数理解析研究所講究録
692巻 1989年 69-78

Interaction of Singularities at the Boundary

東大 教養 大学院 加藤 圭一
(Keiichi Kato)

1. 序

次の半線型波動方程式の境界値問題を考える。

(1) $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(t,x,y)=F(u,\nabla u)$ in Θ

(2) $u|_{x=0}=g(t,y)\in C^\infty$

ここで、$F(\cdot,\cdot)\in C^\infty$。$\Theta$ は $\mathbb{R}^3_+=\{(t,x,y)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geqq 0\}$ の原点の開近傍である。(1)の方程式の解の内部での特異性の相互作用は、Bony [2] や Melrose-Ritter [4] により調べられている。この小文では、(1)に $x=0$ での Dirichlet 条件(2)を加し、境界における特異性の相互作用を調べることにする。

結果を述べるため、以下の記号と関数空間を導入する。

$\Theta^- = \Theta\cap\{t<0\}$

$\Theta^+ = \Theta\cap\{t>0\}\cap\{\Theta^-$の決定領域$\}$

定義 (Conormal distribution) Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の領域、Σ を Ω 内の C^∞ 部分多様体、又は、Ω 内の互いに横断的に交わる二つの超曲面の和集合とする。Z_i を、Σ に接する任意の C^∞ ベクト

ル場（$1 \leqq i \leqq \ell$）とするとき、

$$u \in H^s(\Sigma, \infty) \text{ in } \Omega$$

とは、任意の自然数ℓに対し、

$$Z_1 \circ Z_2 \circ \cdots \circ Z_\ell u \in H^s_{loc}(\Omega)$$

なることと定義する。

定理1.　$x_0 \leqq 0$、$y_0 \geqq 0$、$x_0^2 + y_0^2 = 1$ とし、$\Sigma_1 = \{t = x_0 x + y_0 y\}$、$\Sigma_2 = \{t = -x_0 x + y_0 y\}$ とする。$s > \frac{5}{2}$ に対し、$u \in H^s(\theta)$ かつ(1)、(2)をみたすとする。

$$u \in H^s(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, \infty) \text{ in } \theta^-$$

ならば、

$$u \in C^\infty(\theta^+ \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$$

である。

定理2.　$x_1, y_1 < 0$、$x_1^2 + y_1^2 = 1$ とし、$\Sigma_3 = \{t = x_1 x + y_1 y\}$, $\Sigma_4 = \{t = -x_1 x + y_1 y\}$ とする。$s > \frac{5}{2}$ に対し、$u \in H^s(\theta)$ かつ(1)、(2)をみたすとする。

$$u \in H^s(\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4, \infty) \quad \text{in } \theta^-$$

ならば、

$$u \in C^\infty(\theta^+ \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \{t^2 = x^2 + y^2\})$$

である。

注1.　もし非線型項に ∇u が入っていなければ、定理1、定理2は、$s > \frac{3}{2}$ のときに成り立つ。

注2. 定理2は、$t<0$ のとき、解uが、図1の実線部以外に特異性をもたないならば、$t>0$のとき、図2の実線部と破線部以外には特異性をもたないことを主張している。

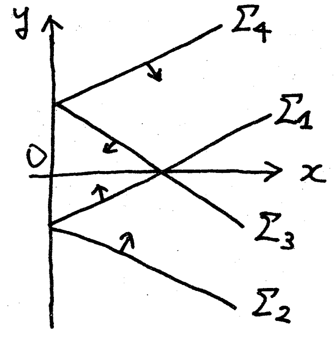

図1 ($t<0$のとき)

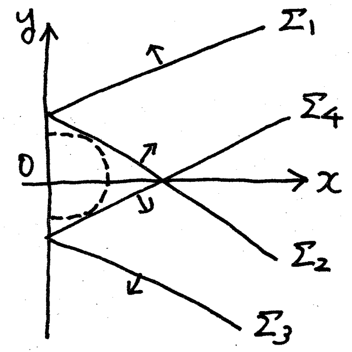

図2 ($t>0$のとき)

この定理は、図2の破線部上に特異性が現われることを主張するものではないが、3. において、そこで、特異性が現われる例を作る。

2. 定理1と定理2の証明

<u>定理1の証明</u> $\Theta^+\setminus\Sigma_1\cup\Sigma_2$ を次の三つの部分に分ける。

$$\Theta_1=\{t<x_0x+y_0y\}\cap\Theta^+$$

$$\Theta_2=\{t>x_0x+y_0y\}\cap\{t<-x_0x+y_0y\}\cap\Theta^+$$

$$\Theta_3=\{t>-x_0x+y_0y\}\cap\Theta^+$$

Θ_3が、本質的な部分であるから、まず、$u\in C^\infty$ in Θ_3 を示す。

$M\equiv t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y$、 $v_1\equiv M^2u$ とおく。

$$\begin{aligned}\Box v_1&=\Box(M^2u)\\&=M\{\Box(Mu)\}+[\Box,M](Mu)\\&=M^2F(u,Du)+2MF(u,Du)+2\Box(Mu)\end{aligned}$$

$$= M^2F(u, Du) + 4MF(u, Du) + 4F(u, Du)$$

であるから、

$$\square v_1 + G_1(u, Du)\cdot Dv_1 = G_2(u, Du, DDu)$$

の形に書ける。ここで、$G_1(\cdot,\cdot) \in C^\infty$, $G_2(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^\infty$, であり $G_2(u, Du, DDu)$ の一般項は、$G(u, Du) \times$ (u の2階微分の2次式）の形である。$u \in H^s(\theta)$ $(s > \frac{5}{2})$ であるから、

(3) $\quad G_2(u, Du, DDu) \in H^{2s-\frac{11}{2}-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$ in θ

を得る。これは、$u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$、$0 < s < \frac{n}{2}$ ならば、$uv \in H^{2s-\frac{n}{2}-\varepsilon}$ であることを用いればすぐにわかる。$Du \in H^{s-1}$、$s-1 > \frac{3}{2}$ だから、

(4) $\quad G_1(u, Du) \in H^{s-1}$ in θ

(5) $\quad v_1|_{x=0} = M^2u|_{x=0} = t^2\partial_t^2 g + t\partial_t g + y^2\partial_y^2 g + y\partial_y g \in C^\infty$

(6) $\quad v_1 \in H^s$ in θ^- $\quad$ ($\because$ $u \in H^s(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, \infty)$ in θ^- であることと、M が Σ_1、Σ_2 に接していることからわかる。）

(3)、(4)、(5)、(6) と線型の Singularity の反射の理論により、

$$v_1 \in H^t \qquad t = \min(s-1, 2s-\tfrac{5}{2}-\varepsilon) \quad \text{in } \theta^+$$

である。$2s - \frac{5}{2} - \varepsilon = (s-2) + (s - \frac{5}{2} - \varepsilon)$ であるから、ε を十分小にとれば、$2s - \frac{5}{2} - \varepsilon > s-2$ とできる。したがって、ある $\delta > 0$ があって、$v_1 \in H^{s-2+\delta}$ in θ^+ であることがわかった。この議論を繰り返せば、

$$v_1 \in H^{s-1} \qquad \text{in } \theta^+$$

を得る。$M^2u \in H^{s-1}$ in θ^+ であるから、$M^2F(u,\nabla u) \in H^{s-1}$ in θ^+、則ち、$G_2(u, \nabla u, DDu) \in H^{s-1}$ を得る。次に M^3u について同様のことを行えば、$M^3u \in H^{s-1}$ in θ^+ を得、これを繰り返すと

(7) $M^ju \in H^{s-1}$ in θ^+ for ${}^\forall j \in \mathbb{N}$

を得る。$u \in C^\infty$ in θ_3 を示すために、次の補題を用意する。

<u>補題3.</u> (Beals[1]) $u \in H^s$ in θ^+、$M^ju \in H^{s-1}$ in θ^+ $(s > \frac{5}{2})$ かつ、u は(1)をみたすならば、

$$u \in C^\infty \quad \text{in} \quad \{t^2 > x^2+y^2\} \cap \theta^+$$

が成り立つ。

<u>補題3の証明</u> $Q_0 = (t, x, y) \in \theta^+ \cap \{t^2 > x^2+y^2\}$ を任意に固定し、$(Q_0, P_0) = (t, x, y, \tau, \xi, \eta) \in T^*(\theta) \setminus 0$ を任意にとる。$t\tau + x\xi + y\eta \neq 0$ ならば、M は (Q_0, P_0) において微局所的に楕円型となる。一方、$t\tau + x\xi + y\eta = 0$ ならば、$\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 \neq 0$ なので、$\Box$ が、(Q_0, P_0) において微局所的に楕円型となる。$M^2u \in H^{s-1}$ in θ^+、$\Box u = F(u, \nabla u) \in H^{s-1}$ in θ^+ であるから、$u \in H^{s+1}$ at Q_0 を得る。これを繰り返すと、$u \in H^t$ at Q_0 for ${}^\forall t \in \mathbb{R}$ を得、これは、則ち、$u \in C^\infty$ at Q_0 を意味している。Q_0 は $\theta^+ \cap \{t^2 > x^2+y^2\}$ の中で任意にとれたから、$u \in C^\infty$ in $\{t^2 > x^2+y^2\}$ が示された。(証明終)

$M_\varepsilon = (t - y_0\varepsilon)\partial_t + x\partial_x + (y - \varepsilon)\partial_y$ とする。この M_ε

も、Σ_1, Σ_2に接するから、(7)を示したのと同様の方法で、

$$M_\varepsilon^j u \in H^{s-1} \ \text{in}\ \Theta^+ \ \text{for}\ {}^\forall j \in \mathbb{N}$$

を示すことができる。これを用いて、補題3と同様の方法で、

$$u \in C^\infty \ \text{in}\ \Theta^+ \cap \{t > y_0 \varepsilon\} \cap \{(t - y_0 \varepsilon)^2 > x^2 + (y-\varepsilon)^2\}$$

を示すことができる。εを正負をとわず動かすと、

$$u \in C^\infty \quad \text{in}\ \Theta_3$$

を得る。$u \in C^\infty$ in Θ_1 は、有限伝播性を用いて、$u \in C^\infty$ in Θ_2 は、Bony [7] の Commutator argument により示すことができる。(証明終)

定理2の証明　$\Theta^+ \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \{t^2 = x^2 + y^2\}$ を以下の4つの部分に分ける。

$$\Theta_1 = (\{t < x_0 x + y_0 y\} \cup \{t < x_1 x + y_1 y\}) \cap \Theta^+$$

$$\Theta_2 = (\{t < -x_0 x + y_0 y\} \cup \{t < -x_1 x + y_1 y\}) \cap \Theta_1^c \cap \Theta^+$$

$$\Theta_3 = \{x^2 + y^2 > t^2\} \cap \{t > -x_0 x + y_0 y\} \cap \{t > -x_1 x + y_1 y\} \cap \Theta^+$$

$$\Theta_4 = \{x^2 + y^2 < t^2\} \cap \{t > -x_0 x + y_0 y\} \cap \{t > -x_1 x + y_1 y\} \cap \Theta^+$$

$u \in C^\infty$ in Θ_1、Θ_2、Θ_3 の証明は定理1の証明と同様にしてできる。$u \in C^\infty$ in Θ_4 は、MがΣ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4 に接していることに注意すると、定理2のuに対し(7)及び、補題3が成立することからわかる。(証明終)

3、図2の破線上に特異性が現われる例

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)、\omega_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)、\omega_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)、\omega_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

とする。

定理3. $F(s)\in C^\infty(\mathbb{R})$ を

$F(s)$ は奇関数、

$-1\leqq F(s)\leqq 1$、

$F(s)=0$ for $0<s<\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}<s$、

$F(s)=1$ for $\frac{5}{3}<s<\frac{7}{3}$

なる関数とする。そのとき、$\square u=F(u)$ for $-\delta<t<\delta$, $x\in\mathbb{R}^2$、$u|_{t=0}=0$ の解 u で、

(8) $\operatorname{sing\,supp} u\cap\{-\delta<t<0\}=\bigcup_{i=1}^{4}\{t-\omega_i\cdot x=0\}$

(9) $\operatorname{sing\,supp} u\cap\{0<t<\delta\}=\bigcup_{i=1}^{4}\{t-\omega_i\cdot x=0\}\cup\{t^2=x^2+y^2\}$

なるものが存在する。

注. 言うまでもないが、この定理は、図2の破線上と特異性が現われる例である。

定理3の証明 h をヘビサイド関数、則ち、$h(t)=0$ for $t\leqq 0$、$h(t)=1$ for $t>0$ なる関数とする。

$$\chi_i=\prod_{\substack{i\neq j\\1\leqq j\leqq 4}} h(t-\omega_j\cdot x)\qquad(i=1,2,3,4)$$

$$\chi_5=h(t-\omega_3\cdot x)h(\omega_2\cdot x-t)-h(t-\omega_4\cdot x)h(\omega_1\cdot x-t)$$

とおく。次の2つの補題を用意する。

補題3.1 V_1 を次の初期値問題の解とする。

$$\begin{cases}\square V_1=\chi_1-\chi_2-\chi_3+\chi_4\\ V_1\equiv 0\qquad \text{for } t<0\end{cases}$$

そのとき、

$$\mathrm{sing\,supp}\, V_1 \supset \{t^2 = x_1^2 + x_2^2,\ t \geq 0\}$$

が成り立つ。

補題3.2　$a(t) \in C^\infty$ を、$0 \leqq a(t) \leqq 1$ であって．$t \leqq -2\delta$ のとき $a(t) = 0$ で、$t \geqq -\delta$ のとき $a(t) = 1$ なる関数とする。V_2 を次の初期値問題の解とする。

$$\begin{cases} \Box V_2 = a(t)\chi_5 \\ V_2 \equiv 0 \qquad \text{for } t < -2\delta \end{cases}$$

そのとき、

$$\mathrm{sing\,supp}\, V_2 \subset \bigcup_{i=1}^{4} \{t - \omega_i \cdot x = 0\}$$

と．十分小さい $\delta > 0$ に対し．

$$|V_1 + V_2| < \frac{1}{3} \qquad \text{for } t \in (-\delta, \delta)、x \in R^2$$

が成り立つ。

定理3の証明を続けよう。$V_3 = -h(t - \omega_1 \cdot x) + h(t - \omega_2 \cdot x) + 2h(t - \omega_3 \cdot x) - 2h(t - \omega_4 \cdot x)$、$u = V_1 + V_2 + V_3$ とおく。$\mathrm{sing\,supp}\, V_3 \subset \bigcup_{i=1}^{4} \{t - \omega_i \cdot x = 0\}$ であるから、補題3.1，補題3.2と合わせて、(8)、(9)を得る。$\chi = \chi_1 - \chi_2 - \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$ とおくと、明らかにわかるように、$\Box u = \chi$ である。一方、u と χ の定義から、$F(u) = \chi$ となる。$u|_{x_1=0} = 0$ については、$\chi|_{x_1=0} = 0$、$V_3|_{x_1=0} = 0$ からわかる。（証明終）

補題3.1の証明は、Rauch-Reed [5] と同様なので、略す。

補題3.2は、□の基本解を用いて、V_2を表示してみれば、容易にわかる。

注. T. Sasaki [6] は、$\square u = F(\nabla u)$ の場合について、同様の例を作っている。

参 考 文 献

[1] Beals, M. *Interaction of radially smooth nonlinear waves*, L. N. in Math. 1256 Springer 1-27 (1987)

[2] Bony, J. M. *Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations*, Taniguchi Symp. H. E. R. T. Katata, 11-49 (1984)

[3] Kato, K. *Interaction of singularities of solutions to semilinear wave equation at the boundary*, Sci. Papers of College of Arts and Sciences, Univ. of Tokyo, vol 38. No 2. (1988)

[4] Melrose, R. - Ritter, N. *Interaction of nonlinear progressing waves for semilinear wave equations*, Ann. of Math. 121, 187-213 (1985)

[5] Rauch, J. - Reed, M. *Singularities produced by the nonlinear interaction of three progressing waves; examples*, Comm. P. D. E. 7 (9), 1117-1133 (1982)

[6] Sasaki, T. *Interaction of two nonlinear waves at the boundary* Proc. of the Japan Acad. 63 Ser. A No. 10 375-378 (1987)

[7] Bony J. M, *Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaire*, Seminaire Goulauic-Schwartz exp. n°22 (1979-1980)