

複素ポテンシャルに対する固有関数展開

東大教養 北田 均 (Hitoshi Kitada)

序. 空間次元  $n \geq 2$  の時の Schrödinger 作用素に対する固有関数展開は池部晃生 [1] による結果が最初のものであろう。その後黒田成俊 [2], 加藤敏夫-黒田成俊 [3, 4], Agmon [5] 等によってポテンシャルの減衰に対する仮定が改善された。これらの方法は Schrödinger 作用素  $H = H_0 + V(x) = -\Delta/2 + V(x)$  のリゾルベント  $R(z) = (H - z)^{-1}$  の実軸上への境界値  $R(\mu \pm i0)$  を用い、Lippmann-Schwinger 方程式

$$\phi_{\pm}(x, \xi) = e^{ix\xi} - R_0(\mu \pm i0)V\phi_{\pm}(\cdot, \xi)$$

を解いて、

$$\phi_{\pm}(x, \xi) = (I + R_0(\mu \pm i0)V)^{-1}(e^{ix\xi})$$

と固有関数  $\phi_{\pm}(x, \xi)$  を求めるものである。但し、 $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ .

この方向で望月清 [6] は複素ポテンシャルを論じた。

他方、Jäger[7]は  $(R(\mu \pm i0)f)(x)$  の  $|x| \rightarrow \infty$  の漸近展開の第一項から固有関数が得られることを示した。この方法は斎藤義実[8]、Agmon[9]等によって長距離力まで拡張された。

以上の二方法は、非常にきつい仮定のもとでFadeev方程式を解く場合を除いて（例えば谷島賢二[10]）、本質的に二体問題に限定されるが固有関数、波動作用素の完全性までいえる点では強力な方法である。

本稿では完全性は散乱理論の問題として残し、本質的に波動作用素  $W_{\pm}$  の存在と intertwining propertyのみを仮定して、 $\mathcal{R}(W_{\pm})$  上の固有関数展開を複素ポテンシャルに対し構成する。方法はSchrödinger方程式の基本解  $e^{-itH}$  の  $t \rightarrow \infty$  の漸近挙動（即ち、 $W_{\pm}$  の存在）から、固有関数を  $W_{\pm}$  の積分核として構成するものである。固有関数の性質は intertwining propertyから得られる。この方法の特徴は、微分方程式  $(H-\mu)\phi_{\pm}=0$  の解の存在が波動作用素  $W_{\pm}$  の存在に帰着されることを指摘している点である。

本稿では簡単のため二体短距離力の場合のみ考えるが、少し変更すれば多体や長距離力の場合も同様に扱える。詳細は[11,12,13]を見られたい。なお本稿の方法によれば特異点を持ったポテンシャルも扱える。

([14])

1. 仮定と一般的結果. 考えるSchrödinger作用素は

$$(1) \quad H = H_0 + V(x), \quad H_0 = -\frac{1}{2} \Delta = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \partial^2 / \partial x_j^2, \quad n \geq 1$$

で、ポテンシャル  $V(x)$  は  $\mathbb{C}$ -値でよいが、次の仮定を満たすとする。

仮定 I. 任意の多重指数  $\alpha$  に対し、 $\sup_x |\partial_x^\alpha v(x)| < \infty$ .

この仮定の下に、Schrödinger 方程式

$$(2) \quad (D_t + H)U(t) = 0, \quad U(0) = I \quad (D_t = -i\partial/\partial t)$$

の解  $U(t)$  は、

$$(3) \quad U(t) = e^{-itH_0} \left( I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{\nu-1}} dt_\nu V(t_1) \cdots V(t_\nu) \right),$$

$$V(t) = e^{itH_0} V(x) e^{-itH_0}$$

と一意的に構成され、 $t$  について群をなす。したがって、 $U(t) = e^{-itH}$  と書く。更に仮定より、

$$(4) \quad \|U(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leq e^{Mt} \quad (M > 0, \mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R}^n))$$

だから、 $|\operatorname{Im} z| > M$  なら、 $z$  は  $H$  のリゾルベント集合  $\rho(H)$  に属する。

次の仮定は波動作用素の存在と intertwining property に関するものである。 $E_0(\Delta)$  で  $H_0$  のスペクトル測度を表す。

仮定 II. ある Borel 集合  $\Delta \subset \mathbb{R}^1$  と有界な (直交とは限らない)  $\mathcal{H}$  での

射影作用素  $P_{\pm}(\Delta)$  があって次の i) - v) を満たす :

$$i) \quad P_{\pm}(\Delta)H \subset HP_{\pm}(\Delta).$$

$$ii) \quad \sup_t \|e^{-itH}P_{\pm}(\Delta)\| < \infty.$$

iii) 次の強極限が存在する :

$$W_{\pm}(\Delta) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P_{\pm}(\Delta)e^{itH}e^{-itH_0}E_0(\Delta),$$

$$Y_{\pm}(\Delta) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P_{\pm}(\Delta)^*e^{itH^*}e^{-itH_0}E_0(\Delta).$$

$$iv) \quad W_{\pm}(\Delta)H_0 \subset HW_{\pm}(\Delta), \quad Y_{\pm}(\Delta)H_0 \subset H^*Y_{\pm}(\Delta).$$

$$v) \quad P_{\pm}(\Delta) = W_{\pm}(\Delta)Y_{\pm}(\Delta)^*, \quad E_0(\Delta) = Y_{\pm}(\Delta)^*W_{\pm}(\Delta).$$

$V(x)$  は  $\mathbb{C}$ -値かもしれないので、波動作用素  $W_{\pm}(\Delta)$  は部分等距離作用素とは限らない。しかし、仮定 I I - v) より、 $W_{\pm}(\Delta)|_{E_0(\Delta)\mathcal{H}}$  は可逆で、逆

$Y_{\pm}(\Delta)^*|_{P_{\pm}(\Delta)\mathcal{H}}$  を持つ。特に、

$$(5) \quad \mathcal{R}(W_{\pm}(\Delta) \uparrow_{E_0(\Delta)} \mathcal{H}) = P_{\pm}(\Delta) \mathcal{H}.$$

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_x^n)$  から  $\hat{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R}_{\xi}^n)$  への Fourier 変換を  $\mathcal{F}$  で表し、一般化された Fourier 変換を次で定義する。

$$\text{定義.} \quad \mathcal{F}_{\pm}(\Delta) = \mathcal{F}Y_{\pm}(\Delta)^*, \quad \tilde{\mathcal{F}}_{\pm}(\Delta) = W_{\pm}(\Delta)\mathcal{F}^{-1}.$$

すると、

$$(6) \quad \tilde{\mathcal{F}}_{\pm}(\Delta)\mathcal{F}_{\pm}(\Delta) = P_{\pm}(\Delta),$$

$$\mathcal{F}_{\pm}(\Delta)\tilde{\mathcal{F}}_{\pm}(\Delta) = \hat{E}_0(\Delta) \quad (\equiv \mathcal{F}E_0(\Delta)\mathcal{F}^{-1}).$$

$\Gamma(\Delta) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi^2/2 \in \Delta\}$  とおき、 $\hat{\mathcal{H}}_0(\Delta) = \hat{E}_0(\Delta)\hat{\mathcal{H}} = L^2(\Gamma(\Delta))$  と書く。

また、 $H_s^k = H_s^k(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S} \mid \|\langle x \rangle^s \langle D_x \rangle^k f\| < \infty\}$ ,  $L_s^2(\Gamma(\Delta)) = \{f \in L_{loc}^2$

$\mid \|\langle x \rangle^s f\|_{L^2(\Gamma(\Delta))} < \infty\}$ .

定理. 任意の偶整数  $m_0 > n/2$ , 整数  $k \geq 0$ , 実数  $s > n/2$  に対し、 $H_s^k(\mathbb{R}_x^n)$

$\otimes L_{-m_0-k}^2(\Gamma(\Delta))$  に属する関数  $\tilde{\phi}_{\pm}(x, \xi)$ ,  $\phi_{\pm}(x, \xi)$  が存在して次を満たす。

i) 任意の  $f, g \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対し、

$$(\mathcal{F}_{\pm}(\Delta)f, g) = (2\pi)^{-n/2} \langle \tilde{\phi}_{\pm}(x, \xi), \overline{g(x) \otimes \hat{E}_0(\Delta)f(\xi)} \rangle,$$

$$(f, \mathcal{F}_{\pm}(\Delta)g) = (2\pi)^{-n/2} \langle \overline{\phi_{\pm}(x, \xi)}, \overline{g(x) \otimes \hat{E}_0(\Delta)f(\xi)} \rangle.$$

この条件によって、 $\tilde{\phi}_{\pm}$ ,  $\phi_{\pm}$ は一意に定まる。

$$\text{ii) } (H - \xi^2/2)\tilde{\phi}_{\pm}(x, \xi) = 0, \quad (H - \xi^2/2)\phi_{\pm}(x, \xi) = 0.$$

証明. 他の場合も同様なので、 $\mathcal{F}_{+}(\Delta)$ に対してのみ示す。 $m_0$ を偶整数で

$> n/2$ とし、 $\chi_0(\xi) = \langle \xi \rangle^{-m_0} \in \hat{\mathcal{H}}$ とおく。 $f \in \mathcal{H}$ とし、

$$(7) \quad Z(t)f(x) = \chi_0(D_x)W_{+}(t)E_0(\Delta)f(x),$$

$$W_{+}(t) = e^{itH}P_{+}(\Delta)e^{-itH_0}$$

とおくと、仮定 (I I - i i) より  $W_{+}(t)$  は  $t$  について一様有界な作用素である。そして、

$$(8) \quad \mathcal{F}_{+}(\Delta)\mathcal{F}f(x) = W_{+}(\Delta)f(x) = \langle D_x \rangle^{m_0} s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t)f(x).$$

但し、 $s\text{-}\lim$  は  $H^{m_0}(\mathbb{R}^n)$  での強収束。

$\chi_0 \in \hat{\mathcal{H}}$ なので、 $g \in \mathcal{H}$ に対し、

$$(9) \quad \begin{aligned} \chi_0(D_x)g(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} \chi_0(\xi) (\mathcal{F}g)(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}g, e^{-ix\xi} \chi_0(\xi))_{\hat{\mathcal{H}}} . \end{aligned}$$

したがって、(7)より、

$$(10) \quad Z(t)f(x) = (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}W_+(t)E_0(\Delta)f, e^{-ix\xi} \chi_0(\xi))_{\hat{\mathcal{H}}} .$$

よって、

$$(11) \quad \sup_{t,x} |Z(t)f(x)| \leq C \|\chi_0\| \|E_0(\Delta)f\| .$$

ゆえに、Riesz lemmaより、任意の  $t, x$  に対し、関数  $b_{\chi_0}(t, x, \xi) \in \hat{\mathcal{H}}_0(\Delta)$

が存在して、

$$(12) \quad Z(t)f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{E}_0(\Delta) \hat{f}(\xi) b_{\chi_0}(t, x, \xi) d\xi ,$$

$$\sup_{t,x} \|b_{\chi_0}(t, x, \xi)\|_{\hat{\mathcal{H}}_0(\Delta)} \leq C \|\chi_0\|$$

を満たす。

次に、ある数列  $t_k \rightarrow \infty$ , 零集合  $N \subset \mathbb{R}^n$  があって、任意の  $x \in \mathbb{R}^n - N$  に対し、 $\hat{\mathcal{H}}_0(\Delta)$  における弱極限

$$(13) \quad b_{\chi_0}^+(x, \xi) = w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} b_{\chi_0}(t_k, x, \xi)$$

が存在することを示す。実際、(8)の強収束は  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$  でのものだから対角線論法により、与えられた可算な  $\mathcal{H}$  の dense subset  $D$  に対し、数列  $t_k \rightarrow \infty$  と零集合  $N$  があって、任意の  $x \in \mathbb{R}^n - N$ ,  $f \in D$  に対し、極限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Z(t_k) f(x)$$

が存在して、

$$(15) \quad \chi_0(D_x) W_+(\Delta) f(x)$$

に等しいことがいえる。一般の  $f \in \mathcal{H}$  に対しては、任意に与えられた  $\epsilon > 0$  に対し、(11)より  $h \in D$  を

$$(16) \quad \sup_{t, x} |Z(t)f(x) - Z(t)h(x)| < \epsilon/3$$

ととれる。したがって、

$$(17) \quad |Z(t_k)f(x) - Z(t_m)f(x)| < 2\epsilon/3 + |Z(t_k)h(x) - Z(t_m)h(x)|.$$



右辺は(14)と  $h \in D$  より、 $x \in \mathbb{R}^n - N$  に対し、 $k, m \rightarrow \infty$  の時、漸近的に  $\epsilon$  となる。したがって、任意の  $f \in \mathcal{H}$ 、 $x \in \mathbb{R}^n - N$  に対し、極限

$$(18) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Z(t_k) f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int b_{\chi_0}(t_k, x, \xi) \widehat{E}_0(\Delta) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

の存在がいえた。 $f \in \mathcal{H}$  は任意なので、弱極限(13)の存在がいえる。(18) は a.e.  $x$  に対し、

$$(19) \quad \chi_0(D_x) W_+(\Delta) f(x)$$

に等しい。

(13) が存在すれば、(12) より、 $x \in \mathbb{R}^n - N$  に対し、

$$(20) \quad \|b_{\chi_0}^+(x, \cdot)\|_{\widehat{\mathcal{H}}_0(\Delta)} \leq C \|\chi_0\|.$$

よって、 $s > n/2$  なら

$$(21) \quad b_{\chi_0}^+(x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \widehat{\mathcal{H}}_0(\Delta)) \subset H_{-s}^0(\mathbb{R}_x^n) \otimes L^2(\Gamma(\Delta)).$$

(8) に戻って、(12), (13) より、

$$(22) \quad \mathcal{F}_+(\Delta) \mathcal{F} f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \langle D_x \rangle^{m_0} b_{\chi_0}^+(x, \xi) \widehat{E}_0(\Delta) \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

但し、この等式は  $b_{\lambda_0}^+(x, \xi)$  を  $(x, \xi)$  についての超関数と考へてのものである。よつて、

$$(23) \quad \tilde{\phi}_+(x, \xi) = \langle D_x \rangle^{m_0} b_{\lambda_0}^+(x, \xi) \in H_{-s}^{-m_0}(\mathbb{R}_x^n) \otimes L^2(\Gamma(\Delta))$$

とおけば、 $\tilde{\phi}_+$  は  $H$  の固有超関数となる。

仮定 I (I - i v) より、 $\lambda_0 \in \rho(H)$  として、任意の整数  $k \geq 0$  に対し

$$(24) \quad \tilde{\phi}_+(x, \xi) = (\xi^2/2 - \lambda_0)^{(m_0+k)/2} (H - \lambda_0)^{-(m_0+k)/2} \langle D_x \rangle^{m_0} b_{\lambda_0}^+(x, \xi)$$

が導かれる。(ここで仮定 I を使つた。)  $(H - \lambda_0)^{-(m_0+k)/2} \langle D_x \rangle^{m_0}$  は  $H_{-s}^0$  を  $H_{-s}^k$  に写すから、結局

$$(25) \quad \tilde{\phi}_+(x, \xi) \in H_{-s}^k(\mathbb{R}_x^n) \otimes L_{-m_0-k}^2(\Gamma(\Delta))$$

がいえ、証明が終わる。

2. 例. 2 体複素短距離力. 仮定 I を満たす複素ポテンシャル  $V(x)$  が、さらに

$$|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-1-\epsilon} \quad (\epsilon > 0)$$

を満たすとする。次の記号を使う。

$$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1},$$

$$A = \langle x \rangle^{-(1+\epsilon)/2}, \quad B = \langle x \rangle^{(1+\epsilon)/2} V(x), \quad Q(z) = BR_0(z)A$$

黒田[15]より、 $R^1$ の閉零集合  $N$  があつて、 $\mu \in \Delta_0 \equiv R^1 - N$  に対し、逆  $(1+Q(\mu \pm i0))^{-1}$  が  $B(\mathcal{H})$  に存在する。したがつて、加古-谷島[16]の仮定がすべて満たされる。そこで、有界Borel集合  $\Delta$  を  $\bar{\Delta} \subset \Delta_0$  とつて、

$$P_{\pm}(\Delta) = E(\Delta) \equiv \text{w-lim}_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} (R(\mu + i\nu) - R(\mu - i\nu)) \quad \text{in } L^2(\Delta, \mathcal{H})$$

とおくと、[16]の結果より仮定 I I がすべて満たされる。よつて、第1

節の定理より、 $H$  の  $E(\Delta)\mathcal{H} = \mathcal{R}(W_{\pm}(\Delta) \upharpoonright_{E_0(\Delta)\mathcal{H}})$  上の固有関数展開が構成でき

る。

3. その他の例。 仮定 I I を一般化することによつて、以下の場合も扱える。詳細は[11,12,13]を参照。

- 3.1. Coulomb特異性を含む2体実長距離力。
- 3.2. 2体実振動型長距離力。
- 3.3.  $N$ 体実短・長距離力 + 2体複素短距離力。
- 3.4.  $N$ 体複素 very short-range small potentials.

## 文 献

- [1] T. Ikebe, Eigenfunction expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory, Arch. Rational Mech. Anal., 5, 1-34 (1960).
- [2] S. T. Kuroda, Perturbation of eigenfunction expansions, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 57, 1213-1217 (1967).
- [3] T. Kato and S. T. Kuroda, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, in Functional Analysis and Related Fields, pp 99-131, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1970.
- [4] T. Kato and S. T. Kuroda, The abstract theory of scattering, Rocky Mt. J. Math., 1, 127-171 (1971).
- [5] S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory, Ann. Sc. Norm Sup. Pisa, IV Ser.2, 151-218 (1975).
- [6] K. Mochizuki, Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators with a complex potential and the scattering theory, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser.A, 4, 419-466 (1968).
- [7] W. Jäger, Ein gewöhnlicher Differential operator zweiter Ordnung für Funktionen mit Werten in einem Hilbertraum, Math. Z., 113, 68-98 (1970).
- [8] Y. Saitō, Spectral representation for Schrödinger operators with long-range potentials, Lecture Notes in Math., 727, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1979.
- [9] S. Agmon, Some new results in spectral and scattering theory

for differential operators on  $\mathbb{R}^n$ , Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Pol., Palaiseau, 1978/1979.

[10] K. Yajima, An abstract stationary approach to three-body scattering, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 25, 109-132 (1978).

[11] H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators, I. Fundamental solutions, Math. Z., 198, 181-190 (1988).

[12] A. Jensen and H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators, II. Eigenfunction expansions, Math. Z., 199, 1-13 (1988).

[13] H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators, III. Complex potentials, preprint (1989).

[14] H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators, IV. Singular potentials, in preparation.

[15] S. T. Kuroda, An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, J. Analyse Math., 20, 57-117 (1967).

[16] T. Kako and K. Yajima, Spectral and scattering theory for a class of non-selfadjoint operators, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 26, 73-89 (1976).