数理解析研究所講究録
692巻 1989年 126-136

概周期ポテンシャルをもった1次元シュレーディンガー作用素のスペクトルについて。

東大理 小谷真一

1° 序

本論は

$$(1.1) \qquad H(q)u = -\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda q(x)u \qquad \text{on } L^2(\mathbb{R})$$

または

$$(1.2) \qquad H(q)u_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + \lambda q(n)u_n \qquad \text{on } \ell^2(\mathbb{Z})$$

を考察の対象とするが、ポテンシャル q は概周期的とする。q が周期的な場合には Bloch 解が存在しスペクトル逆問題も含めてきれいな理論が確立している。しかし、q が概周期的になるともはや特別な場合、例えば有限帯スペクトルに対応するポテンシャルの場合を除き一般的には Bloch 解は存在しない。ここ10年来、固体物理の方からの準結晶の研究の高まり等から物理学者、数学者相方が(1.1)または(1.2)の作用素に関心をもってきたが、この小論ではその数学的側面について一般的な事実または最近の動向等を survey してみたい。

2° Johnson-Moser の定理

$C_b(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上有界な連続関数全体とし sup-norm $\|\cdot\|$ で Banach 空間にする。$q \in C_b(\mathbb{R})$ が概周期的であるとは $G_0(q) = \{q_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ が $C_b(\mathbb{R})$ で相対コンパクトになることである。但し

$g_z(\cdot) = g(z+\cdot)$ とする。 $G_0(g)$ の closure を $G(g)$ とする。

$G_0(g)$ には

$$g_1 = g_{z_1},\ g_2 = g_{z_2} \longrightarrow g_1 \cdot g_2 = g_{z_1+z_2} \quad \text{(well-defined)}$$

で自然に abel 群の構造が入るが，これを $G(g)$ にも拡張しておくと $G(g)$ は compact abel 群になる。その（規格化された）Haar measure を μ とする。 $\phi : R \to G(g)$ を

$\phi(z) = g_z$ で def. するとこれは abel 群としての homomorphism であるが明らかに $\phi(R)$ は $G(g)$ で dense である。したがって $G(g)$ の指標群 $G(g)^*$ は $R^* = R$ に埋めこまれる。すなわち $G(g)^*$ は R の可算部分群と思える。この部分群を概周期関数 $g(x)$ の <u>frequency module</u> という。このとき $g(x)$ は

$$g(x) = \sum_{\xi \in G(g)^*} e^{i\xi x} g_\xi \qquad g_\xi \equiv \langle g, e^{i\xi\cdot} \rangle_\mu$$

の $L^2(\mu)$-展開をもつ。 $G(g)$ にはまた自然に R が働く。すなわち $(T_z f)(\cdot) = f(\cdot + z)$ ， $f \in G(g); z \in R$ とすると，T_z は μ を不変にしかつ，μ-可測 T_z-不変な関数は定数に限るという意味でエルゴード性をもつ。

そこで $f \in G(g)$ に対して $H(f)$ を考え，その Green 関数 $(H(f)-\lambda)^{-1}(x,y)$ を $G_\lambda(x,y;f)$ とする。よく知られているように $\lambda \in C \backslash R$ に対して G_λ は x, y の連続関数で，さらに R 上の非負

Stieltjes 測度 σ_f が存在して

$$G_\lambda(0,0,f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma_f(d\xi)}{\xi-\lambda}$$

と表現できる。そこで

$$n(d\xi) \equiv \int_{G(g)} \sigma_f(d\xi)\,\mu(df)$$

とおくと明らかに

$$(2.1) \quad \int_{G(g)} G_\lambda(0,0,f)\,\mu(df) = \int_{\mathbb{R}} \frac{n(d\xi)}{\xi-\lambda}$$

である。一方 エルゴード性より これは

$$\frac{1}{t}\int_0^t G_\lambda(0,0,T_\tau g)\,d\tau \xrightarrow[t\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{n(d\xi)}{\xi-\lambda}, \quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

とも解釈できる。この $n(d\xi)$ を $H(g)$ の density of states. というが 知られているのは (2.1) とエルゴード性より $H(g)$ のスペクトル Σ は

$$\Sigma = \operatorname{supp} n$$

となる。

この時 Johnson-Moser [7] は次の美しい定理を示した。

<u>Theorem 1</u> (Gap-labeling theorem). $n(\xi)=\int_{-\infty}^{\xi} n(d\eta)$ とおくと、n は連続関数で $\mathbb{R}\setminus\Sigma$ (gap) では $n(\xi)$ は $G(g)^*$ の値をとる。

この主張が言えるところは、一般に g が周期的でなければ $G(g)^*$ は R の可算 dense な subgroup であるから、$G(g)^*$ 全ての元に対応する gap が存在すれば Σ は nowhere dense な closed set (Cantor set) になることになる。スペクトル Σ が Cantor set になるのは概周期ポテンシャルの空間の中で generic な性質であることが分っている。

この gap-labeling theorem は多次元の場合にも言われている。[1].

30. 絶対連続スペクトル－点スペクトル相転移 (metal-insulator transition)

概周期で現在注目を浴びている問題は (1.1) 又は (1.2) でパラメーター K を動かすときスペクトルの状態がどのように変化するかという相転移現象である。説明し易くするため (1.1) では

$$g(x) = \cos x + \cos(\alpha x + \theta)$$

(1.2) では

$$g(n) = \cos 2\pi(n\alpha + \theta)$$

としよう。ここで α, θ は実数パラメーターである。θ は非本質的なパラメータであるが、K, α は本質的なパラメーターであり、K が大であることはポテンシャルの影響が Δ に比べて大きいこと

を意味し、無理数αが有理数に（例えば Diophantine 条件の意味で）遠いから、ポテンシャルがよりランダムになることになる。従って当然スペクトル構造に変化が起ることが予想されるが、それを実際に解析することはそれ程容易ではない。しかし最近 Fröhlich-Spencer, Sinai, Chulaevsky 達の強力な analysis により、徐々にベールがはがされつつある。

仮定：

(3.1) $|n|^2|\sin 2\pi\alpha n| \geq c > 0$ for $^\forall n \in \mathbb{Z}$.

このとき、

Theorem 2. (Fröhlich-Spencer-Wittwer [6], Sinai [11])

(3.1)を仮定すると、$^\exists K_0 > 0$ w.r.t. $^\forall |K| \geq K_0$, (1.2)の $H(\theta)$ は a.e. θ に対して、点スペクトルよりなり、すべての固有関数は指数的に減少する。

この定理は g が cos. で定義されていなくても，丁度2つの critical points をもつ C^2-periodic, even ft. で cos. を置き換えても成り立つ。Sinai の条件は (3.1) より違って α の連分数展開の係数で与えられているが，やはり有理数より十分遠いという仮定をしている。後半の方法は $\mathbb{Z}^d$ での localization を示した Fröhlich-Spencer [5] の方法を用いたもので ある種の renormalization の方法である。

<u>Theorem 3</u> (Fröhlich-Spencer-Wittwer [6])

(3.1) を仮定する。$\exists K_0 > 0$ s.t. $\forall |K| \geq K_0$, (1.1) の $H(g)$ は スペクトルの下端の近傍で点スペクトルのみよりなり，すべての固有関数は指数的に減少する。

この定理は g が cos. の場合のみ示されている。証明方法は Th. 2. と類似である。

6.

<u>Theorem 4.</u> (Chulaevsky-Delyon [2]).

(3.1) を仮定する。 $^\exists k_0 > 0$, s.t. $^\forall |k| \leq k_0$, (1.2) で (a.e. θ) $H(g)$ のスペクトルは絶対連続スペクトルのみとなり、一般化された固有関数は準周期的になる。

この結果は Th. 2 と、g が cos で定義されているときの (1.2) の k 大と k 小とのある種の duality (Aubry-duality) を使うことにより示される。このように k の大小によりスペクトルは drastic に変化する。(1.1) ではこの結果は最早や不自明である。

Theorem 5. (Dinaburg-Sinai [4]). g を $G(g)^*$ が有限生成 (i.e. 準周期的) なる実軸の近傍で正則な限定周期ポテンシャルとする。このとき $^\forall k$ に対して、十分大きなエネルギー領域では (1.1) の $H(g)$ は絶対連続スペクトル成分をもつ。

従って、Th.3 と 5 を合わせると、大きな λ では
あるエネルギーを境にして左と右では状態が違うこ
とになる。これが実際きれいに pure point と pure absolutely
continuous とにわかれているかは未解決で、新しい idea
が要求される所である。

4° 有限個の値しかとらないポテンシャルの場合

細い計算ができる場合として (1.2) で

$$g(n) = 1_A(n\alpha+\theta)$$

の解である。但し $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする。よく調べられている
のは $A = [-\alpha^3, \alpha^2)$, $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ のときで
Kohmoto-Kadanoff-Tang [8], Ostlund et.al. [10]
の論文が初めで、スペクトルが Cantor 集合になることを
指摘している。最近、Sütő [14] は $|\lambda| \geq 16$

の時 $H(g)$ のスペクトルは特異連続になることを示した。

また Delyon-Petritis [3] は ${}^{\forall}\kappa$ で a.e. α, θ で

$H(g)$ は点スペクトルをもたないことを示した。

筆者はこのような potential について次の一般的事実が

成立することを発見した。

<u>Theorem 6.</u> (S. Kotani [9]).

$$g(n) = \lambda_1 I_{A_1}(n\alpha_1 + \theta_1) + \cdots + \lambda_N I_{A_N}(n\alpha_N + \theta_N)$$

とする。g が周期的でない限り $H(g)$ は (${}^{\forall}\kappa$) 絶対

連続スペクトルを持たない (for a.e. $\theta_1, \ldots, \theta_N$)。

従って有限個しか値をとらない概周期的ポテンシャルでは

殆んどの場合スペクトルは特異連続になり、Th. 4 と

比較して大きな相違があることが分る。この物理的な

解釈は何なのであろうか。

追記　3° の部分の survey として Spencer [12], [13] がある。

参考文献.

[1] Bellissard-Lima-Testard ; "Mathematics + physics, Lectures on recent results" Vol. 1. L, Streit ed. World Sci. Pub. (1985) 1-64.

[2] Chulaevsky-Delyon : preprint.

[3]. Delyon-Petritis : Comm. Math. Phys. 103 (1986)

[4] Dinaburg-Sinai : Funct. Anal. Appl. 9 (1975)

[5]. Fröhlich-Spencer : Comm. Math. phys. 88 (1983).

[6] Fröhlich-Spencer-Wittwer : preprint.

[7]. Johnson-Moser : Comm. Math. phys. 84 (1982)

[8]. Kohmoto-Kadanoff-Tang : phys. Rev. Lett. 50 (1983).

[9] Kotani : preprint.

[10]. Ostlund-Pandit-Rand-Schellnhuber-Siggia : Phys. Rev. Lett. 50 (1983).

[11] Sinai : J. of Statistical Phys. 46 (1987).

[12] Spencer : J. of Statistical Phys. 51 (1988).

[13] Spencer : preprint.

[14] Sütő : Comm. Math. Phys. 111 (1987).