数理解析研究所講究録
693巻 1989年 112-118

Determinant について

京都大学理学部　原田雅名
(Harada, Masana)

up to rational equivalence で同じ、という形で定式化される Grothendieck-Riemann-Roch の定理が divisor の間の canonical な同型として定式化されることを、曲線の場合に見ます。この後に、Arakelov-Faltings による arithmetic surface 上での RR、Mumford の同型 $(\lambda_1)^{13} \simeq \lambda_2$、さらに Belavin-Knizhnik の定理をへて、Superstring の分配函数の話などがありますが、今回は、まったくふれられません。

[F] Faltings ; Calculus on Arithmetic Surfaces Ann. of Math. 119
[BGS] Bismut-Gillet-Soulé ; Analytic Torsion and Holomorphic determinant line bundles I, II, III Comm. Math. Phys. 115
[Q] Quillen ; Determinants of Cauchy-Riemann operators ; Func. analys. 19.
[G] Gillet ; Introduction to Higher Arakelov Theory, Contemp. Math. 67.
[GS] Gillet-Soulé ; Higher Arakelov Theory preprint
[KM] Knudsen-Mumford ; Math. Scand. 39
[K] Kempf ; Inverse Image of theta divisors, Ill. J. of Math, 29
[B] Moret-Beilly ; Asterisque 127.

1. Quillen-Grothendieck-Riemann-Roch と Determinant bundle

1.1：まずMを、一般の複素Kähler多様体とします。$\mathcal{L}$をX上の正則線束とします。$\mathcal{L}$上にHermite計量を定義したいのですが、一般には正矩(canonical)に定める方法はありません。もし一つ決めるならば、正矩な接続があり、曲率の$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}$として、Chern類 $c_1(\mathcal{L})$ という(1,1)形式が定まります。この形式のcohomology類は、$\mathcal{L}$のtopologyのみによって決ります。逆に、ある(1,1)形式で、cohomology類が$[c_1(\mathcal{L})]$になるものを考えると、Mがコンパクトならば、定数倍を除いて一意に、$\mathcal{L}$上の計量があって、その計量から定義されるc_1が、元のものになります。

1.2：今、Xを Riemann 面だとしますと、まずcanonical sheaf Ω^1に $\langle\omega,\omega'\rangle = i\int_X \bar{\omega}\wedge\omega'$ により計量を入れることができます。この計量は、各点でのresidueがisometryになることで特徴付けられます。(Grothendieckのdualizing sheafの構成) もう一つは、Riemann baseを使うやり方で、det(Im(周期行列))だけ違います。そこで、$\Omega^{1\otimes n}$には、計量を入れることができました。次に、tangent $T_X=(\Omega^1)^{\otimes -1}$上の計量から、Laplacianが定義され、Green函数が定義できます。これを使い、X上のdivisor Dに対して、$\mathcal{O}_X(D)$上に計量が定義できますが、$c_1(\mathcal{O}_X(D))$は

$\frac{\deg \mathcal{L}}{2g} c_1(\Omega^1_{\mathcal{L}})$ になります。$D' = D + (f)$, f は X 上の有理函数とすると、$\mathcal{O}_X(D) \xrightarrow[\approx]{f\cdot} \mathcal{O}_X(D')$ となり、それぞれの上に述べた計量は、この対応で isometry になります。（以上 [F] を参照）

1.3：さて、$f: X \to S$ をコンパクト Riemann 面の族とします。$\mathcal{L}$ を X 上の線束とし、Hermite 計量 $\| \ \|$ が与えられているとします。今 S 上に線束 $\det \mathbb{R} f_* \mathcal{L}$ を次の様に定義します。各点 $s \in S$ に対して、

$$(\det \mathbb{R} f_* \mathcal{L})_s = \left(\overset{\max}{\wedge} H^0(X|_s ; \mathcal{L}|_s)\right) \otimes \left(\overset{\max}{\wedge} H^1(X|_s ; \mathcal{L}|_s)\right)^{\otimes(-1)}$$

ここで、$\overset{\max}{\wedge}$ は、有限次元線型空間の最大外積の成す一次元空間、とします。$H^i(X|_s ; \mathcal{L}|_s)$ は、一般にはベクトル束になりませんが、各 s では、relative tangent $T_{X/S} = (\omega_{X/S})^{\otimes -1}$ 上の、residue から決まる計量により、$\| \ \|_{L^2, s}$ という計量が $\det \mathbb{R} f_* \mathcal{L}|_s$ 上に定まります。$\det \mathbb{R} f_* \mathcal{L}$ は正則束になりますが、この計量は、H^* の次元が変るところで見れば、C^∞ になりません。そこで、

$$\| \ \|_{Q,s} = (\det{}' \bar\partial_s \bar\partial_s^*)^{-1} \| \ \|_{L^2, s}$$

(但し、$\det{}' \bar\partial \bar\partial^*$ は、Hermite 作用素 $\bar\partial \bar\partial^*$ に対して、0 でない固有値の積にあたるもので、正確には、作用素の ζ 函数を使って定義します。くわしくは [BGS] などを参照）とおくと、C^∞-Hermite 計量を定めます。しかも、$c_1(\det \mathbb{R} f_* \mathcal{L}, \| \ \|_Q)$ は、次の Grothendieck-Riemann-Roch 型の定理を満します。（[LQ] では vector 束の場合も扱われている）

*) $$c_1(\det \mathbb{R}f_*\mathcal{L}, \|\ \|_Q) = \int_{X/S} Ch(\mathcal{L})\, Td(T_{X/S})$$
$$= \int_{X/S} \frac{1}{2} c_1(\mathcal{L})(c_1(\mathcal{L}) + c_1(T_{X/S})) + \frac{1}{12}(c_1(T_{X/S})^2 + c_2(T_{X/S}))$$
$$= \qquad \text{〃} \qquad + \frac{1}{12} c_1(\det \mathbb{R}f_*\mathcal{O})$$

ここで、$\int_{X/S}$ は、integration along fiber で、$Ch(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の Chern character, $Td(T_{X/S})$ は Todd genus。両辺とも、$\mathcal{L}$ の計量と、$T_{X/S}$ の計量によっているのですが、必ず等しい、という定理です。

1.4： 1.2 を、$f: X \to S$ に対して考えてみます。1.2 は、S = 一点の場合に相当します。まず、relative dualizing sheaf $\omega_{X/S}$ には、計量が入ります。$\mathcal{O}_X(\sum a_i^* S - \sum b_j^* S)$、$a_i, b_j$ は section，に計量を定めようとすると、S が compact でないため、$\partial\bar{\partial} f$ の形の不定性が Green 函数に残りますが、これは、c_1 には影響しません。

A) [BGS] においては、一般次元の fiber 上の、ベクトル束に対して、Quillen - Grothendieck - Riemann - Roch 型定理が証明されています。この場合、上の不定性を扱うために、$\partial\bar{\partial}\omega$、$\omega$ は $(p-1, p-1)$ 形式も data に入れる必要があります。これは、$S = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ に相当する、Arakelov 理論への応用のために必要です。([G] [GS])

curve の family と、line bundle に対しては、計量ではなく Divisor class を使った定式化が　　　　そのために、determinant の一般論が必要になります。

2. Determinant と theta 函数

2.1：X を scheme とします。X 上のベクトル束 $\mathcal{F}$ に対して、$\det \mathcal{F} = \bigwedge^{\max} \mathcal{F}$ として、線束を定義できます。$\mathcal{F}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{F}^1$ に対して、$\det d : \det \mathcal{F}^0 \to \det \mathcal{F}^1$ が functorial に定義されます。d が同型射ならば、$\det d$ も同型になりますが、これを $(\det \mathcal{F}^0)^{-1} \otimes \det \mathcal{F}^1$ 上の section とも思うことができます。一般に、$\{\mathcal{F}^\cdot\}$ を acyclic なベクトル束の複体とすると、$\det \mathcal{F}^\cdot = \bigotimes_{i:\mathrm{even}} (\det \mathcal{F}^i) \otimes \bigotimes_{i:\mathrm{odd}} (\det \mathcal{F}^i)^{(-1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$ が canonical に存在します。acyclic でない場合、さらに一般の perfect complex ([SGA6, III]) に対しても次のようなことが成り立ちます。

i) $0 \to \mathcal{F}_0^\cdot \to \mathcal{F}_1^\cdot \to \mathcal{F}_2^\cdot \to 0$ (exact) に対して、canonical, functorial な同型

$$i : \det \mathcal{F}_1^\cdot \xrightarrow{\sim} \det \mathcal{F}_0^\cdot \otimes \det \mathcal{F}_2^\cdot$$

が存在する。これは上の det の拡張になっている。

ii)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_{00}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{01}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{02}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_{10}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{11}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{12}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_{20}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{21}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{22}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

タテ・ヨコ exact

に対して、二つの canonical な同型、タテにつぶすのと、ヨコにつぶすのは同じである。つまり次は可換。

$$\begin{tikzcd}
\det \mathcal{F}_{00} \otimes \det \mathcal{F}_{02} \otimes \det \mathcal{F}_{20} \otimes \det \mathcal{F}_{22} \arrow[r, "\sim", "(タテ)_0 \otimes (タテ)_2"'] \arrow[d, "\wr", "{\substack{(2番目と3番目を入れ換えて\\ (ヨコ)_0 \otimes (ヨコ)_2)}}"'] & \det \mathcal{F}_{10} \otimes \det \mathcal{F}_{12} \arrow[d, "\wr"', "(タテ)_1"] \\
\det \mathcal{F}_{01} \otimes \det \mathcal{F}_{21} \arrow[r, "(ヨコ)_1", "\sim"'] & \det \mathcal{F}_{11}
\end{tikzcd}$$

iii)　$\det$, i は base change と可換。

さらに、上の三つの性質と、適当な normalization の条件が、$\det$, i を特徴付けることも分かります。（以上 [KM]。）

さて、$f: X \to S$ を proper, flat とすると、X 上の perfect complex $\mathcal{F}^{\bullet}$ に対して、$\det \mathbb{R}f_* \mathcal{F}^{\bullet}$ を定めることができます。X 上の exact な複体 $0 \to \mathcal{F}_0^{\bullet} \to \mathcal{F}_1^{\bullet} \to \mathcal{F}_2^{\bullet} \to 0$ に対して、$\det \mathbb{R}f_* \mathcal{F}_i^{\bullet}$ の間に、i), ii), iii) のような関係が成り立ちます。

つまり $\det \mathbb{R}f_* \mathcal{F}^{\bullet}$ が acyclic であれば、canonical な section が存在するわけです。

2.2:　$X \xrightarrow{f} S$ を、smooth proper な射で、fiber が一次元であるとします。仮定として、section $a: S \to X$ があるとします。$\mathcal{L}$ を X 上の line bundle として、$\det \mathbb{R}f_* \mathcal{L}$ が知りたいのですが、$\deg \mathcal{L} = g-1$ の時、$\det \mathbb{R}f_* \mathcal{L}$ は、acyclic になり、section が存在します。これが theta 函数になります。それは次のような意味です。

S 上の Picard scheme Jac^{g-1} と Poincare sheaf $\mathcal{P}^{(a)}$,（a にそって normalization を与えられて決るので、こう書きます。）が存在し、$[\mathcal{L}]: S \to \mathrm{Jac}^{g-1}$ があって、$\mathcal{L} \cong (\mathrm{id} \times [\mathcal{L}])^* \mathcal{P}^{(a)} \otimes f^* a^* \mathcal{L}$.
但し、同型は、a にそっての normalization を決めてやることにより一意に定まります。すると

$$\det \mathbb{R}f_*\mathcal{L} \cong \det \mathbb{R}f_*\left(((id\times[\mathcal{L}])^*\mathcal{P}^{(a)}\otimes f^*a^*\mathcal{L}\right)$$
$$\cong [\mathcal{L}]^*\det \mathbb{R}\pi_{2*}\mathcal{P}^{(a)}\otimes(a^*\mathcal{L})^{\otimes(g-1)}$$

つまり、Poincaré sheaf に対して、$\det \mathbb{R}\pi_{2*}$ を考えれば良い。

ところで、determinant の誘導する section が、$H^0(X;\mathcal{L})=0$ の時、初等的に定義されますので、$\det \mathbb{R}\pi_{2*}\mathcal{P}^{(a)}\cong\mathcal{O}_J(-m\Theta)$ Θ は theta divisor がすぐに分かりますが、semi-continuity の議論と一次元性が利いて（[K]）

(Mumford)　$\det \mathbb{R}\pi_{2*}\mathcal{P}^{(a)}\cong\mathcal{O}_J(-\Theta)$

が成り立ちます。

他の degree へは、$\mathcal{O}_X(n(a(S)))$ を使って平行移動させます。

2.3:　$\det\mathbb{R}f_*\mathcal{L}$ は、theta 函数と elementary factor $a^*\mathcal{L}$, $\mathcal{O}(*a(S))$ に、canonical な同型があることを見ましたが、*) の最後の式は、これから簡単に出ます。この同型は、a の取り方によりますが、これは Green 函数の不定性と同じものです。