

積分方程式法による粘性流れ問題の近似解析

Numerical Analysis of Viscous Fluid Flow

Problems Using Integral Equation Methods

日大生産工 登坂宣好 (Nobuyoshi Tosaka)

日大生産工 角田和彦 (Kazuhiko Kakuda)

Abstract

In this paper, three kinds of the integral equation approaches of the Navier-Stokes equations or the Burgers' equation for viscous fluid are presented. The first approach which is the so-called hybrid-type is based on the use of fundamental solution for the only linear differential operator of the equations. The second one is based on applying the time splitting method to the equations. The third one is the new approach based on the generalized boundary element method. The workability and the effectiveness of the proposed methods are demonstrated by several examples.

1. はじめに

Navier-Stokes 方程式によって支配されている粘性流体の非定常流れの現象を明らかにすることは、工学、理学等の種々の分野において重要な問題である。この問題は、近年のコンピュータの発達に伴い、現実に近い流れの問題が種々の数値計算手法を利用することにより解明されるようになってきた。組織的で汎用性のある数値計算手法としては、差分法¹⁻³や有限要素法^{4,5}が多用されている。また、積分方程式の組織的な数値計算手法である境界要素法あるいは積分方程式法による粘性流れ問題の解析も盛んに進められつつある。⁶⁻¹⁶

本論では、Navier-Stokes 方程式あるいは1次元の粘性流れ問題として知られているBurgers'方程式の初期値-境界値問題に対して、これまで発表してきた原始関数法の立場に基づいた積分方程式法による3つの解法についてまとめたものである。⁹⁻¹⁶ 第1の解法は、非線形積分方程式の離散化に当たり、境界のみならず内部領域についての離散化も行うという立場から提案されたHybrid型積分方程式法である。⁹⁻¹³ ここでは、その積分方程式の導出に当たり Navier-Stokes 方程式あるいはBurgers'方程式の線形微分作用素のみに対する基本解が採用される。得られた非線形の離散化方程式を解くためにNewton-Raphson法等の計算スキームが適用され、 10^4 程

度迄の Reynolds 数に関する非定常粘性流れの問題が解析されている。第 2 の解法は、Navier-Stokes 方程式あるいは Burgers' 方程式に対し、時間分割法⁴を適用した場合に得られる移流方程式と Stokes 方程式あるいは 1 次元の拡散方程式を基本微分方程式とする立場である。ここでは、まず移流方程式に関する積分方程式が単純な繰返し計算スキームにより解かれ、この解を初期値として Stokes 方程式あるいは拡散方程式に関する積分方程式は線形の solver を用いることにより解かれる。第 3 の解法は、一般的な非線形問題に関して新たに開発された積分方程式法である¹⁴⁻¹⁶。ここでは、基本微分方程式である Navier-Stokes 方程式あるいは Burgers' 方程式が部分領域内で線形化され、その方程式に関する準非線形の積分方程式が導出される。また、各々の部分領域内での離散化方程式は全体領域にわたって組み立てられ、得られた準非線形の離散化方程式は単純な陰的繰返し計算スキームにより解かれる。

幾つかの具体的な数値計算例を通して、上述の 3 つの解法の適用性及び有効性を示す。

以下の定式化に当たり、記号 $(,)$ と $(\cdot)$ はそれぞれ空間変数と時間変数に関する偏微分を表わし、また指標についてはアインシュタインの総和規約をとるものとした。

2. 初期値—境界値問題

先ず、Navier-Stokes方程式によって支配されている2次元の非定常非圧縮性粘性流れの問題を考える。対象とする粘性流れ場の解析領域を Ω 、その境界を Γ ($\equiv \Gamma_u \cup \Gamma_\tau$) とする。ただし、 Γ_u は流速が与えられている境界、 Γ_τ はトラクションが与えられている境界である。また、時間領域は J ($\equiv [0, s]$) で表わすものとする。

この問題に対する基本微分方程式は、無次元の流速成分 u_i と圧力 p に関して以下のように与えられる。

運動方程式

$$Re (\dot{u}_i + u_j u_{i,j}) = \tau_{ij,j} \quad \text{in } J \times \Omega \quad (1)$$

連続の方程式

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } J \times \Omega \quad (2)$$

構成方程式

$$\tau_{ij} = -Re p \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} \quad \text{in } J \times \Omega \quad (3)$$

ただし、 Re は Reynolds 数であり、 τ_{ij} は Cauchy 応力テンソルを表わし、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

また、上述の方程式系に付随する境界条件と初期条件は次

式で与えられる。

境界条件

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } T \times \Gamma_u \quad (4)$$

$$\tau_i \equiv \tau_{ij} n_j = \hat{\tau}_i \quad \text{on } T \times \Gamma_\tau \quad (5)$$

初期条件

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = {}_0u_i \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

ただし、 $\hat{u}_i$ は境界 Γ_u 上で与えられている流速ベクトル成分であり、 $\hat{\tau}_i$ は境界 Γ_τ 上で与えられているトラクションベクトル成分である。また、 ${}_0u_i(\mathbf{x})$ は与えられた初期の流速を表わす。

次に、1次元の粘性流れ問題のモデル化として知られている Burgers' 方程式の初期値－境界値問題を考える。その基本微分方程式及び境界条件と初期条件は次のように与えられる。

Burgers' 方程式

$$Re(\dot{u} + uu_{,x}) = u_{,xx} \quad (0 < x < 1) \quad (7)$$

境界条件

$$u(0, t) = a(t) \quad (8)$$

$$u(1, t) = b(t) \quad (9)$$

初期条件

$$u(x, 0) = {}_0u(x) \quad (10)$$

ただし、 $a(t)$ と $b(t)$ は境界点上で与えられた時間に関する関数である。

3. 積分方程式による定式化

ここでは、前節で与えられた初期値—境界値問題 (1)-(6) または (7)-(10) に対し、以下の 3 つの立場に基づいた積分方程式による解法を展開する。

3.1 Hybrid型積分方程式法による解法 (解法 I)

この解法は文献 [9-13] で詳細に述べられており、以下の 3 つの基本的な考え方に基づいている。

- ① 問題 (1)-(6) または (7)-(10) に関する非線形積分方程式は Navier-Stokes 方程式または Burgers' 方程式の線形微分作用素のみに対する基本解を用い、基本微分方程式に関する重みつき残差法の表現から導出される。
- ② 未知量の近似化には、時空間に関する内挿関数が使われる。また、得られた積分方程式は境界のみならず内部要素を用いることにより離散化される。
- ③ 各時間ステップでの離散化方程式を解くために、Newton-Raphson 法の計算スキームが使われる。

問題 (1)-(6) または (7)-(10) に上述の解法を適用し、全て

の境界と内部領域内での未知ベクトルに関して整理することにより、 f 時間ステップでの離散化方程式は次式で与えられる。

$$H \mathbf{u}^{(f)} = G \boldsymbol{\tau}^{(f)} + C \mathbf{u}^{(f-1)} - N(\mathbf{u}^{(f)}) \mathbf{u}^{(f)} \quad (11)$$

ただし、 $\mathbf{u}^{(f)}$ は流速ベクトルであり、 $\boldsymbol{\tau}^{(f)}$ はトラクションベクトルあるいは流速の微分量 (flux) を表わす。また、 H 、 G 、 C はいわゆる係数行列であり、 $N(\mathbf{u}^{(f)})$ は移流項により与えられる行列を表わす。

ここで、2次元問題(1)-(6)に対して上述の方程式系を構成する際に、次の特異微分方程式を満足する基本解 ϕ^* が採用される¹³。

$$\Delta (Re D_t + \Delta) \phi^* = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - s) \quad (12)$$

$$\phi^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = -\frac{H(s-t)}{2\pi Re} \left\{ \log r - \frac{1}{2} E_i(-\alpha r^2) \right\} \quad (13)$$

ただし、 $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 、 $\alpha = Re/4(s-t)$ であり、 $H(s-t)$ と $E_i(-\alpha r^2)$ はそれぞれ Heaviside関数と積分指数関数を表わす。また、その他の諸量は文献[13]に従っている。

一方、1次元問題(7)-(10)に対する基本解 ψ^* には次の拡散型の解が用いられている。

$$\psi^*(x, t; y, s) = -\frac{H(s-t)}{\sqrt{4\pi Re(s-t)}} \exp(-\alpha r^2) \quad (14)$$

ここで、 f 時間ステップでの非線形の離散化方程式(11)を解く際に Newton-Raphson法の計算スキームが適用される。

3.2 時間分割法を利用した解法(解法Ⅱ)

ここでは、式(1)-(3)に時間分割法⁴を適用した次の移流方程式と Stokes方程式を基本微分方程式とする。

移流方程式

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = 0 \quad (15)$$

Stokes方程式

$$Re \dot{u}_i = -Re p_{,j} \delta_{ij} + u_{i,jj} + u_{j,ij} \quad (16)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (17)$$

また、Burgers'方程式(7)に時間分割法を適用した基本式は次式となる。

移流方程式

$$\dot{u} + uu_{,x} = 0 \quad (18)$$

拡散方程式

$$Re \dot{u} = u_{,xx} \quad (19)$$

ここで、移流方程式(15)または(18)に関する積分方程式の

表現を考える。先ず、式(15)に対して線形化された次の移流方程式に関する積分方程式の誘導を示す。

$$\dot{u}_i + \bar{u}_j u_{i,j} = 0 \quad (20)$$

ただし、 $\bar{u}_j$ は対象とする領域内で与えられている流速成分である。

式(20)に関する次の重みつき残差法の表現から出発する。

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\Omega} (\dot{u}_i + \bar{u}_j u_{i,j}) U_{iL}^* d\Omega dt = 0 \quad (21)$$

ただし、 U_{iL}^* は時空間に依存した基本解テンソルである。次に、上式に対し Gauss の発散定理を適用することにより、式(21)は次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{T}} \int_{\Omega} (\dot{U}_{iL}^* + \bar{u}_j U_{iL,j}^*) u_i(\mathbf{x}, t) d\Omega dt \\ &= \int_{\Omega} [u_i U_{iL}^*]_0^s d\Omega \\ &+ \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma} \bar{u}_j u_i U_{iL}^* n_j d\Gamma dt \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、次の特異微分方程式

$$\dot{U}_{iL}^* + \bar{u}_j U_{iL,j}^* = -\delta_{iL} \delta(s-t) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (23)$$

を満足する基本解テンソル U_{iL}^* を採用する。

$$U_{iL}^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = \delta_{iL} H(s-t) \delta\{\mathbf{x} - \mathbf{y} + (s-t)\bar{\mathbf{v}}\}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \bar{u}_j \mathbf{e}^{(j)} \quad (24)$$

ただし、 $\mathbf{e}$ は単位ベクトルである。

式(23)、(24)の関係式を式(22)に代入し、適当な境界条件を考慮することにより次の方程式を得る。

$$u_i(\mathbf{y}, s) = u_i(\mathbf{y} - s\bar{\mathbf{v}}, 0) \quad (25)$$

ここで、式(25)を式(20)に代入すれば、式(25)が1つの解であることがわかる。

同様な議論から、式(15)に対する近似解の表現は次式で与えられる。

$$u_i(\mathbf{y}, s) = u_i(\mathbf{y} - s\mathbf{v}, 0), \quad \mathbf{v} = u_j \mathbf{e}^{(j)} \quad (26)$$

一方、1次元問題に関する式(18)の解の表現は、式(26)で $i, j=1$ と置いた場合に対応している。

また、Stokes方程式(16)、(17)あるいは1次元の拡散方程式(19)は線形であり、その積分方程式は容易に構成される。さらに、離散化方程式は式(11)の線形行列作用素のみから構成される以下の方程式として与えられる。

$$H \mathbf{u}^{(f)} = \mathbf{G} \boldsymbol{\tau}^{(f)} + \mathbf{C} \mathbf{u}^{(f-1)} \quad (27)$$

ここで、先ず式(26)の Δt_f 後の解を単純な繰返し代入法

により求め、得られた解を初期値にして式(27)の Δt_f 後の近似解を求める。⁴

3.3 一般化された境界要素法による解法 (解法Ⅲ)

ここでは、特に、非線形問題に対して新たに開発された境界積分方程式法¹⁴により、式(1)-(6)の初期値-境界値問題に関する積分方程式の表現を示す。¹⁶ また、この解法により式(7)-(10)の Burgers' 方程式を対象とした問題は、高 Reynolds 数域までの解も容易に解析されている。¹⁵

先ず、対象としている領域 Ω の部分領域 Ω_i 内で式(1)-(3)の非線形方程式系を線形化することを考える。得られた方程式系を行列形式⁹で表現すれば次式となる。

$$L_{IJ}(\bar{u}_j) U_J = 0 \quad (I, J=1, 2, 3) \quad \text{in } T \times \Omega_i \quad (28)$$

ただし、 $[L_{IJ}(\bar{u}_j)]$ は線形化された微分作用素行列であり、また $\{U_J\}$ は流速ベクトルと圧力から成る未知ベクトルを表わし、それぞれ以下のように定義している。

$$[L_{IJ}(\bar{u}_j)] \equiv \begin{bmatrix} (-Re D_t - Re \bar{u}_j \cdot D_j + \Delta) \delta_{ik} + D_i D_k & -Re D_k \\ & D_i & 0 \end{bmatrix} \quad (i, j, k=1, 2) \quad (29)$$

$$\{U_J\} \equiv [U_1, U_2, U_3]^T = [u_1, u_2, p]^T \quad (30)$$

ここで、式(28)の線形化された微分作用素行列に対応する基

本解テンソル V_{IL}^* を重み関数として採用し、式(28)の時空間に関する重みつき残差方程式を与える。そこで、Gaussの発散定理を適用し、幾らかの操作をすることにより最終的には以下の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 c_{LK}(\mathbf{y})u_K(\mathbf{y}, s) = & \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_i} u_L(\mathbf{x}, t) \Sigma_{LL}^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\Gamma dt \\
 & - \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_i} \tau_L(\mathbf{x}, t) V_{LL}^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) d\Gamma dt \\
 & + \int_{\Omega_i} [Reu_L(\mathbf{x}, t) V_{LL}^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)]_0^s d\Omega
 \end{aligned} \quad (31)$$

ただし、 $c_{LK}(\mathbf{y})$ は形状係数であり、 Σ_{LL}^* はトラクションベクトル τ_L に対応し、 V_{IL}^* を用いて次のように定義される。

$$\Sigma_{LL}^* \equiv (-V_{3L}^* \delta_{Lj} + Re\bar{u}_j V_{LL}^* + V_{LL,j}^* + V_{jL,L}^*) n_j \quad (32)$$

ここで、基本解テンソル V_{IL}^* を決定するには、次の特異微分方程式を満足する基本解 ϕ^* が用いられる。

$$\Delta (Re D_t + Re \bar{u}_j D_j + \Delta) \phi^* = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - s) \quad (33)$$

$$\phi^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = -\frac{H(s-t)}{2\pi Re} \left\{ \log \tilde{r} - \frac{1}{2} E_i(-\alpha \tilde{r}^2) \right\} \quad (34)$$

ただし、 $\tilde{r} \equiv \{x_j - y_j + (s-t)\bar{u}_j\}^{1/2}$ 。

各部分領域内で式(31)を離散化することにより、次の f 時

間ステップでの要素行列表現式を得る。

$${}_i H(\bar{u}_j) {}_i \mathbf{u}^{(f)} = {}_i G(\bar{u}_j) {}_i \boldsymbol{\tau}^{(f)} + {}_i C(\bar{u}_j) {}_i \mathbf{u}^{(f-1)} \quad (35)$$

ただし、各行列と未知ベクトルの定義は文献[16]に従う。ここで、式(35)を全ての領域について集め、境界条件と初期条件を適用することにより次の準非線形の行列表現式が得られる。

$$\mathbf{A}(\bar{u}_j) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (36)$$

ただし、 $\mathbf{A}(\bar{u}_j)$ は帯状の係数行列であり、 $\mathbf{U}$ は未知ベクトル、 $\mathbf{F}$ は既知ベクトルを表わす。

最後に、式(36)は各時間ステップ毎に単純な繰り返し代入法を適用することにより容易に解かれる。

4. 数値計算例

前節迄に展開してきた積分方程式による3つの解法(I～III)の適用性及び有効性を示すために、以下の2つの非定常流れの問題を考える。

4.1 2次元正方形キャビティ内流れの問題

この問題は解法Iにより解かれる。数値解を求めるに当たり、数値積分公式として境界要素上は Gaussの8点公式、内

部要素には Harmmmer の 7 点公式を採用した。また、収束判定基準値として 10^{-3} (単精度計算) を用いた。初期時間ステップでは、内部領域内の流速を全てゼロとしている。

対象とする境界形状と境界条件及び要素メッシュを図 1 に示す。特に、壁面近傍では流れの状態が激しく変動するために細かく分割している。図 2 は $Re=10^4$ に対する各時間での流速ベクトルの状態を表わしている。その時の流れパターンに対応する等圧力線は図 3 で示す。その計算の際、 $t=18$ 迄 $\Delta t=0.1$ 、 $t=18$ を過ぎてから $\Delta t=0.2$ と置いた。図 4、5 は垂直と水平の中央線での水平方向の流速ベクトル u_1 と垂直方向の流速ベクトル u_2 の挙動をそれぞれ表わしている。得られた結果は、差分解 [2] 及び実験値 [3] と比較されているが、本解は特に実験値と一致している。

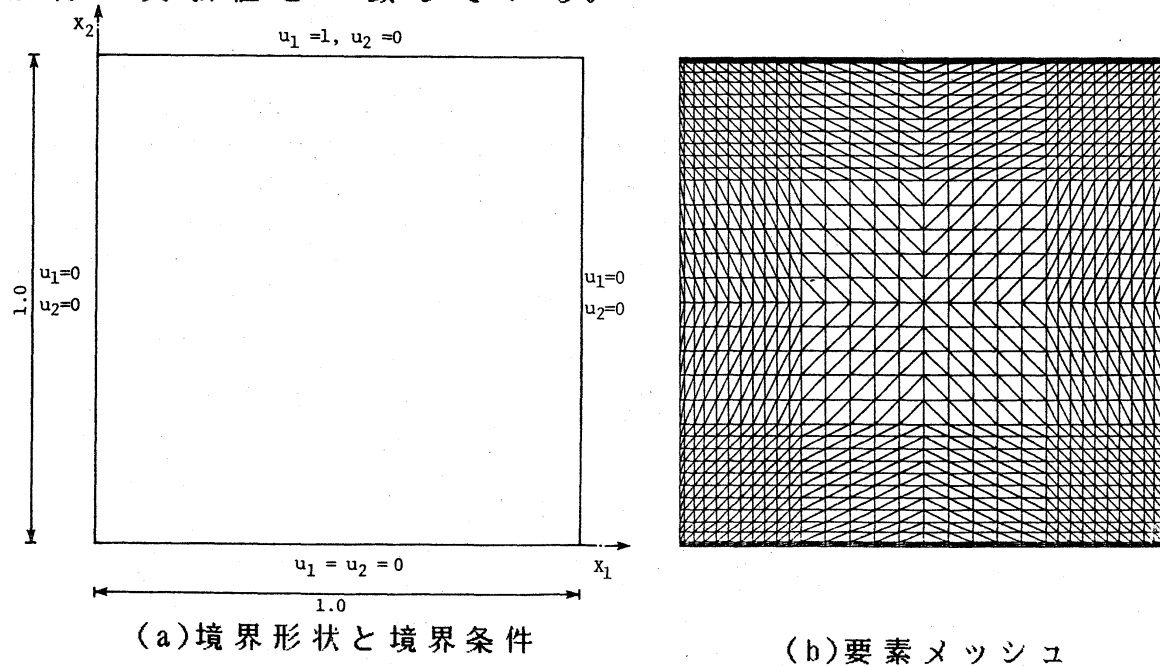
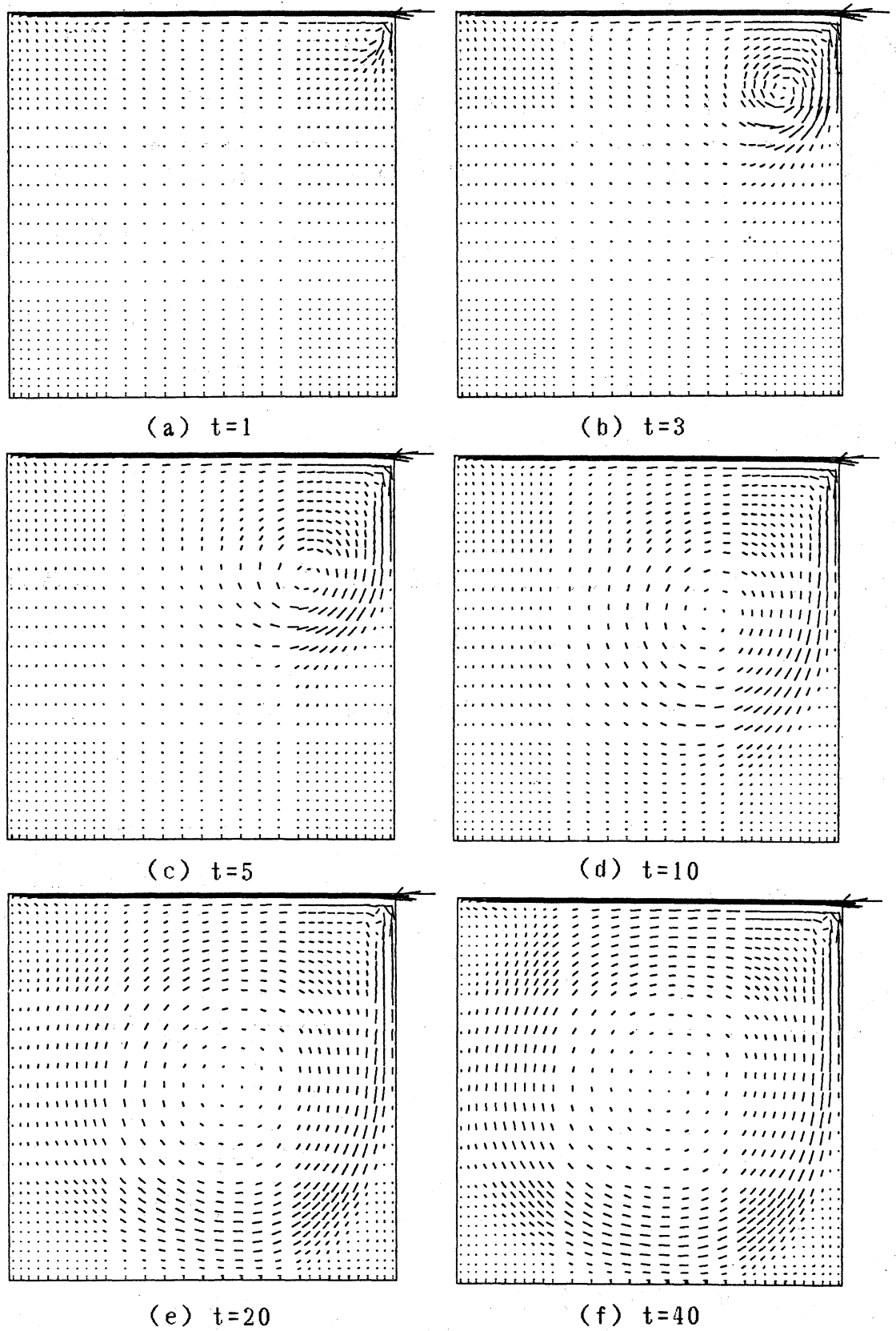


図 1 正方形キャビティ流れの問題

図 2 $Re=10^4$ の流速ベクトル

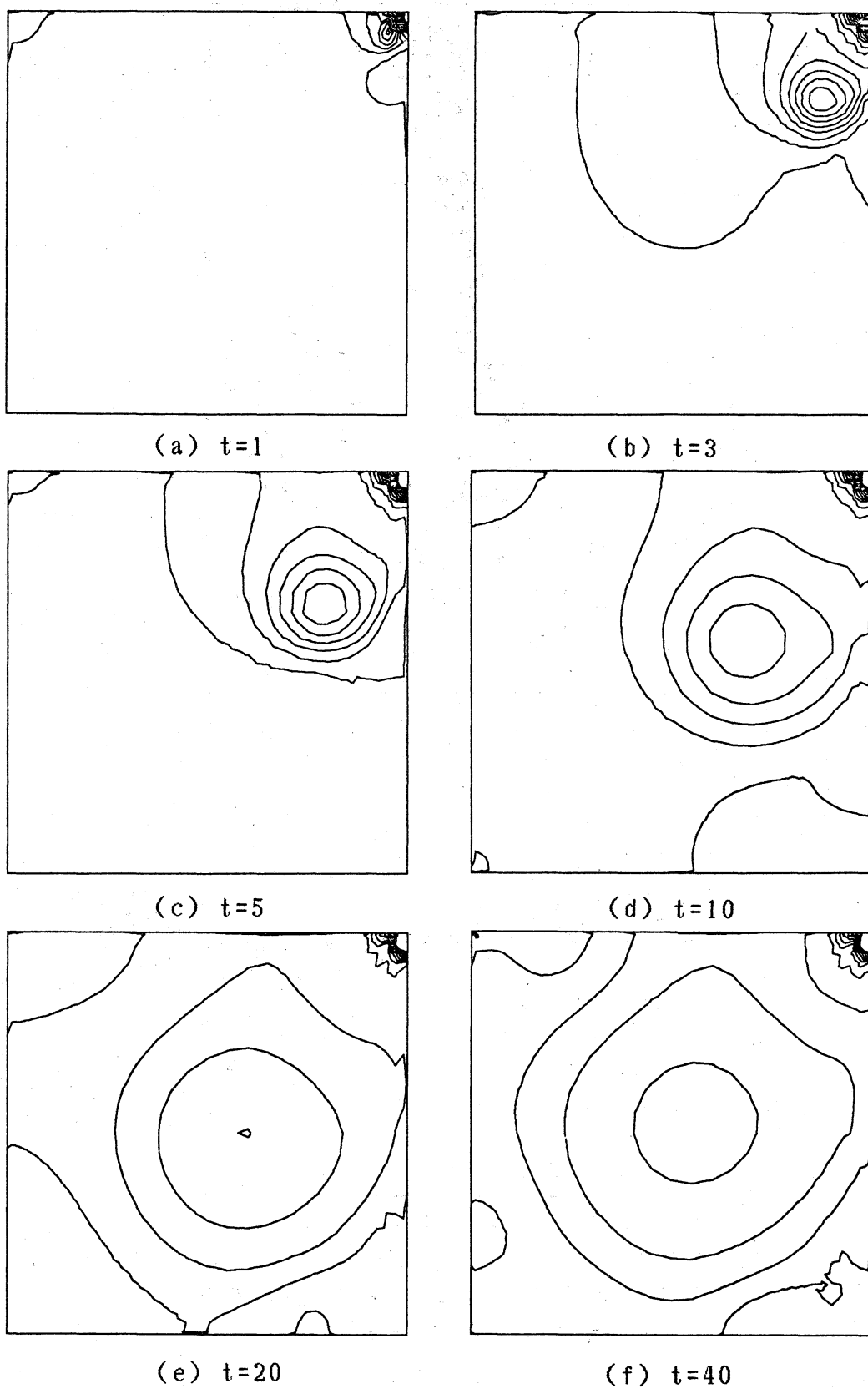


図 3 $Re=10^4$ の等圧力線

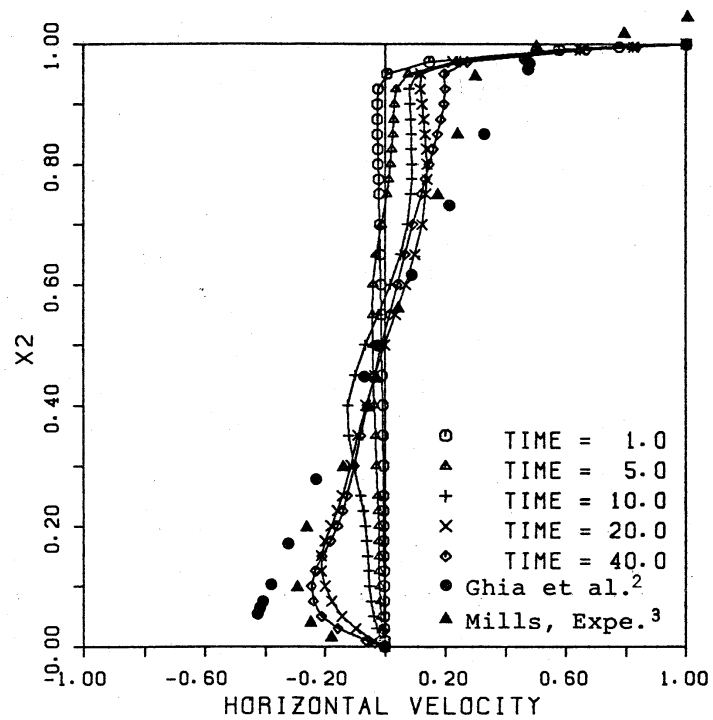


図4 垂直の中央線での水平方向の
流速ベクトル分布

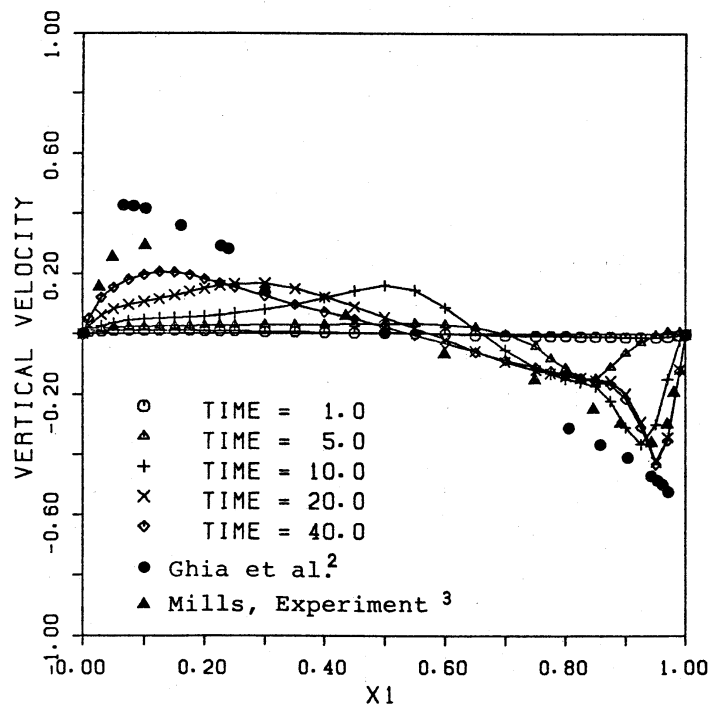


図5 水平の中央線での垂直方向の
流速ベクトル分布

4.2 1次元流れの問題

ここでは、初期値－境界値問題(7)-(10)に対する1次元流れの問題を考える。その具体的な境界条件と初期条件については以下の2種類のCaseを対象としている。

① Case 1

境界条件

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 0 \quad (37)$$

初期条件

$$u(x, 0) = 0 \quad (38)$$

② Case 2

境界条件

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (39)$$

初期条件

$$u(x, 0) = \sin \pi x \quad (40)$$

Case 1の場合については、3つの解法(I～III)について、 $Re=25$ に関する解の精度検証を行う。

表Iは3つの本解法による結果と定常解析の結果¹²及びその厳密解¹⁸とを比較したものである。計算の際に、いずれも分割数は $n=20$ とした。これらの結果を見ると、特に解法IIIが全体的に優れているものと考えられる。

表 I Case 1の数値結果と他の解との比較(Re=25)

x	Present methods(n=20);u(x, ∞)			Steady ¹² solutions (n=20)	Exact ¹⁸ solutions
	I ($\Delta t=1.0$)	II ($\Delta t=0.05$)	III ($\Delta t=0.05$)		
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1	0.99953	0.97703	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	0.99912	0.97823	1.00000	1.00000	1.00000
0.3	0.99882	0.97815	1.00000	1.00000	1.00000
0.4	0.99862	0.97815	1.00000	1.00000	1.00000
0.5	0.99844	0.97813	0.99998	1.00000	0.99999
0.6	0.99815	0.97793	0.99981	0.99997	0.99991
0.7	0.99720	0.97566	0.99799	0.99948	0.99889
0.8	0.98726	0.95047	0.97941	0.99040	0.98661
0.9	0.84215	0.73922	0.80882	0.84677	0.84829
1.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Case 2の場合は、解法Ⅲによって解かれる。数値結果は、
 $Re = 10^4$ と 10^5 に関してそれぞれ図 6、7で示される。特
 に、 $Re=10^5$ に対する数値結果は有限要素解^{19,20}と比較されて
 いる(図 7 参照)。

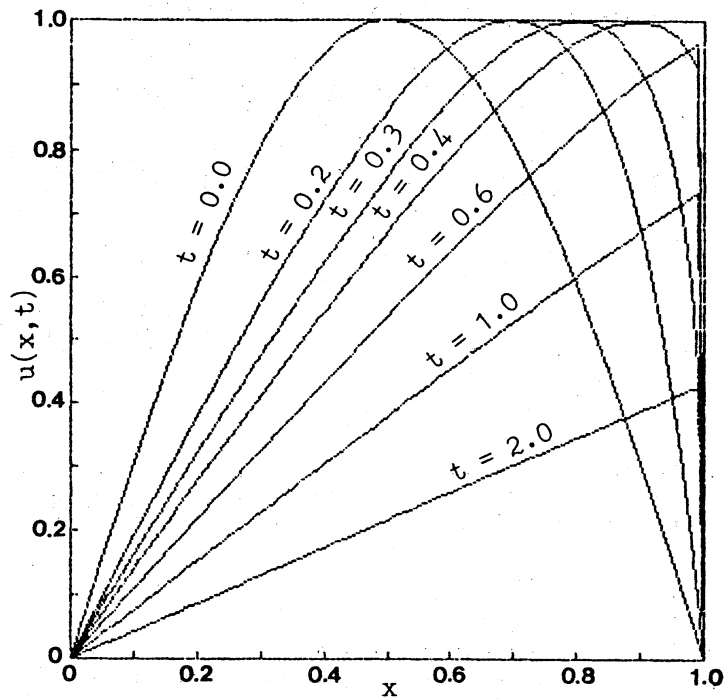


図 6 Case 2の数値結果（解法Ⅲ）：
 $Re=10^4$, $\Delta x=0.01$, $\Delta t=0.01$

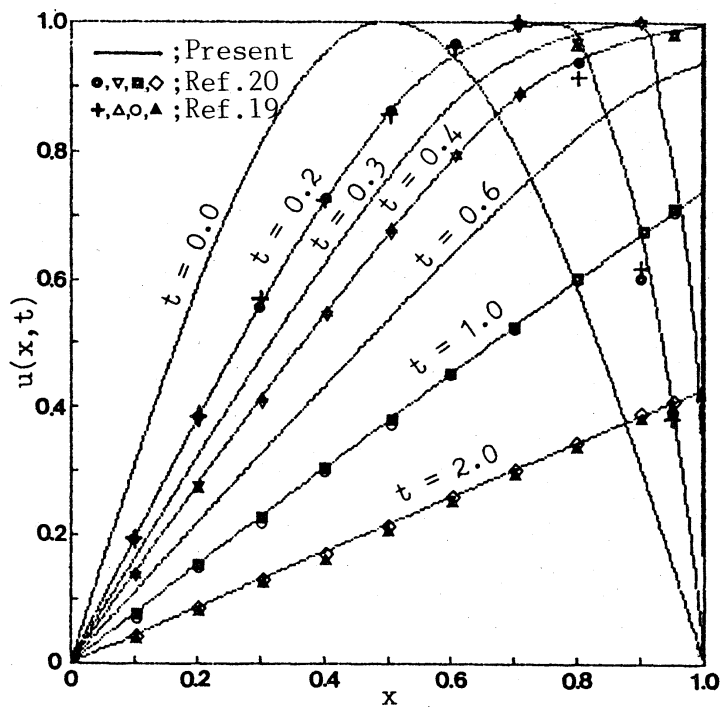


図 7 Case 2の数値結果（解法Ⅲ）：
 $Re=10^5$, $\Delta x=0.005$, $\Delta t=0.005$

5. おわりに

Navier-Stokes 方程式あるいは Burgers' 方程式によって支配されている粘性流体の非定常流れの問題に対し、積分方程式による3つの解法を提示し、その数値計算例を示した。これらの解法は、Hybrid型積分方程式解法（解法Ⅰ）、時間分割法を利用した解法（解法Ⅱ）、一般化された境界要素解法（解法Ⅲ）である。

具体的な数値計算例としては、最初、正方形キャビティ内流れの問題を選び、 $Re=10^4$ という比較的高い Reynolds 数に対する数値シミュレーションを解法Ⅰにより行った。また、差分解及び実験値との比較を通して、本手法Ⅰは精度、安定性ともに優れたものであることを示した。次に、Burgers' 方程式を対象とした1次元粘性流れの問題として解法Ⅰ～Ⅲの精度検証を行った。特に、解法Ⅰ、Ⅲはここで扱った非線形問題だけではなく一般の非線形問題に適応しても有力な手法であると考えている。

以上、積分方程式法により1次元及び2次元粘性流れの問題に関しての議論を行ってきたが、3つの解法とも3次元問題への拡張が容易である。

参考文献

1. Peyret, R. and T.D. Taylor (1983) ; Computational Methods for Fluid Flow, Springer-Verlag.
2. Ghia, U., K.N. Ghia and C.T. Shin (1982) ; High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, J. Comput. Phys. 48, pp.387-411.
3. 武本、阿部、中村 (1984) ; High-Re 数 Cavity flow の乱流シミュレーション, 第5 解流れの有限要素法シンポジウム, pp.233-240.
4. Thomasset, F. (1981) ; Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations Springer-Verlag.
5. Brooks, A.N. and T.J.R. Hughes, (1982) ; Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 32, pp.199-259.
6. Wu, J.C. (1982) ; Problems of General Viscous Flow, Development in Boundary Element Methods 2 (Eds., P. K. Banerjee and R.P. Shaw), Applied Science Pub., 69

7. Onishi, K., T. Kuroki and M. Tanaka (1984) ; An Application of Boundary Element Method to Incompressible Laminar Viscous Flows, Engineering Analysis 1(3), pp.122.
8. Skerget, P., A. Alujevic and C. A. Brebbia (1984) ; The Solution of Navier-Stokes Equations in terms of Vorticity-Velocity Variables by Boundary Elements, Boundary Elements, pp.4/41.
9. 登坂宣好 (1985) ; 粘性流れ問題の積分方程式による定式化、境界要素法論文集 第2巻、pp.155-160.
10. Tosaka N. and Kakuda K. (1986); Numerical Simulations for Incompressible Viscous Flow Problems Using the Integral Equation Methods, in Boundary Elements VIII (Eds., Tanaka M. and Brebbia C. A.), pp.813-822, Springer-Verlag.
11. Tosaka N. and Kakuda K. (1986); Numerical Simulations of the Unsteady-State Incompressible Viscous Flows Using an Integral Equation, in Boundary Elements (Ed. Du Qinghua), pp.163-172, Pergamon Press.
12. 角田, 登坂 (1987) ; 積分方程式法による Burgers' 方程式の定常解析, 境界要素法論文集 第4巻, pp.167-172.

13. Tosaka N.(1988);Integral Equation Formulation with the Primitive Variable for Incompressible Viscous Fluid Flow Problems, Computational Mechanics (in press).
14. Tosaka N. and Kakuda K. (1988) ; The Generalized Boundary Element Method for Nonlinear Problems, in Boundary Elements X (to be appeared).
15. Kakuda K. and Tosaka N. ; The Generalized Boundary Element Approach to Burgers' Equation, (to be appeared).
16. Tosaka N. and Kakuda K. ; The Generalized Boundary Element Method for Incompressible Viscous Flow Problems, (to be appeared).
17. ベ・エス・ウラジミロフ (飯野理一他訳) (1977); 応用偏微分方程式 1、文一総合出版
18. J.D.Cole (1951) ; On a Quasi-Linear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics , Quarterly of Applied Mathematics, 9, pp.225-236.

19. E.Varoğlu and W.D.L.Finn (1980); Space-Time Finite Element Incorporating Characteristics for the Burgers' Equation, Int. J. Num. Meth. Engng., 16, pp.171-184.
20. H.Nguyen and J.Reynen (1984) ; A Space-Time Finite Element Approach to Burgers' Equation,in Numerical Methods for Non-Linear Problems Vol.2 (C.Taylor, E.Hinton and D.R.J.Owen,Eds.), pp.718-728, Proc. Int. Conf., Universitat Politecnica de Barcelona, Spain, Pineridge Press.