{i.e.} \quad n_g = 1 \quad \text{と} \quad (7).$$

$$(\star) \quad W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(a) := \int_{N_0} \varphi_{\omega_0}(n n_g) \overline{\psi(n)} \, dn$$

$$= (\omega_0 a \omega_0^{-1})^{i\nu} \int_{N_0} \varphi_{\omega_0}(a^{-1} n a) \, dn.$$

と (5) 12 $\omega_0(a^{-1} n a)$ は Iwasawa 分解 (7),

$$\omega_0(a^{-1} n a) = \tilde{n} \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{k} \quad (\tilde{n} \in N_0, \tilde{a} \in A_+, \tilde{k} \in K)$$

と (1), $\tilde{a} \in a \in n$ の関数として $\tilde{a} = \tilde{a}(a, n)$ と書くと,

$$\varphi_{\omega_0}(a^{-1} n a) = \tilde{a}(a, n)^{i\nu}$$

より,

$$(\star)'' \quad W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(a) = (\omega_0 a \omega_0^{-1})^{i\nu} \int_{N_0} \tilde{a}(a, n)^{i\nu} \, dn$$

と (1) の積分表示をえらう。

(\star) の積分表示で得られる G 上の関数 $W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(g)$ を主系列表現 $\pi_{(\nu_1, \nu_2)}$ に対応する Jacquet vector とする。

$$a = \left(\begin{array}{cc|cc} t_1 & t_2 & & \\ \hline & & t_1^{-1} & t_2^{-1} \end{array} \right) \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 > 0, t_2 > 0) \quad a \in \pm W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(a) \in$$

$W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(t_1, t_2)$ と書く。参考資料 (12) (\star)'' の "explicit な" 形を求め

てみる。結果は次の形である。

$$W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2) = t_1^{v_1} t_2^{v_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\left\{ t_1^4 t_2^2 + t_2^2 n_1^2 + t_1^2 n_2^2 + 2n_0 n_2 (t_2^2 n_1 + t_1^2 n_3) + n_0^2 (t_1^2 t_2^4 + t_2^2 n_2^2 + t_1^2 n_3^2) \right\}^{-\frac{(v_1 - v_2)}{2}}$$

$$\times \left\{ t_1^4 t_2^4 + t_2^4 n_1^2 + 2t_1^2 t_2^2 n_2^2 + t_1^4 n_3^2 + (n_2 - n_1 n_3)^2 \right\}^{-\frac{v_2}{2}}$$

$$\times \exp\left[(-2\pi i)(n_0 + n_3)\right] \cdot dn_0 \, dn_1 \, dn_2 \, dn_3$$

(但し $(n_0, n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^4$ を動かす.)

さて $Sp(2; \mathbb{R})$ の Lie 環 \mathfrak{g} の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ の center は 2 次の元 (Casimir operator) と 4 次の元 2 つで生成される \mathbb{R} 上の 2 変数多項式環となる。 $W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2)$ はこれらの元の同時固有関数となる。これを (t_1, t_2) という parameter に explicit に書き表わしてやろう。これは次節と同様である。

§ 2. $U(\mathfrak{g})$ の center の generators と, Jacquet vector のための微分方程式。

$Sp(2; \mathbb{R})$ の Lie 環の basis は次のように定める。

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}; \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) ; \quad X_{-4} = {}^t X_4 ;$$

$$X_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right) ; \quad X_{-3} = {}^t X_3 ;$$

$$X_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) ; \quad X_{-2} = {}^t X_2 ;$$

$$X_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) ; \quad X_{-1} = {}^t X_1 ;$$

すると \mathfrak{g} の Casimir operator は $U(\mathfrak{g})$ の λ の $\bar{\lambda}$ の scalar である。

$$\lambda(L_1) = H_1^2 + H_2^2 + 6H_1 + 2H_2 + 8X_{-4}X_4 + 4X_{-3}X_3 + 8X_{-2}X_2 + 4X_{-1}X_1.$$

$$= H_1^2 + H_2^2 + 4(X_4X_{-4} + X_{-4}X_4) + 2(X_3X_{-3} + X_{-3}X_3) + 4(X_2X_{-2} + X_{-2}X_2) + 2(X_1X_{-1} + X_{-1}X_1).$$

Jacquet vector は 右 K -不変で、左 $[N_0, N_0]$ 不変であるから、 $U(\mathfrak{g})$ の $\bar{\lambda}$ ε に作用させて $U(\mathfrak{g})/(K \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$ は Jacquet vector ε annihilate する。但し ε は K の Lie 環 \mathfrak{n} は N_0 の Lie 環。よって $\lambda(L_1)$ の Jacquet vector ε の作用をみると、 $\lambda(L_1) \varepsilon \in \text{mod } U(\mathfrak{g})/(K \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$ であることが分かる。

Lemma 1 $\lambda(L_1) \equiv H_1^2 + H_2^2 - 6H_1 - 2H_2 + 8X_2^2 + 4X_1^2 \pmod{U(\mathfrak{g})/(K \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])}$

次のことは容易にわかる。

Formula 1 $F(t_1, t_2) = W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(t_1, t_2)$ とおくと,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 F = t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2}; \\ H_2 F = t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2}; \\ X_4 F = X_3 F = 0; \\ X_2 F = (2\pi i) t_2^2 F; \\ X_1 F = (2\pi i) t_1 t_2^{-1} F. \end{array} \right.$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda(L_1) F &= t_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} \\ &\quad - (8\pi^2 \cdot t_1^2 t_2^{-2} + 16\pi^2 \cdot t_2^4) F. \end{aligned}$$

他方 F の全系列表現に属する λ より $\frac{1}{2} \lambda(L_1) F = [(\nu_1 - 2)^2 + (\nu_2 - 1)^2 - 5] F$ とおくと F の両辺を比較して得る。

Proposition 1 $F(t_1, t_2) = W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(t_1, t_2)$ は λ の 2 階の

微分方程式を満たす:

$$\begin{aligned} &t_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} - 8\pi^2 \left(\frac{t_1^2}{t_2^2} + 2t_2^4 \right) F \\ &= [(\nu_1 - 2)^2 + (\nu_2 - 1)^2 - 5] F. \quad \text{--- (式 1)} \end{aligned}$$

±2 $U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ の \mathbb{C} 上の 4 次元の生成元 12 つ u_i は 中島匠一氏 [2] の explicit formula を用いた (cf. [5])

Lemma 2. $\lambda(L_2)$ は $Z(\mathfrak{g})$ の 4 次元の \mathbb{C} 上の生成元 u_i である。

$$\begin{aligned}
 \lambda(L_2) = & 16 X_4^2 X_{-4}^2 + 16 X_4 X_3 X_{-3} X_{-4} \\
 & - 32 X_4 X_2 X_{-2} X_{-4} + 16 X_3^2 X_{-2} X_{-4} \\
 & + 16 X_4 X_1 X_{-1} X_{-4} + 8 X_4 H_2 H_1 X_{-4} \\
 & + 8 X_3 X_1 (H_1 - H_2) X_{-4} - 16 X_2 X_1^2 X_{-4} \\
 & + 16 X_4 X_2 X_{-3}^2 + 16 X_3 X_2 X_{-2} X_{-3} \\
 & + 8 X_4 (H_1 - H_2) X_{-1} X_{-3} + 4 X_3 H_2^2 X_{-3} \\
 & + 8 X_2 X_1 (H_1 + H_2) X_{-3} + 16 X_2^2 X_{-2}^2 \\
 & - 16 X_4 X_{-1}^2 X_{-2} + 8 X_3 (H_1 + H_2) X_{-1} X_{-2} \\
 & + 16 X_2 X_1 X_{-1} X_{-2} - 8 X_2 H_2 H_1 X_{-2} \\
 & + 4 X_1 H_1^2 X_{-1} + H_1^2 H_2^2 \\
 & + 16 X_4 H_1 X_{-4} - 32 X_4 H_2 X_{-4} - 32 X_3 X_1 X_{-4} \\
 & - 32 X_4 X_{-1} X_{-3} + 8 X_3 H_1 X_{-3} - 16 X_2 X_1 X_{-3} \\
 & - 16 X_3 X_{-1} X_{-2} + 16 X_2 (H_1 + H_2) X_{-2} \\
 & - 24 X_1 H_1 X_{-1} - 2 H_1^2 H_2 - 6 H_1 H_2^2 \\
 & - 48 X_4 X_{-4} - 24 X_3 X_{-3} - 48 X_2 X_{-2} \\
 & + 24 X_1 X_{-1} - 2 H_1^2 + 12 H_1 H_2 + 6 H_2^2 \\
 & + 12 H_1 - 12 H_2
 \end{aligned}$$

長い計算のおかげに (計算が"あ"る"だけ"は"いい!)、証明終了

Lemma 3 modulo $V(y) (\mathbb{K} \oplus [\pi, \pi])$ 7"

$$\begin{aligned} \lambda(L_2) \equiv & H_1^2 H_2^2 - 2H_1^2 H_2 - 6H_1 H_2^2 - 2H_1^2 + 12H_1 H_2 \\ & + 6H_2^2 + 12H_1 - 12H_2 \\ & + 4H_1^2 X_1^2 - 8H_1 H_2 X_2^2 + 16X_2^4 + 16X_1^2 X_2^2 \\ & - 24H_1 X_1^2 - 8H_1 X_2^2 + 40H_2 X_2^2 \\ & + 48X_2^2 + 24X_1^2. \end{aligned}$$

他方 $F(t_1, t_2) = W_{40}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2)$ に $\lambda(L_2)$ の作用を $F(t_1, t_2)$ の
基底表現に照らして (7" のことを使) 計算すると

$$\begin{aligned} \lambda(L_2) F &= (v_1 + v_2)^2 (v_1 - v_2)^2 - 2(v_1 + v_2)^2 (v_1 - v_2) \\ &- 6(v_1 + v_2)(v_1 - v_2)^2 - 2(v_1 + v_2)^2 + 12(v_1 + v_2)(v_1 - v_2) \\ &+ 6(v_1 - v_2)^2 + 24v_2 \\ &= (v_1 + v_2 - 3)^2 (v_1 - v_2 - 1)^2 - 3(v_1 + v_2 - 3)^2 - 3(v_1 - v_2 - 1)^2 \\ &+ 24. \end{aligned}$$

これより, F の満たす4階の微分方程式はそのハミルトン形式となる。

Proposition 2. $F(t_1, t_2) = W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2)$ とおくと, F は

$$\begin{aligned}
 & t_1^4 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} - 2 t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} + t_2^4 \frac{\partial^4 F}{\partial t_2^4} \\
 & - 2 t_1^3 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^3} + 2 t_1^2 t_2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^2 \partial t_2} + 6 t_1 t_2^2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_2^2} + 2 t_2^3 \frac{\partial^3 F}{\partial t_2^3} \\
 & - t_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - 6 t_1 t_2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} - 13 t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} \\
 & + 9 t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} + 13 t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} \\
 & + 16 \frac{\pi^2}{t_2^2} \left\{ -t_1^4 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 2 t_1^2 t_2^6 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - 2 t_1^3 t_2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \\
 & \quad \left. - t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 2 t_2^8 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} \right. \\
 & + 5 t_1^3 \frac{\partial F}{\partial t_1} - 6 t_1 t_2^6 \frac{\partial F}{\partial t_1} + 5 t_1^2 t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} - 6 t_2^7 \frac{\partial F}{\partial t_2} \\
 & + 16 \pi^2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^4 \cdot F + 16 \pi^2 \cdot t_2^{10} \cdot F - 6 t_1^2 \cdot F + 4 t_2^6 F \\
 & = \left\{ (v_1 + v_2 - 3)(\gamma_1 - \gamma_2 - 1) \right\}^2 - 3(v_1 + v_2 - 3)^2 - 3(v_1 - v_2 - 1)^2 + 21.
 \end{aligned}$$

35. 左の如く $\lambda(L_2)F$ を与えてゐる。

$\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} \lambda(L_1)^2 - \lambda(L_2) \right\} F$ を計算して少しちがう形の 4 階の

微分方程式の形で簡単に形になる。

Proposition 2'. F is Proposition 2 & 10) (1) & 73. \therefore

$$\begin{aligned}
 & t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} - t_1^2 t_2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^2 \partial t_2} - 3 t_1 t_2^2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_2^2} \\
 & + 3 t_1 t_2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} + 3 t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3 t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} \\
 & + 8 \pi^2 \left\{ t_1^3 t_2^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} - 2 t_1^2 t_2^4 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right. \\
 & \quad - 2 t_1^3 t_2^{-2} \frac{\partial F}{\partial t_1} + 6 t_1 t_2^4 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_1^2 t_2^{-1} \frac{\partial F}{\partial t_2} \\
 & \quad \left. + 2 \pi^2 t_1^4 t_2^{-4} F + 2 t_1^2 t_2^{-2} F - 6 t_2^4 F \right\} \\
 & = (\nu_1 - 1)(\nu_1 - 3)(\nu_2)(\nu_2 - 2) \cdot F.
 \end{aligned}$$

$\therefore t_1 = u_1 u_2, t_2 = u_2$ として変数変換をす。

$$F(t_1, t_2) = F(u_1 u_2, u_2) = W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)} \left(\left(\begin{array}{c|c} u_1 u_2 & \\ \hline & u_2 \\ \hline & u_1^{-1} u_2^{-1} \\ & u_2^{-1} \end{array} \right) \right).$$

$\therefore s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ $\therefore \operatorname{Re} s_1 \gg 0, \operatorname{Re} s_2 \gg 0$ 12 対して

double Mellin transformation

$$\varphi(s_1, s_2) \stackrel{\text{defn}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty F(u_1 u_2, u_2) \cdot u_1^{s_1} \cdot u_2^{s_2} \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2}$$

を考へる。Whittaker functions の Jacquet vector は $u_1 \rightarrow \infty$

$u_2 \rightarrow 0$ \therefore 早く (減少する) $\operatorname{Re} s_1 > 0, \operatorname{Re} s_2 > 0$ \therefore 上の積分は

収束する。 $\varphi(s_1, s_2)$ は $\operatorname{Re} s_1 > 0, \operatorname{Re} s_2 > 0$ で正則。

§ 3. Jacquet vector の Mellin 変換 により得る 差分方程式。

前節の Proposition 1, 2 と, 部分積分を用いて $\varphi(s_1, s_2)$ は次の 2 つの差分方程式をみたす。

Theorem 1.

$$(i) \quad \left[(2s_1^2 + 4s_2 - 2s_1s_2 + s_2^2 + 2s_2) - \{(\nu_1 - 2)^2 + (\nu_2 - 1)^2 - 5\} \right] \\ \times \varphi(s_1, s_2) = 8\pi^2 \{ \varphi(s_1 + 2, s_2) + 2\varphi(s_1, s_2 + 4) \}$$

$$(ii) \quad (s_1 + 1)(s_1 + 3)(s_1 - s_2)(s_1 - s_2 - 2)\varphi(s_1, s_2) \\ + 8\pi^2 \{ (-s_1^2 + s_1s_2 + 2s_1 + s_2 + 2)\varphi(s_1 + 2, s_2) \\ + (-2)(s_1 + 1)(s_1 + 3)\varphi(s_1, s_2 + 4) + 2\pi^2\varphi(s_1 + 4, s_2) \} \\ = (\nu_1 - 1)(\nu_1 - 3)(\nu_2 - 2)\nu_2 \cdot \varphi(s_1, s_2)$$

□

上の式 (i) と (ii) に $s_1 \leftarrow s_1 + 2$,

$$(-1)\{s_1 + 2 + (\nu_1 - 2)\} \cdot \{s_1 + 2 - (\nu_1 - 2)\} \{s_1 + 2 - (\nu_2 - 1)\} \{s_1 + 2 + (\nu_2 - 1)\} \\ \times \varphi(s_1, s_2) + 8\pi^2 \left[\{(s_1 + 1)(s_2 + 6) - 1\} \right] \varphi(s_1 + 2, s_2) \\ + 16\pi^4 \varphi(s_1 + 4, s_2) = 0.$$

これより, $\varphi(s_1, s_2)$ は $\operatorname{Re} s_2 > 0$ の領域では有理型に延長できる. s_1 に関する poles の場所は

$$\pi^{-s_1} \Gamma\left(\frac{s_1+2+(v_1-2)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1+2-(v_1-2)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1+2+(v_2-1)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1+2-(v_2-1)}{2}\right)$$

と同じである. 但し $\Gamma(\cdot)$ は Γ -関数.

以下ここではやりとせぬが, 右方面の問題をみる.

\mathbb{R} 上の話 (と, p -進体上の話) には並行性がある. たとえば \mathbb{Z} の対称である.

\mathbb{R}	\mathbb{Q}_p
$\pi^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$	$1 - p^{-s}$

これに導かれ, Hecke series for Whittaker function の explicit formula から $\varphi(s_1, s_2)$ の形を推測できる. (cf. [3])

Problem 1 $\varphi(s_1, s_2)$ は

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, s_2) = & \Gamma\left(\frac{s_1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(v_1-2)\right) \Gamma\left(\frac{s_1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(v_1-2)\right) \Gamma\left(\frac{s_1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(v_2-1)\right) \Gamma\left(\frac{s_1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(v_2-1)\right) \\ & \times \Gamma\left(\frac{s_2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{(v_1-2) + (v_2-1)\}\right) \times \Gamma\left(\frac{s_2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{-(v_1-2) + (v_2-1)\}\right) \\ & \times \Gamma\left(\frac{s_2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{(v_1-2) - (v_2-1)\}\right) \times \Gamma\left(\frac{s_2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{-(v_1-2) - (v_2-1)\}\right) \\ & \times \Delta(s_1, s_2) \quad \text{と, } \Delta(s_1, s_2) \text{ は } (s_1, s_2) \text{ の entire function} \\ & \text{の形を導ける (cf. [3]).} \end{aligned}$$

Problem 1 は多分それほどのむづかしくなっていない。

Problem 2 . $\Delta(s_1, s_2)$ の零点を決定せよ。

Problem 2 は N_0 が abel でないことを反映して、
 Goodman - Wallach operator が非常に複雑になるから
 簡単にはできないと思われる。 $\Delta(s_1, s_2)$ がよくわかれば、
 逆 Mellin 変換によつて $W_{\chi_0}^{(y_1, y_2)}(z_1, z_2)$ に対して、
 z_1, z_2 の Whittaker function に対する Barnes の積分表示の
 類似物が得られることになるから。

$\varphi(s_1, s_2)$ が \mathbb{R} での "一般化 Euler factor" (すなわち "一般化
 P -factor) であるのは $\varphi(s_1, s_2)$ が P -関数の積で表される
 ことができることに理由がある。

References

- [1] Jacquet, H. & Langlands, R.: Automorphic forms on $GL(2)$. Springer LNM.
- [2] Jacquet, H. Piatetski-Shapiro, I.I., & Shalika, J.: Automorphic forms on $GL(3)$. Annals of Math. 109 (1979)
- [3] Oda, T.: Multiple Hecke series for class-1 Whittaker functions on $GL(n)$ over p -adic fields. Preprint.
- [4] Jacquet, H.: Fonctions de Whittaker associees aux groupes de Chevalley. Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 243-309.
- [5]. 中島匠一: 東京大学大学院修士論文。