数理解析研究所講究録
692巻 1989年 113-125

The behavior of solutions near blow-up points of semilinear heat equations

東京大学教養学部基礎科学科　伊藤達夫
(Tatsuo Itoh)

§1. 序

この講演で 等周不等式の理論が 半線形熱方程式の解の爆発問題及び非線形固有値問題の爆発問題の解析に適用できることを話したい.

まず 半線形熱方程式の初期境界値問題

$$
(\mathrm{I.B.V.P.}) \quad \begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u + f(u) & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (x \in \Omega) \end{cases}
$$

を考えよう. ここで Ω は 2次元の有界領域, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかで, f は C^1 で $f(s) > 0$ $f'(s) > 0$ $(s > 0)$, 初期値 φ は $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ で $\varphi(x) \geq 0$, $\Delta\varphi(x) + f(\varphi) \geq 0$ $(x \in \Omega)$ $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ と仮定する. 最大値原理により $u(x,t) > 0$, $u_t(x,t) > 0$ $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ が成立することに注意しておく. (I.B.V.P.) の解が有限時間 T で爆発する, 即ち $\lim_{t \to T} \max_{x \in \Omega} u(x,t) = \infty$ と仮定する. このとき $x_0 \in \overline{\Omega}$ が

爆発点であるとは $x_n \to x_0$, $t_n \uparrow T$, $u(x_n, t_n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ なる $(x_n, t_n) \in \Omega \times (0, T)$ が存在することと定義する。爆発点 x_0 の近傍での解 $u(x,t)$ の挙動を問題にしたい。

定理 1. 上記の仮定の下でさらに $f(s) \leq \lambda e^s$ $(s>0)$ が成立するとする。このとき (I.B.V.P) の解 $u(x,t)$ が有限時間 T で爆発するならば任意の爆発点 $x_0 \in \Omega$ に対して $r_1 > 0$ が存在し任意の $0 < r < r_1$ に対して次の 1°, 2° が成立する。

1° $$\lim_{t \to T} [e^{u(r,t)}] > \frac{2}{\lambda r^2}$$

2° もし $[e^{u(r,t)}] < \dfrac{2}{\lambda r^2}$ $\quad 0 \leq t < T_1 (< T)$ なる T_1 が存在するならば $e^{u(x_0,t)} < 4\,[e^{u(r,t)}]$ $\quad 0 \leq t < T_1$

但 $$[e^{u(r,t)}] \equiv \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{u(x_0 + re^{i\theta}, t)/2} d\theta \right\}^2 .$$

証明は [7].

次に f が $f(s) \leq s^p$ $(s>0)$, $p>1$, を満たすときを考える。

<u>定理 2</u>　領域 Ω は原点を中心とする円板とする。初期値 φ は球対称と仮定する。f が $f(s) \leq \lambda e^{s}$ $(s \geq 0)$ の代わりに $f(s) \leq s^{p}$ $(s \geq 0)$, $p > 1$ を満たすと仮定する。このときもし $x_0 = 0$ が爆発点で爆発時刻 T の近くで

$$\max_{x \in \Omega} u(x,t) \leq L\, u(0,t)$$

が成立していると仮定すると次が成立する。

$r_0 > 0$ と $k > 0$ が存在して任意の $0 < r < r_0$ に対して $|x| = r$ として

1° $$\lim_{t \to T} u^{p-1}(r,t) > \frac{2}{kr^2}.$$

2° もし $$u^{p-1}(r,t) < \frac{2}{kr^2} \qquad 0 \leq t < T_1 (< T)$$

ならば

$$u^{p-1}(0,t) < 4\, u^{p-1}(r,t), \quad 0 \leq t < T_1 .$$

<u>注意</u>　定理中の $L > 0$ の存在は例えば $f(s) = s^{p}$ ならば保障される。[6].

これらの定理は，Bol の不等式と云われる等周不等式をもとにして Bandle によって展開された理論を用いて証明される。次節で Bandle の理論を述べる。

§2. 等周不等式

D を $\mathbb{R}^2$ の領域とし $v \in C^2(D)$ が微分不等式 $\Delta v + \lambda e^v \geqq 0$ を D で満たしているとする。$B(x_0, r) \subset D$ を中心が x_0 の半径 r の円板とする。Riemann metric $d\sigma$ を $d\sigma^2 = e^{v(x)}(dx_1^2 + dx_2^2)$, $(x = (x_1, x_2))$ で定義する。$\partial B(x_0, r)$ の長さと $B(x_0, r)$ の面積は各々

$$l(r) \equiv \int_0^{2\pi} e^{v(r,\theta)/2} r \, d\theta \quad , \quad a(r) \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^r e^{v(r,\theta)} r \, dr \, d\theta$$

で与えられる。但 $v(r,\theta) = v(x_0 + re^{i\theta})$

このとき $l(r)$ と $a(r)$ との間に Bol の等周不等式と云われる不等式 $l(r)^2 \geqq 4\pi\, a(r) - \frac{\lambda}{2}\, a(r)^2$ が成立する。Bandle は不等式 $2\pi r\, a'(r) \geqq l^2(r)$ とこの不等式とから得られる微分不等式 (*) $2\pi r\, a'(r) \geqq 4\pi\, a(r) - \frac{\lambda}{2}\, a(r)^2$ の解析を行ない平均値の定理を導びいた [1, 2, 3].

(*) の等号が成立するのは

$$a(r) = a_0(r) \equiv \frac{\pi b r^2}{1 + \lambda b r^2/8} \qquad (b > 0 \ \text{パラメーター})$$

のときまたそのときに限る。$a_0(r)$ は $B(x_0, r)$ の Riemann metric $d\sigma_0^2 = e^{v_0(x)}(dx_1^2 + dx_2^2)$, $(v_0(x) = \log(b/(1 + \lambda b r^2/8)^2))$ に関する面積になっている。$l_0(r)$ で $\partial B(x_0, r)$ の $d\sigma_0$ に関する長さを

表わすことにする.

<u>Bandle の平均値の定理</u>〔1〕. v を上記の v とする.

$B(x_0, r_1) \subset D$ とする. もし $\ell(r_1) = \ell_0(r_1)$ となる

$b > 0$ が存在するならば次が成立する.

1° $\quad a(r) \leq a_0(r) \qquad 0 < {}^{\forall}r < r_1$

2° $\quad v(0) \leq \log b$.

この定理から次の命題を導びくことができる.

<u>命題</u> 1. $u(x,t)$ を $\Omega \times [0, T_0)$ で連続で各 $t \in$

$[0, T_0)$ に対して $u \in C^2(\Omega)$ で微分不等式

$\Delta u + \lambda e^u \geqq 0$ を Ω で満たすとする. もし

$\lambda\, a(r_1, 0) < 4\pi$ で各 $t \in [0, T_0)$ に対して

$[e^{u(r_1,t)}] < 2/\lambda r_1^2$ が成立しているとすると

次が成り立つ.

1°. $\quad \lambda\, a(r_1, t) < 4\pi \qquad (0 \leq t < T_0)$

2° $\quad e^{u(x_0,t)} \leq 4[e^{u(r_1,t)}] \qquad (0 \leq t < T_0)$

ここで $\quad a(r_1,t) = \int_{B(x_0, r_1)} e^{u(x,t)}\, dx$

$$[e^{u(r_1,t)}] = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{u(x_0 + r_1 e^{i\theta}, t)/2}\, d\theta\right)^2.$$

証明は〔7〕.

§3. 定理2の証明

以下 簡単のため $u(x,t)$ を $u(r,t)_{|x|=r}$ とも書く。また 必要ならば L を大きくとりかえることによって $\max_{x\in\Omega} u(x,t) \leq L u(0,t)$ が $0 \leq t < T$ で成立すると仮定してよい。

新しい未知関数 v を関係式 $u^{p-1} = e^{v}$ $(x \in \Omega)$ によって導入すると v は

(1) $$v_t = \Delta v + \frac{1}{p-1}|\nabla v|^2 + (p-1)e^{v}$$

を満たす。 証明の方針は $|\nabla v|^2$ の項を上から e^{v} で評価して $(0,T)$ の近傍で微分不等式 $\Delta v + k e^{v} \geq 0$ $(k > 0)$ が成立することを示す。

補題 (Friedman - McLeod)

$0 < T_1 < T$ が存在して

(2) $$|\nabla u|^2 \leq \frac{2u_0^{p+1}(t)}{p+1}, \quad T_1 \leq t < T$$

但 $$u_0(t) \equiv \max_{x\in\Omega} u(x,t)$$

$r_1 > 0$ を $B(0, r_1) \subset \Omega$ となるように小さくとって固定する。 T_2 を $T_1 < T_2 < T$ なる任意の数として固定する。
K を $K > 2^{2+\frac{4}{p-1}} L^{p+1}$,

(3) $$u_0^{p+1} \leq K\, u(x)^{p+1}, \quad \forall\, 0 \leq |x| \leq r_1, \quad \forall\, T_1 \leq t \leq T_2$$

となる正数とする。

次に $r_2>0$ を小さくとって $r_2<r_1$

(4) $$K_0 \int_{|x|\le r_2} e^{v(x,T_1)}\,dx < 4\pi$$

$$K_0 \equiv \left(\frac{2K}{p+1}+1\right)(p-1)$$

が成立するようにする。 補題と (3) より

(5) $$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} \le \frac{2}{p+1}\frac{u_0^{p+1}}{u^2} \le \frac{2K}{p+1} u^{p-1}(x,t)$$

これと (1) より、$v_t>0$, $(p-1)\frac{\nabla u}{u}=\nabla v$ に注意して

(6) $$\Delta v + K_0 e^{v} \ge 0 \qquad \forall |x|<r_2,\ T_1\le \forall t\le T_2$$

が従う。

次に r_0, $0<r_0<r_2$ を小さくとって

(7) $$e^{v(x,t)} < \frac{2}{K_0}\frac{1}{r^2}, \qquad 0<|x|=r\le r_0$$
$$T_1\le t\le T_2$$

が成立するようにする。 (4) より

$$K_0 \int_{|x|\le r_0} e^{v(x,T_1)}\,dx < 4\pi$$

が成立する。 従ってこれと (6), (7) が成立することより命題1-2°より 任意の $r\le r_0$ に対して

$$u_0^{p-1}(t) = e^{v(0)} < 4[e^{v(r,t)}] = 4u^{p-1}(r,t)$$
$$T_1\le t\le T_2$$

が従う。

従って 仮定 $u_0(t) \leq L u(0,t)$ に注意すると再び補題より $T_1 \leq {}^\forall t \leq T_2$ に対して

$$\frac{|\nabla u(r,t)|^2}{u^2(r,t)} \leq \frac{2u_0^{p+1}(t)}{p+1} \frac{1}{u^2(r,t)}$$

$$\leq 2^{3+\frac{4}{p-1}} L^{p+1} \frac{1}{p+1} u^{p-1}(r,t)$$

$$(0 \leq {}^\forall r \leq r_0)$$

が従う. 従って v は (1) より $T_1 \leq t \leq T_2$ で

(8) $$\Delta v + K_1 e^v > 0 \qquad (0 \leq {}^\forall r \leq r_0)$$

$$K_1 \equiv \left(2^{3+\frac{4}{p-1}} \frac{L^{p+1}}{p+1} + 1\right)(p-1)$$

を満たす.

一方 $K > 2^{2+\frac{4}{p-1}} L^{p+1}$ より $K_0 \geq K_1 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$

となっている. 従って $0 < {}^\forall r' < r_2$ に対して

(4) と (7) から $T_1 \leq t \leq T_2$ で

(9) $$(K_1+\varepsilon) \int_{|x| \leq r'} e^{v(x,T_1)}\, dx < 4\pi.$$

(10) $$e^{v(x,t)} < \frac{2}{K_1+\varepsilon} \frac{1}{r^2} \qquad (0 < {}^\forall r \leq r')$$

が成立している. $0 < r' < r_2$ を任意に固定する. 次に

(8)' $$\Delta v + (K_1+\varepsilon) e^v > 0 \qquad (0 \leq {}^\forall r \leq r')$$

として

$$T_3 \equiv \sup \{ T_2' : (8'), (10) \text{ が } T_1 \leq t \leq T_2' \text{ で成立する} \}$$

を考える.

今　0 が爆発点だから $(T_2<)T_3 < T$ が従う.

(10) が $t=T_3$ で成立しないことを示す. もし

$t=T_3$ まで成立したとすると 補題と命題1により

$$u_0(t) \leq L\,u(0,t) \leq L 2^{\frac{2}{p-1}}\,u(r) \qquad \forall r \leq r_2$$

が $t \leq T_3$ まで成立しているから

$$\Delta v + K_1 e^{v} \geq 0 \qquad t \leq T_3$$

従って (8)′, (10) が $t \leq T_3+\varepsilon'$ $(\varepsilon'>0)$ まで成立する. これは T_3 の

定義に矛盾する. 従って (10) が $t=T_3\,(<T)$ で不成立

であることが分かる 即ち $0<r_3 \leq r'$ が存在して

$$e^{v(r_3,T_3)} = \frac{2}{K_1+\varepsilon}\,\frac{1}{r_3^2}$$

となる

$$u(r_3,T_3) \leq u_0(T_3) \leq L 2^{\frac{2}{p-1}}\,u(r')$$

より
$$u(r',T_3) \geq \frac{1}{L}\,\frac{1}{2^{\frac{2}{p-1}}}\,u(r_3,T_3)$$
$$= \frac{2}{K_1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{L 2^{\frac{2}{p-1}}}\,\frac{1}{r_3^2}$$
$$\geq \frac{2}{K_1+\varepsilon}\,\frac{1}{L}\,\frac{1}{2^{\frac{2}{p-1}}}\,\frac{1}{r'^2}$$

従って $u(r',T_3) \geq \dfrac{2}{K_1+\varepsilon}\,\dfrac{1}{L}\,\dfrac{1}{2^{\frac{2}{p-1}}}\,\dfrac{1}{r'^2}$ となる T_3

が存在することが分った. $k \equiv (K_1+\varepsilon) L 2^{\frac{2}{p-1}}$ と

とれば定理2の主張が成立する.

§4. 非線形固有値問題

$$
(P_\lambda)\quad \begin{cases} \Delta u + \lambda e^{u} = 0 & (x \in \Omega), \quad \lambda > 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}
$$

の爆発問題を考える。(P_λ) の解の族 $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ で

$\max_{x\in\Omega} u_\lambda(x) \to \infty \quad (\lambda \downarrow 0)$ となるものがあったとしよう。

このとき $x_0,\ x_j \in \Omega$, $\lambda_j \downarrow 0$, $x_j \to x_0$ で $\lambda_j e^{u_{\lambda_j}(x_j)} \to \infty$ $(j \to \infty)$ となるものが存在する。この性質を持つ x_0 を解の族 $\{u_\lambda\}$ に関する爆発点と呼ぶ。
爆発点の近傍の挙動を調べるのに Bandle の理論が適用できることを示したい。

<u>命題</u>2. v_λ を領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^2 関数で微分不等式 $\Delta v_\lambda + \lambda e^{v_\lambda} \geq 0$ を D で満たしているとする。$x_0 \in D$ を任意に固定する。このとき、もし $B(x_0, r) \subset D$ で $\lambda a_\lambda(r) \equiv \lambda \int_{B(x_0,r)} e^{v_\lambda(x)}\,dx < 8\pi$ ならば

$$
\lambda e^{v_\lambda(x_0)} \leq \frac{8}{r^2}\,\frac{\lambda a_\lambda(r)}{8\pi - \lambda a_\lambda(r)}.
$$

この証明は [1, 定理 1.2] より導びける。

この命題より次の定理3が従う

定理3.　$x_0 \in \Omega$ を (P_λ) の解の族 $\{u_\lambda\}$ に関する爆発点とする。従って定義より $x_j \to x_0$ $(x_j \in \Omega)$, $\lambda_j \downarrow 0$, $\lambda_j e^{u_{\lambda_j}(x_j)} \to \infty$ $(j \to \infty)$ となる x_j, λ_j が存在する。このとき $B(x_0, r) \subset \Omega$ となる任意の $r > 0$ に対して

$$\varliminf_{j \to \infty} \lambda_j \int_{B(x_0, r)} e^{u_{\lambda_j}(x)}\, dx \geqq 8\pi.$$

が成立する

この証明は命題2から従う.

注意　Ω が単連結のとき適当な仮定のもとで1点爆発し $\lambda \int e^{u_\lambda(x)} dx \to 8\pi$ $(\lambda \downarrow 0)$ となることが鈴木氏と長崎氏によって示されている. [9]

注意　Ω が円環のとき長崎氏によって球対称でない m-回転対称な解の存在が示されている. この解の族は実際に m 個の爆発点をもつことが分かる. [8].

参考文献

1. Bandle, C., Mean value theorems for functions satisfying the inequality $\Delta u + ke^u \geq 0$, Arch. Rational Mech. Anal., 51, 70 - 84 (1973).

2. Bandle, C., Isoperimetric Inequalities and Applications, Pitman (London, 1980).

3. Burago, Yu. D., V.A. Zalgaller, Geometric Inequalities, Springer (1988).

4 Friedman, A., B. McLeod, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, Indiana Univ. Math J., 34, 425 - 447 (1985).

5 Giga Y., R. Kohn, Characterizing blow up using similarity variables, Indiana Univ. Math. J. 36, 1- 40 (1987).

6. Giga Y., R. Kohn, Nondegeneracy of blow up for semilinear heat equations, Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. # 46. (1988).

7. Itoh T., Blow-up of solutions for semi-linear parabolic equations, preprint, 数理解析研究所講究録.

Nagasaki, K. On some nonlinear elliptic boundary value problems on spherically symmetric domains, preprint.

Suzuki, T., K. Nagasaki, Asymptotic behavior of solutions for an elliptic boundary value problem with exponential nonlinearities, manuscript.