

微分方程式の局所分類の話

一橋大数共研 真島 秀行 (Hideyuki Majima)

0. 微分方程式の局所不変量による分類について典型的な方程式を取り上げ解説したい。「話」と表題に入れたのは以下でこの問題の雰囲気伝えることを目的とし要語の定義等を正確に下してない部分があるためである。詳しくは参考文献にある, M. Hukuhara, T. Kimura, T. Matuda, J. Ecalle, B. Malgrange, J. Martinet-J.P. Ramis, F. Pham, D. G. Babbitt-V.S. Varadarajan, Y. Sibuya, W. Balser-W. Jurkat-D.A. Lutzらの論文を参照されたい。§1で単独1階非線型常微分方程式を, §2で単独2階斉次線型方程式を漸近展開のみを用いて考察する手法を解説し, §3でEcalleの *resurgency*, *alien derivative* した *resurgent equation* と §1, §2の結果との関連を述べた。§1で扱った方程式に関する *resurgent equation* 等については [E2] [CNPの *Visite aux sources*] が良い解説としてあるため, 敢えてこの小論の中で再録的なことはしなかった。漸近展開論的手法, 線型方程式に関する事柄に力点を置いて述べた。

1. 単独1階非線型常微分方程式の局所分類の話

次のような単独1階非線型常微分方程式を考える。

$$(1) \quad t^2 \frac{d}{dt} y + y + b(t, y) = 0.$$

ここで, $b(t, y)$ は $(t, y) = (0, 0)$ で正則で

$$(2) \quad b(t, y) = \sum_{m, n} b_{m, n} t^m y^n$$

とTaylor展開できるものとし, さらに次をみたすものとする。

$$(3) \quad b_{0,0} = b_{0,1} = 0$$

Cauchyの解の存在定理によれば, $t \neq 0$ の近くで正則解の存在が知られるが, それを解析接続したとき, 0 に t が近づいた時どんな挙動をするかなど何も分らない。

そこで, 収束性はさておいて ($b_{0,1} = 1$ をみたす)

$$(4) \quad y = h(t, Y) = \sum_{j, \ell} h_{j, \ell} t^j Y^\ell = \sum_{\ell} h_{*, \ell}(t) Y^\ell = \sum_{j} h_{j, *}(Y) t^j$$

なる形式変換により (1) がどれくらい簡単な方程式になるか考えると, 実は, $h_{*, \ell}(t)$ は形式中級数, $h_{j, *}(Y)$ は収束中級数で

$$(5) \quad t^2 \frac{d}{dt} Y + (1 + \lambda t) Y = 0$$

に変換されることが知られている。 $\lambda = b_{1,1} - 2b_{1,0}b_{0,2}$ である。

(5) は, $u t^{-\lambda} e^{\frac{1}{t}}$ (u は任意常数) という一般解をもつから

(4) に代入して, (1) は

$$(6) \quad \mathcal{P}(t, u) = h(t, u t^{-\lambda} e^{\frac{1}{t}}) = \sum_{\ell} h_{*, \ell}(t) (u t^{-\lambda} e^{\frac{1}{t}})^{\ell}$$

という形式解をもつことが分る。形式解が分, ただけでは(1)の正則解についての情報はないのであるが, 実は十分小さな

扇形 (又は角) 領域

$$(7) \quad S: \underline{\theta} < \arg t < \bar{\theta}, 0 < |t| < r, |Y| < R$$

に限定すれば、正則変換 $y = h_S(t, Y_S)$ で (1) を (5) に変換するものがあり、形式変換 (4) は $h_S(t, Y)$ の (7) におけるある種の漸近展開になっていることが知られている。

さて、それで十分かといえはまだ不十分で、角領域を取り換えた時の h_S らの関係、即ち、解析接続の関係が分らないといけない。

$$(7)' \quad S': \underline{\theta}' < \arg t < \bar{\theta}', 0 < |t| < r', |Y| < R'$$

をもう一つの角領域とし、 $S \cap S' \neq \emptyset$ なるとき

$$(8) \quad Y_S = h_S(t, y)$$

を S における $y = h_S(t, Y_S)$ の逆変換として、

$$(9) \quad Y_S = h_S(t, h_{S'}(t, Y_{S'}))$$

という変換を考えれば、 $y = h_S(t, Y_S)$, $y = h_{S'}(t, Y_{S'})$ がそれぞれ S , S' 上で (1) を (5) に変換することから、 $S \cap S'$ で変換 (9) は、(5) を (5) 自身に変換することになる。

$$(10) \quad Y_S = h_{SS'}(t, Y_{S'}) = \sum_{\ell} h_{\times \ell}^{SS'}(t) Y_{S'}^{\ell}$$

とおき直すと、 $h_{SS'}$ は

$$(11) \quad t^2 \frac{d}{dt} h_{SS'} + (1 + \lambda t) h_{SS'} - (1 + \lambda t) Y_{S'} \frac{\partial}{\partial Y_{S'}} h_{SS'}(t, Y_{S'}) = 0$$

をみたす、即ち、 $h_{\times \ell}^{SS'}(t)$ は次をみたす。

$$(12) \quad t^2 \frac{d}{dt} h_{\times \ell}^{SS'}(t) + (1 - \ell)(1 + \lambda t) h_{\times \ell}^{SS'}(t) = 0$$

従って、 A_{l-2} ($l=0, 2, 3, \dots$) を定数として

$$(13) \quad h_{\times l}^{s, s'}(t) = (t^{-\lambda} e^{\frac{t}{\epsilon}})^{l-2} A_{l-2}$$

が (12) の解であるから、(11) の解である $h_{ss'}$ は

$$(14) \quad Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = A_1 (t^{-\lambda} e^{\frac{t}{\epsilon}}) + Y_{s'} + \sum_{l=2}^{+\infty} A_{l-2} (t^{-\lambda} e^{\frac{t}{\epsilon}})^{l-2} Y_{s'}^{l-2}$$

という形になる。

ところで、 S, S' において $h_s, h_{s'}$ が共に同じ漸近級数をもつことから、 $S \cap S'$ において $h_{ss'}$ は恒等変換に漸近的でなくてはならず、 $e^{\frac{t}{\epsilon}}$ の挙動を考慮併せると、

$$(15.1) \quad S \cap S' \text{ が } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) < 0 \text{ の角領域に含まれていれば、}$$

$$Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = A_1 (t^{-\lambda} e^{\frac{t}{\epsilon}}) + Y_{s'}$$

$$(15.2) \quad S \cap S' \text{ が } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) > 0 \text{ の角領域に含まれていれば、}$$

$$Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = Y_{s'} + \sum_{l=2}^{+\infty} A_{l-2} (t^{-\lambda} e^{\frac{t}{\epsilon}})^{l-2} Y_{s'}^{l-2},$$

ただし、 $\sum_{l=2}^{+\infty} A_{l-2} y^{l-2}$ は収束半径が 0 でない級数。

$$(15.3) \quad S \cap S' \text{ が } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = 0 \text{ の方向を含んでいれば、}$$

$$Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = Y_{s'}$$

となることが分る。

また、3つの角領域 S, S', S'' があって $S \cap S' \cap S'' \neq \emptyset$ のとき、 $h_{ss'}, h_{ss''}, h_{s's''}$ は定義より次の式をみたす。

$$(16) \quad Y_s = h_{ss'}(t, h_{s's''}(t, h_{s's}(t, Y_s))) = Y_s.$$

これはある種のいわゆる 1-コサイクル条件であり、解析接続の情報 $\{h_{ss'}; s, s'\}$ がある被覆のある層に値をとる 1-コサイ

フルで、その層に値をもつ 1 次コホモロジー・クラスの代表を表していることとみなせることを示している。

実際、 \mathbb{C} の原点 0 に向かう向き全体の集合として円周 S^1 をみなし、 S^1 の連結部分開集合 U に対し角領域

$$(17) \quad S(U, r, R) = \left\{ (t, y) \mid \frac{t}{R} \in U, 0 < |t| < r, |y| < R \right\}$$

を考え、

$$(18) \quad \Lambda_{1, \lambda}(U, r, R) = \left\{ \text{変換 } (t, y) \mapsto (t, h(t, y)) \text{ で、} h \text{ は } S(U, r, R) \text{ に於いて} \right. \\ \left. (15.1), (15.2), (15.3) \text{ で決まるもの} \right\}$$

とおく。 $\Lambda_{1, \lambda}(U, r, R)$ の演算は変換の合成としておく。

$$(19) \quad \operatorname{dir} \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow 0} \Lambda_{1, \lambda}(U, r, R) \equiv \Lambda_{1, \lambda}(U)$$

とし、 $\Lambda_{1, \lambda}(U)$ とそれらの間の自然な制限写像を考えれば、 S^1 上の準層が得られ、それから導かれる層を $\mathcal{E}_{1, \lambda}$ とする。

$$(20) \quad \mathcal{E}_{1, \lambda} = \left\{ (1) \text{ 型の方程式で形式変換 (4) により (5) 型になるもの} \right\} \\ \text{(ここで、} \lambda \text{ は 1 つ固定した。)}$$

を考えると、先にみたことは、 $\mathcal{E}_{1, \lambda}$ から $H^1(S^1, \Lambda_{1, \lambda}) \wedge$ 自然な写像があるということである。実は次が成立する。

定理. $\mathcal{E}_{1, \lambda} / \sim \approx H^1(S^1, \Lambda_{1, \lambda})$. ここで、 $\mathcal{E}_{1, \lambda}$ に含まれる 2 つの方程式 $(eq)_1, (eq)_2$ が同値 $(eq)_1 \sim (eq)_2$ であるとは正則変換 $(t, y) \mapsto (t, h(t, y))$ により $(eq)_1$ が $(eq)_2$ に変換されることとする。

(1) 型の方程式でとくに形式変換 (4) で (5) (λ は固定) になる

方程式の全体を局所正則変換で分類すると、その分類空間が $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ と一致するのである。先に述べたように $\varepsilon_{1,\lambda}$ から分類空間 $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ への写像があることは漸近展開可能な変換の存在によるから以前から知られていたことになるが、全射性は比較的新しい結果で、ある種の消滅定理により、証明されるものである。

さて、我々は (1) の解を知ろうとし、解析接続の情報を上のように $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ の元としてとらえることになったのだが、具体的にそれを表さないと解が分らない。しかし、具体的に計算できるのは、(1) が有次又は非有次線型であるとか Riccati 型である条件をみたすときぐらいでほとんど不可能のように思われる。だからこそ $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ と表しておく意義があるのかも知れない。実は、(15.1) - (15.3) とある程度具体的に $\Lambda_{1,\lambda}(U)$ の元が記述されるから、もう少し具体的に分類空間を表示できる。それでもやはり計算が難しいところは依然そのままであると思う。

もう少し具体的な表示と述べたものを以下で見よう。 S^1 の被覆として、 $\{U_0 = \{e^{i\theta}; \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}, U_1 = \{e^{i\theta}; \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})\}\}$ をとろう。この被覆についてはトコチェインはすべてトコサクルで、トコバウンダリーは (15.3) より自明なものしかなく、

$$(21) \quad H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda}) \cong H^1(\{U_0, U_1\}, \Lambda_{1,\lambda}) \cong C^1(\{U_0, U_1\}, \Lambda_{1,\lambda})$$

となる。また、 $U_0 \cap U_1 = \{t \in S^1; \operatorname{Re} t > 0\} \cup \{t \in S^1; \operatorname{Re} t < 0\}$ となること (15.1)(15.2) より、

$$(22) \quad H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda}) \simeq \left\{ (t, y) \mapsto (t, y + A_1 t^{-1} e^{\frac{1}{t}}); A_1 \in \mathbb{C} \right\} \\ \times \left\{ (t, y) \mapsto (t, y + \sum_{l=2}^{+\infty} A_{1-l} (t^{-1} e^{\frac{1}{t}})^{-l} y^l; \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} \sqrt[l]{|A_{1-l}|} < +\infty) \right\} \\ \simeq \mathbb{C} \times \left\{ \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} + \sum_{l=2}^{+\infty} A_{1-l} \mathbb{C}^l; \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} \sqrt[l]{|A_{1-l}|} < +\infty \right\}.$$

最後のものは、複素多様体の芽 $(\mathbb{C}, 0)$ からそれ自身への $\mathbb{I}d$ に 1 次接触の同型写像の全体になっている。前にも述べたが、こう表しても、 A_1, A_{-1}, A_2, \dots を具体的に計算することはいくつかの場合 (線型, Riccati 型) を除くと極めて難しいと思われる。また、今の場合 S^1 の複葉を簡単で分りやすくとれたが一般的にはこのようなことは期待できないであろう。そこで、 $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ という表示に安住するという事にもなる。

最後になたが形式解 (6) の係数のみたす方程式を導いておこう。

(1) に $y = \tilde{y} - b_{10} t$ という変換をしておく

$$(23) \quad t^2 \frac{d}{dt} \tilde{y} + (1 + \lambda t) \tilde{y} + \sum_{m=2}^{+\infty} \tilde{b}_{m,0} t^m + \sum_{m=2}^{+\infty} \tilde{b}_{m,1} t^m \tilde{y} + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \tilde{b}_{m,n} t^m \tilde{y}^n = 0$$

となることに注意し (23) に対する形式解 $\phi(t, u) = \sum_{l=0}^{+\infty} g_{*l}(t) (u t^{-1} e^{\frac{1}{t}})^l$ の係数 $g_{*l}(t)$ のみたす方程式を導く。(23) を次のように書く。

$$(23)' \quad t^2 \frac{d}{dt} \tilde{y} + (1 + \lambda t) \tilde{y} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{*n}(t) \tilde{y}^n = 0.$$

このとき、 $g_{*l}(t) (l = 0, 1, 2, \dots)$ は、

$$(24) \quad t^2 \frac{d}{dt} g_{*l}(t) - (l-1)(1+\lambda t) g_{*l}(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{b}_{*n}(t) \sum_{k_1 + \dots + k_n = l} g_{*k_1}(t) \cdots g_{*k_n}(t) = 0$$

をみたす。

2. 単独2階斉次線型常微分方程式の局所分類の話

次のような単独2階斉次線型常微分方程式を考える。

$$(1) \quad \left(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{z} + \frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right) \frac{d^2}{dz^2} x + \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\gamma_1(z)}{z^2}\right) \frac{d}{dz} x + \left(\alpha_0 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\gamma_0(z)}{z^2}\right) x = 0$$

ここで、 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ は定数で、 $\alpha_2 \neq 0, \alpha_0 \neq 0, \gamma_0(z), \gamma_1(z), \gamma_2(z)$ は $z = \infty$ で正則であるものとする。さらに、

$$(2) \quad \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

の2つの解 λ_1, λ_2 は相異なると仮定する。このとき、(1)は

$$(3) \quad x(z, u_1, u_2) = u_1 e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} \phi^{(1)}(z) + u_2 e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \phi^{(2)}(z)$$

という形の形式解を持つ。ここで、 u_1, u_2 は任意定数、 τ_i は

$$(4) \quad (2\lambda_i \alpha_2 + \alpha_1) \tau_i + (\lambda_i^2 \beta_2 + \lambda_i \beta_1 + \beta_0) = 0 \quad (i=1,2)$$

で決まる定数で、 $\phi^{(i)}(z)$ は $\frac{1}{z}$ に関する形式中級数であり、

$$(5) \quad \left(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{z} + \frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right) \frac{d^2}{dz^2} \phi + \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\gamma_1(z)}{z^2}\right) + 2\left(\lambda_i + \frac{\tau_i}{z}\right) \left(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{z} + \frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right) \right\} \frac{d}{dz} \phi + \left\{ \left(\alpha_0 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\gamma_0(z)}{z^2}\right) + \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\gamma_1(z)}{z^2}\right) \left(\lambda_i + \frac{\tau_i}{z}\right) + \left(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{z} + \frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right) \left(\lambda_i + \frac{\tau_i}{z}\right)^2 - \frac{\tau_i}{z^2} \right\} \phi = 0, \quad \phi(\infty) \neq 0$$

をみたく ($i=1,2$)。十分小さな[?]任意の角領域 (頂点は ∞)

$$(6) \quad S: \quad \underline{\theta} < \arg z < \bar{\theta} \quad |z| > \rho$$

に対し、その上で $\phi^{(i)}(z)$ を漸近級数とする正則な(5)の解 $\phi_S^{(i)}(z)$

が存在し、従って(1)は S 上で正則な

$$(7) \quad x_S(z, u_1, u_2) = u_1 e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} \phi_S^{(1)}(z) + u_2 e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \phi_S^{(2)}(z)$$

という解をもつことが分る。 S' をもう一つの角領域であっ

て, $S \cap S' \neq \emptyset$ をみたすものとするれば,

$$(8) \quad (e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} \phi_{S'}^{(1)}(z), e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \phi_{S'}^{(2)}(z)) \\ = (e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} \phi_S^{(1)}(z), e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \phi_S^{(2)}(z)) \begin{pmatrix} c_{11}^{ss'}, & c_{12}^{ss'} \\ c_{21}^{ss'}, & c_{22}^{ss'} \end{pmatrix}$$

という可逆定数行列 $C_{ss'} = (c_{ij}^{ss'})_{i,j=1,2}$ が存在する。 $\phi_S^{(i)}, \phi_{S'}^{(i)}$

が, $S \cap S'$ 上で同じ漸近級数 $\phi^{(i)}$ をもつ ($i=1,2$) ことから,

$$(9) \quad \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}^{ss'}, & c_{12}^{ss'} \\ c_{21}^{ss'}, & c_{22}^{ss'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 z} z^{-\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 z} z^{-\tau_2} \end{pmatrix}$$

は単位行列に $S \cap S'$ 上で漸近展開可能である。従って

$$(10) \quad c_{11}^{ss'} = c_{22}^{ss'} = 1$$

(11.1) $S \cap S'$ が $\operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)z > 0$ なる角領域に含まれるば,
 $c_{12}^{ss'} = 0$, $c_{21}^{ss'}$ は必ずしも 0 でない

(11.2) $S \cap S'$ が $\operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)z < 0$ なる角領域に含まれるば,
 $c_{12}^{ss'}$ は必ずしも 0 でないが, $c_{21}^{ss'} = 0$.

(11.3) $S \cap S'$ が $\operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)z = 0$ なる方向を含めば,
 $c_{12}^{ss'} = c_{21}^{ss'} = 0$.

となる。また, $S \cap S' \cap S'' \neq \emptyset$ なるとき,

$$(12) \quad C_{ss'} C_{s's''} C_{s''s} = \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから $\left\{ (e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1}, e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2}) C_{ss'} (e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1}, e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2})^{-1}; s, s' \right\}$
 は, ある被覆のある層に値をとる 1-コサイクルで, その層に
 値をもつ 1 次コホモロジー・クラスを代表しているとみなせる。

実際, \mathbb{C} の ∞ に向かう向き全体の集合として円周 S^1 をみ
 れば, さらに

$$(13) \quad \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{\tau_1}{z} & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \frac{\tau_2}{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{\tau_1}{z} & \\ & \lambda_2 + \frac{\tau_2}{z} \end{bmatrix}$$

の解 $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ で Id に漸近展開可能な行列関数の芽の層を定めることができ、それを $\Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$ で表せば、上のものは、 $H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$ の元を定めることになる。

複素平面 \mathbb{C} の無限遠点 ∞ で有理型な関数係数の線型常微分方程式系

$$(14) \quad \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A(z) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

で、形式変換

$$(15) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P(z) \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad P(z) = \begin{bmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C} \llbracket \frac{1}{z} \rrbracket)$$

により、

$$(16) \quad \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{\tau_1}{z} & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \frac{\tau_2}{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

となる方程式系の全体の集合を $\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$ と書き表し、 $\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$ に含まれる方程式 (E) と (E) を (16) に変換する形式変換行列 P との組の全体の集合を $\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2; \text{Trans})$ と書き表しておく。 $\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2; \text{Trans})$ の二つの元 $((E)_1, P_1)$ と $((E)_2, P_2)$ とが同値 $((E)_1, P_1) \sim ((E)_2, P_2)$ とは $P_2^{-1}P_1$ が正則関数係数可逆行列になり、それによる変換で $(E)_1$ が $(E)_2$ に変換されることをいうこととすると次が成立する。

定理. $\sim \mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2; \text{Trans}) \approx H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$.

また、(16) をそれ自身に変換する形式変換は、 $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$ ($\mu\nu \neq 0, \mu, \nu \in \mathbb{C}$) という形の定数行列によるものであることを

考慮すれば、同じ方程式 (E) で P_1, P_2 と (16) に変換する行列をもてば、 $P_1 = P_2 \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$ となることがわかる。さらに、 $H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$ が線型空間 $\mathbb{C}^{\text{Irr}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)}$ に同型であることが知られている。ここで、 $\text{Irr}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$ は線型常微分方程式系 (13) の Melnangne の意味の不確定度であって、今の場合は 2 に等しい。 $H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$ の 2 つの元 $[(P_{SS})], [(Q_{SS})]$ に対して、それらが同値 $[(P_{SS})] \sim [(Q_{SS})]$ ということと、それぞれに対して決まる形式変換行列 P, Q の間に $P = Q \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$ となることと定め、 $\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$ の 2 つの元 $(E)_1, (E)_2$ が同値 $(E)_1 \sim (E)_2$ とは正則変換で $(E)_1$ から $(E)_2$ に変換するものがあることと定義すると次のことが成り立つ。

定理 $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2) \cong H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)) / \sim$

さて、(10), (11) を考慮して $H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$ をもう少し具体的に表そう。 $\arg(\lambda_1 - \lambda_2) \equiv \omega + \frac{\pi}{2}$ とし、 $V_0 = \{e^{i\theta}; -\omega - \pi < \theta < -\omega + \pi\}$
 $V_1 = \{e^{i\theta}; -\omega < \theta < -\omega + 2\pi\}$ とすると $S^1 = V_0 \cup V_1$ であり、
 $V_0 \cap V_1 = \{e^{i\theta}; \text{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)e^{i\theta} > 0\} \sqcup \{e^{i\theta}; \text{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)e^{i\theta} < 0\}$
 となることから、次のようであることがわかる。

$$(17) \quad H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{21} & 1 \end{pmatrix}; c_{21} \in \mathbb{C} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; c_{12} \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(18) \quad H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)) / \sim \cong \{(c_{12}, c_{21}) \in \mathbb{C}^2\} / \sim$$

$$\left[\text{但し、} (c_{12}, c_{21}) \sim (d_{12}, d_{21}) \Leftrightarrow \begin{matrix} c_{12} \mu \nu^{-1} = d_{12} \\ c_{21} \mu^{-1} \nu = d_{21} \end{matrix} \right]$$

微分方程式 (1) または (14) が与えられたとき、それに対応する $c_{12},$

C_{21} を具体的に求めることは一般的には難しく、また(16)に
 応ずるものがより複雑になったときの線型常微分方程式を考
 える場合に被覆がそれほどうまく取れないで複雑になること
 などの理由により、 $H^1(S^1, \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$ という表現の意義深
 さが生まれてくるように思われる。尚、合流型超幾何方程式
 Bessel 方程式などについては、 C_{12}, C_{21} を具体的に計算できる。

ところで、 $S(U, R)$ における(1)の基本解を

$$(19) \quad (\phi_j^{(1)}(z), \phi_j^{(2)}(z)) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \end{pmatrix}$$

とする ($j=0, 1$)。このとき、次の関係式が成り立っている。

$$(20.1) \quad -\omega < \arg z < -\omega + \pi \text{ のとき, } \operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)z < 0 \text{ で}$$

$$(\phi_0^{(1)}(z), \phi_0^{(2)}(z)) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\phi_1^{(1)}(z), \phi_1^{(2)}(z)) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \end{pmatrix}$$

$$(20.2) \quad -\omega - \pi < \arg z < -\omega \text{ のとき, } \operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)z > 0 \text{ で}$$

$$(\phi_0^{(1)}(z), \phi_0^{(2)}(z)) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_{21} & 1 \end{pmatrix} = (\phi_1^{(1)}(ze^{2\pi i}), \phi_1^{(2)}(ze^{2\pi i})) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \end{pmatrix}$$

$$(20.3) \quad -\omega + \pi < \arg z < -\omega + 2\pi \text{ のとき, } \operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)z > 0 \text{ で}$$

$$(\phi_0^{(1)}(ze^{-2\pi i}), \phi_0^{(2)}(ze^{-2\pi i})) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_{21} & 1 \end{pmatrix} = (\phi_1^{(1)}(z), \phi_1^{(2)}(z)) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 z} z^{\tau_2} \end{pmatrix}$$

これらの式から、

$$(21.1) \quad \phi_0^{(1)}(z) = \phi_1^{(1)}(z) \quad (-\omega < \arg z < -\omega + \pi) \text{ を解析接続して与えられる解析関数を } \tilde{\phi}^{(1)}(z)$$

$$(21.2) \quad \phi_0^{(2)}(z) = \phi_1^{(2)}(ze^{2\pi i}) \quad (-\omega - \pi < \arg z < -\omega) \text{ を解析接続して与えられる解析関数を } \tilde{\phi}^{(2)}(z)$$

と定義すれば、次の式が成立する。

$$(22.1) \quad \tilde{\phi}^{(1)}(ze^{2\pi i}) - \tilde{\phi}^{(1)}(z) = \tilde{\phi}^{(2)}(z) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} z^{\tau_2 - \tau_1} C_{21}$$

$$(22.2) \quad \tilde{\phi}^{(2)}(ze^{-2\pi i}) - \tilde{\phi}^{(2)}(z) = \tilde{\phi}^{(1)}(z) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)z} z^{\tau_1 - \tau_2} C_{12}$$

3. Ecalle の alien derivative, resurgent equations の話.

第1節における(1)の形式解の係数 $h_{x,l}(t)$, 従って(2)の対する $g_{x,l}(t)$, また, 第2節における(1)の形式解の係数 $\phi^{(k)}(z)$ は漸近展開論的観点から 1-summable であることが知られている ([MR], [RS]). 形式中級数 $\hat{f}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n t^n$ が 1-summable であるとは, S^1 の有限部分集合 $\Sigma(\hat{f})$ があって, $S^1 - \Sigma(\hat{f})$ のすべての元, すなわち向き α に対して, α を中心とする π の開き $[\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}]$ を含む向き V_α があって, $S(V_\alpha, r)$ 上に \hat{f} を漸近級数とする正則関数 f_α があって, 任意の開部分角領域 $S' \Subset S(V_\alpha, r)$ に対して, 定数 $C_{S'}, A_{S'}$ があり, すべての自然数 n について, 次が成立することをいう.

$$(1) \quad \sup_{t \in S'} |f^{(n)}(t)| \leq C_{S'} (n!)^{1+\frac{1}{2}} A_{S'}^n$$

実は Ecalle [E1,2] によりもっと精密なことが示された. Ecalle の結果を述べるために Borel 変換等の言葉を用意する. $t=c$ を中心にするやり方もあるが, $z = \frac{1}{t} = \omega$ を中心として話す.

形式中級数 $\phi(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \phi_j z^{-j-1}$ に対し, その Borel 変換を

$$(2) \quad \phi(s) \equiv (B\phi)(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \phi_j \frac{s^j}{j!}$$

で定義する. 次の公式が成立する.

$$(3) \quad (-s)\#(s) = (-s)(B\phi(s)) = (B(\frac{d}{ds}\phi))(s)$$

$$(4) \quad \phi(s) * \psi(s) = \int_0^s \phi(s-s)\psi(s)ds = B(\phi * \psi)(s)$$

(収束しない場合でも形式的に成立する。)

ϕ が収束級数のとき, $\phi = B\phi$ は $|\phi(z)| \leq \text{const.} e^{\sigma|z|}$ ($\sigma > 0$) の評価をもつ整関数で, ϕ が 1-summable のとき, (1) よりとくに

$$(5) \quad |\phi_j| \leq C_j / A^j$$

が成立するから, $\phi = B\phi$ は C でない有限な収束半径をもつ。このとき, ϕ を解析接続しようとするとき特異点に必ず出会うはずだが, 常微分方程式の形式解に現れる形式中級数の Borel 変換はそれほど特異点をもっていないというのが Ecalle の結果の一つである。

第 2 節の $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ については次のようである。 $\omega^{(1)} = \lambda_1 - \lambda_2$, $\omega^{(2)} = \lambda_2 - \lambda_1$ とおく。 $\mathbb{C} - \{\omega^{(j)}\}$ を $\mathbb{C} - \{\omega^{(j)}\}$ の普遍被覆空間とする。

定理. ($\phi^{(j)}$ -定数) の Borel 変換は $\mathbb{C} - \{\omega^{(j)}\}$ 上の解析関数に解析接続される. ($j=1, 2$). (それを便宜上 $\widehat{\phi}^{(j)}$ と書く。)

このことを見るには次のような議論をすればよい。

第 2 節の (5) で求めた式に $\lambda_1, \lambda_2, \omega^{(j)}$ を代入して, $\phi^{(j)}$ ($j=1, 2$) のみたす方程式を書くと

$$(6)_j \quad \left(\alpha_2 + \frac{\beta_2}{z} + \frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right) \frac{d^2\phi}{dz^2} + \left(\omega^{(j)}\alpha_2 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\gamma_1'(z)}{z^2}\right) \frac{d\phi}{dz} + \frac{\gamma_0'(z)}{z^2} \phi = 0.$$

となる。(6)_j の代わりにパラメータ ε のついた方程式

$$(7) \quad \alpha_2 \frac{d^2\phi}{dz^2} + \alpha_2 \omega^{(j)} \frac{d\phi}{dz} = -\varepsilon \left\{ \left(\frac{\beta_2}{z} + \frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right) \frac{d^2\phi}{dz^2} + \left(\frac{\beta_1}{z} + \frac{\gamma_1'(z)}{z^2}\right) \frac{d\phi}{dz} + \frac{\gamma_0'(z)}{z^2} \phi \right\}$$

を考え、その解を $\phi(z, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(z) \varepsilon^m$ の形に求める。

$$(7.1) \quad \alpha_2 \frac{d^2\phi_1}{dz^2} + \alpha_2 \omega^{(j)} \frac{d\phi_1}{dz} = 0,$$

$$(7.2) \quad \alpha_2 \left(\frac{d^2}{dz^2} + \omega^{(j)} \frac{d}{dz} \right) \phi_m = - \left\{ \left(\frac{\beta_2}{z} + \frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right) \frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{\beta_1}{z} + \frac{\gamma_1'(z)}{z^2}\right) \frac{d}{dz} + \frac{\gamma_0'(z)}{z^2} \right\} \phi_{m-1} \quad (m \geq 2)$$

を $\phi_1(z), \phi_2(z), \dots$ がみたすから、形式中級数解として

$$(8.1) \quad \phi_1(z) = \text{定数}$$

$$(8.m) \quad \phi_m(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \text{ の項から始まる形式中級数 } (m \geq 2)$$

となることが分る。一方、(7)の両辺にBorel変換を施して

$$(9.m) \quad \alpha_2(-s)(-s + \omega^{<j>}) \phi_m(s) = \overset{\text{整数関数解}}{\text{整数関数}} * \phi_{m-1}(s) \quad (m \geq 2)$$

となるから、 $\phi_m(s) (m \geq 2)$ は $s = \omega^{<j>}$ 以外に特異点のない関数となることが分る。 $\sum_{m=2}^{+\infty} \phi_m(s) \varepsilon^m$ が $\omega^{<j>}$ を除いた所で広義一様収束することを云って、とくに、 $\varepsilon = 1$ として定理を得る。

上の $\tilde{\phi}^{<j>}(s)$ は $\arg s = \varepsilon$ (一定) $\neq \arg \omega^{<j>}$ では

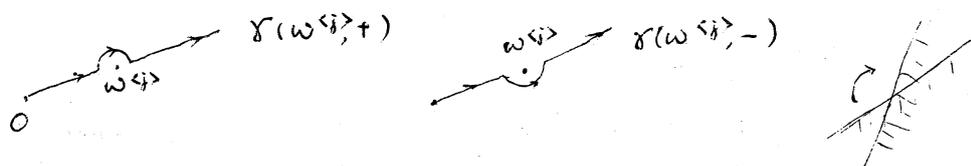
$$(10) \quad |\tilde{\phi}^{<j>}(s)| \leq c e^{\rho |s|} \quad (c > 0, \rho > 0)$$

という評価をもつから、 θ 方向のLaplace変換

$$(11) \quad (\mathcal{L} \tilde{\phi}^{<j>})(z) = \int_c^{+\infty} e^{-sz} \tilde{\phi}^{<j>}(s) ds$$

は、 $\operatorname{Re} z e^{i\theta} > \rho$ なる半平面で正則であるがその中で ω に近づくとき、 $\phi^{<j>}(z)$ (定数) を漸近級数とするから、 $\Sigma(\phi^{<j>}) = \{-\arg \omega^{<j>}\}$ として 1-summable になる。

$\arg \omega^{<j>}$ 方向に特異点 $\omega^{<j>}$ があるが、それを時計回りに半周よけて進む積分路を $\gamma(\omega^{<j>}, +)$ 、それを反時計回りに半周よけて進む積分路を $\gamma(\omega^{<j>}, -)$ としよう。



$$(12) \int_{\gamma(\omega^{(1)}, -)} e^{-sz} \tilde{\phi}^{(1)}(s) ds = \tilde{\phi}^{(1)}(z)$$

は、 $\arg \omega^{(1)} - 2\pi < \epsilon < \arg \omega^{(1)}$ に対する $L^0 \phi^{(1)}(z)$ に解析接続されていき、次のものになる。

$$(13) \int_{\gamma(\omega^{(1)} e^{2\pi i}, +)} e^{-sz} \tilde{\phi}^{(1)}(s) ds = \tilde{\phi}^{(1)}(z e^{2\pi i})$$

この差

$$(14) \tilde{\phi}^{(1)}(z e^{2\pi i}) - \tilde{\phi}^{(1)}(z) = \int_{\gamma(\omega^{(1)})} e^{-sz} \tilde{\phi}^{(1)}(s) ds \quad (0 \leq \arg \omega^{(1)} < 2\pi)$$

は、また (6)₁ の解であるから $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} z^{\tau_2 - \tau_1} \phi^{(2)}(z)$ に漸近的な (6)₁ の解となっているはずである。

$$(15) \int_{\gamma(\omega^{(1)} e^{-i\epsilon}, -)} e^{-sz} \tilde{\phi}^{(2)}(s) ds = \tilde{\phi}^{(2)}(z)$$

とおくとき、定数 C_{21} があって (第2節(2.1)と同じく)

$$(16) -\tilde{\phi}^{(1)}(z e^{2\pi i}) + \tilde{\phi}^{(1)}(z) = -C_{21} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} z^{\tau_2 - \tau_1} \tilde{\phi}^{(2)}(z)$$

となる。一方、 $\tilde{\phi}^{(1)}(s - \omega^{(1)} + \omega^{(1)})$ は $\omega^{(1)}$ で割って、

$$(17) \tilde{\phi}^{(1)}(s - \omega^{(1)} + \omega^{(1)}) - \tilde{\phi}^{(1)}((s - \omega^{(1)}) e^{-2\pi i} + \omega^{(1)})$$

は、 $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} z^{\tau_2 - \tau_1} \phi^{(2)}(z)$ を Borel 変換したものの定数倍に等しいはずである。(12)-(16)より次のようになるはずである。

$$(18) \tilde{\phi}^{(1)}(s - \omega^{(1)} + \omega^{(1)}) - \tilde{\phi}^{(1)}((s - \omega^{(1)}) e^{-2\pi i} + \omega^{(1)}) = -C_{21} B(e^{\lambda_2 \lambda_1 z} z^{\tau_2 - \tau_1} \phi^{(2)}(z))(z).$$

Ecalle は、 $\tilde{\phi}^{(j)}$ が定理にいう性質をもつことから、prolongeable "partout sans coupures" であるといい、そのとき、 $\phi^{(j)}$ は fonction récurrente であると呼び、(16), (17)を

$$(19) \Delta_{\omega^{(1)}} \phi^{(1)} = -C_{21} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} z^{\tau_2 - \tau_1} \phi^{(2)}$$

と表す。ここの $\Delta_{\omega^{(1)}}$ を $\omega^{(1)}$ における alien derivative, この方

équation récurrente とよんでいる。今の場合 Δ_{rec} は, Boze (変換さらに Laplace 変換をとって得られる関数の境界値の差となっている。

第1節(24)を, $x = \frac{1}{z}$ に書き換えると

$$(20) \quad \frac{d}{dz} \phi_l(z) + (l-1)\left(1 + \frac{\lambda}{z}\right) \phi_l(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{x,n}(z) \sum_{k_1+\dots+k_n=l} \phi_{k_1}(z) \dots \phi_{k_n}(z)$$

という形の方程式になる ($\phi_l(z) = g_{x,l}\left(\frac{1}{z}\right)$, $a_{x,n}(z) = \tilde{h}_{x,n}\left(\frac{1}{z}\right)$).

この解 $\phi_l(z)$ も *fonction récurrente* になる。

定理. $S = \{-1, -2, \dots\}$ とおくとき, すべての $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して, ϕ_l は $\mathbb{C} - S$ の普遍被覆空間 $\widetilde{\mathbb{C} - S}$ 上の解析関数である。ここで, $\phi_l = B(\phi_l - \text{定数})$, $\phi_l(z) = \phi_l(z+l)$.

これを見るにも, 前と同様にパラメータ ε の入った方程式

$$(21) \quad \frac{d}{dz} \phi_l(z, \varepsilon) + (l-1)\left(1 + \frac{\lambda \varepsilon}{z}\right) \phi_l(z, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} a_{x,n}(z) \sum_{k_1+\dots+k_n=l} \phi_{k_1}(z, \varepsilon) \dots \phi_{k_n}(z, \varepsilon)$$

の解 $\phi_l(z, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{+\infty} \phi_{l,m}(z) \varepsilon^m$ を考え, 帰納的に $\phi_{l,m}$, $\phi_{l,m}$ を解析し, 特異性が S 上にしかないことを示し, $\sum_{m=1}^{+\infty} \phi_{l,m} \varepsilon^m$ が $\widetilde{\mathbb{C} - S}$ の上で広義一様収束することを云うと, $\varepsilon = 1$ として定理がいえる。

これらについても, *alien derivative* の入った *équation récurrente* があるが, それと第1節で述べた(22)との関係を明らかに出来なかったので私の解説としてはここで終わりとする。(E.2) (CNP), [MR]等を参照されたい。

参考文献.

- [BV] Babbitt, D. G. and Varadarajan, V. S., Local moduli for meromorphic differential equations, *Bulle A.M.S.*, 12, (1985), 95-98
- [BJL] Balser, W. - Jurkat, W. - Lutz, D.A., A general theory of invariant for meromorphic differential equations, Part II, *Func. Ekv.* 22 (1979), 257-283.
- [CNP] Candelpergher, B. - Nosmas, C. - Phan, F., Résurgence et développements semi-classiques
- [E1] Ecalle, J., Les fonction résurgentes Tome 1.2 3, *Pub. Math. Orsay*
1981-05, 1981-06, 1985-
- [E2] _____, Cinq applications des fonctions résurgentes, preprint 84T62 Orsay
- [HKM] Hukuhara, M. - Kimura, T. - Matuda, T., Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, *Pub. Math. Soc. Jap.* (1961)
- [M1] Malgrange, B., Remarques sur les équations différentielles à point singulier irréguliers, in *Lect. Note in Math.* 712 Springer Verlag 1979
- [M2] _____, Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, *Sem. Bourbaki*, n° 582, nov 1981.
- [M3] _____, Introduction aux travaux de J. Ecalle, *l'enseign. Math.* (1985)
- [MR] Martinet, J. - Ramis, J.-P., Problèmes de modules pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre, *Pub. Math. I.H.E.S.* 55 (1982) 63-164.
- [P] Pham, F., Resurgence, Quantized Canonical Transformations and Multi-Instanton Expansions, *Algebraic Analysis, Vol. I.*, Academic Press 1988, 699-726.
- [RS] Ramis, J.-P. - Sibuya, Y., Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type, *Math. Rep.* 84-135, Univ. Minnesota
- [S] Sibuya, Y., Stokes phenomena, *Bull. A.M.S.* 83 (1977), 1075-1077.