数理解析研究所講究録
694巻 1989年 134-145

Krichever理論の高次元化について

京大数研　中屋敷　厚（Atsushi Nakayashiki）

§0　序

Kricheverの理論は、Jacobi多様体のテータ関数が、KPヒエラルヒーの解を与えることを示している[3]。解の具体的な構成は、Baker-Akhiezer（BA）関数を作ることにより成される。BA関数は、佐藤理論の枠組では、解を表すUGMの点に対応する$\mathcal{D}$-加群の生成元である。佐藤理論は、この$\mathcal{D}$-加群の変形方程式としてKP-ヒエラルヒーをとらえる。これを踏まえ、BA関数を単独で考えるより、それの生成する$\mathcal{D}$-加群を考えることの方が自然であると思われる。このような考えは別に新しいものではなく、Manin[7]で、Krichever-Drinfeld bi-moduleと呼んでいるものがこの$\mathcal{D}$-加群に一致する。しかし、それは$\mathcal{D}$-加群として定式化されているわけではなく、$\mathcal{D}$-加群として定式化した方が、意味がはっきりして分かりやすい。　又、BA関数はJacobi多様体の座標を、パラメータとして含んでいるが、それがglobalな意味を持つような幾何学的設定が欲しいと思っていた。これは、BA関数の生成する$\mathcal{D}$-加群を、Jacobi多様体の上に、$\mathcal{D}$-加群の層

として構成できることが分かり解決した(BA-関数の生成する$\mathcal{D}$-加群は、この層のstalkになる)。

以上を踏まえて、Krichever理論を高次元化しようと言うのが我々の目標である。射影偏極多様体(X, D)で、Dがsubvarietyであるものに対して、X上の層$\mathcal{O}_X(*D)$をFourier変換することにより、$\mathrm{Pic}^0(X)$上の層が出来るが、これには、$\mathcal{D}$-加群の構造が入る(uniqueではない)。この$\mathcal{D}$-加群の層を、(X, D)のBaker-Akhiezer加群と呼ぶ(実際は$\mathcal{D}$-加群の構造も指定しなければいけない)。Xが代数曲線の場合、適当な$\mathcal{D}$-加群の構造を選ぶことにより、BA-加群は、前半で述べた、Jacobi多様体上の$\mathcal{D}$-加群の層に一致する。従って、Xが高次元の場合のBA-加群の理論が、Krichever理論の高次元化と言える。

BA加群についてまずやるべきことは、$\mathcal{D}$-加群としての構造の決定である。Xが代数曲線の場合、Jacobi多様体の一般点では、BA加群は、階数1の($\mathcal{D}$上の)自由加群である。この事実により、代数曲線の場合はBA関数を考えるだけですべての事が足りるのである。高次元の場合については、(X, D)が主偏極アーベル多様体の場合について構造定理が確立された。又、この構造定理を使って、Xがアーベル多様体の超曲面および、codimensionの高いある種の部分多様体

の場合の構造定理を証明することができる。アーベル多様体の場合の構造定理は、BA 加群は、$\mathrm{Pic}^0(X)$ の一般点では、(次元が2以上では階数2以上の)自由加群になることを主張している。(上記他の場合も同様である。)これは、まさに1次元の場合の自然な拡張になっている。2次元アーベル多様体の場合はさらに、KP 方程式の拡張に当たる方程式を導くことが出来、ある特殊解のまわりでの解空間の構造も多少分かった。

ここでは、BA 加群の定義、アーベル多様体の場合の構造定理、2次元の方程式についての結果を述べる。詳しくは[4]および、その改訂版である[5]を見て下さい。

§1 Baker-Akhiezer 加群

(X, D): 非特異射影偏極多様体 s.t. D は ample subvariety

$\mathcal{O}_X(nD)$: D にのみ高々 n 位の極をもつ X 上の有理型関数の層

$\mathcal{O}_X(*D) = \varinjlim_n \mathcal{O}_X(nD)$　　$g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$: X の不正則数

$\{\omega_i\}_{0\le i\le g-1}$, $\{a_i, b_j\}_{0\le i,j\le g-1}$: $H^0(X, \Omega^1)$ および $H_1(X, \mathbb{Z})$ (modulo torsion) の基底で次をみたすもの: $\int_{a_i}\omega_j = \delta_{ij}$。$\Omega_{ij} = \int_{b_i}\omega_j$ とおく。

$\{\eta_i\}_{0\le i\le g-1}$: 高々 D にのみ極を持つ第2種微分の基底(modulo $H^0(X, \Omega^1)$ で)で次をみたすもの: $\int_{a_i}\eta_j = 0$, $\int_{b_i}\eta_j = -2\,\mathrm{Im}\,\Omega_{ji}$。

$\mathrm{Pic}^0(X) = \overline{H^0(X, \Omega^1)}/H^1(X, \mathbb{Z})$ (ここで上付一は複素共役を表す)。

ここで，$H^1(X,\mathbb{Z})$ の $\overline{H^0(X,\Omega^1)}$ への埋め込みは次のようにする。
$H^1(X,\mathbb{Z})$の基底$\{e_1,\cdots,e_{2g}\}$に対して$\{\beta_1,\cdots\beta_{2g}\}$ $(\beta_i\in H^0(X,\Omega^1))$
で $2\pi\sqrt{-1}\,e_i[Z]=\int_Z(\beta_i-\overline{\beta_i})$ (任意のintegral cycle Z に対して)を
みたすものがunique に決まるが，この時

$$H^1(X,\mathbb{Z})\simeq\oplus\mathbb{Z}\overline{\beta_i}\hookrightarrow\overline{H^0(X,\Omega^1)}\quad(\text{以下 } \Gamma=\oplus\mathbb{Z}\overline{\beta_i} \text{ と書く。})$$

$\pi_X,\pi_{Pic^0(X)}$：$X\times Pic^0(X)$ から第1，第2成分への射影
$\mathcal{P}$：$X\times Pic^0(X)$ 上のPoincaré直線束(すなわち，各$\alpha\in Pic^0(X)$に対し，$\mathcal{P}|_{X\times\{\alpha\}}\simeq$($\alpha$の定めるX上の直線束)となるもの)。

Kodaira [2]により，$\mathcal{P}$は次の仕方で構成される。
$\hat{X}$とXのuniversal covering，Gを基本群とする。

$$\mathcal{P}\simeq\hat{X}\times\overline{H^0(X,\Omega^1)}\times\mathbb{C}\big/_{G\times\Gamma}$$

ただし，$G\times\Gamma$の$\hat{X}\times\overline{H^0(X,\Omega^1)}\times\mathbb{C}$への作用は次で定義する：

$$(g,\gamma):(\hat{z},\alpha,\zeta)\longmapsto(g\hat{z},\alpha+\gamma,f(g,\gamma,\hat{z},\alpha)\zeta)$$

$$f(g,\gamma,\hat{z},\alpha)=\exp(-2\,{}^tx\cdot\mathrm{Im}\,{}^t\Omega\cdot n+\int_{C(g)}\gamma+\int_{\hat{o}}^{\hat{z}}\pi_X^*\gamma)$$

$\alpha=\sum_{i=0}^{g-1}x_i\overline{\omega_i}$　　$C(g)$：gに対応した$P_X(\hat{o})$を基点とするXの閉曲線(ここで$P_X:\hat{X}\to X$ 射影)，$C(g)\sim\sum_{i=0}^{g-1}m_ia_i+\sum_{j=0}^{g-1}n_jb_j$ (homologous)，$\hat{o}$：$\hat{X}$の固定された点。

以上を準備して，$Pic^0(X)$ 上の$\mathcal{O}_{Pic^0(X)}$加群の層を，

$$\mathcal{F}(X,D)=\pi_{Pic^0(X)*}(\pi_X^*\mathcal{O}_X(*D)\otimes\mathcal{P})$$

で定義すると，次の命題が成り立つ。

（命題1.0）上の条件をみたす data（$\{f\}, \{\omega_i\}, \{a_i, b_j\}, \{\eta_j\}$）に対して $\mathcal{F}(X, D)$ は次のようにして定まる $\mathcal{D}$-加群の構造を持つ。$A_j(\hat{z}) = \int_a^{\hat{z}} \eta_j$, $\nabla_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j$ とおく。$P_{Pic^0(X)} : \overline{H^0(X, \Omega^1)} \longrightarrow Pic^0(X)$ を射影とする。$Pic^0(X)$ の開集合 U 上の $\mathcal{F}(X, D)$ の任意の section φ を、$\hat{X} \times P_{Pic^0(X)}^{-1}(U)$ 上の有理型関数として表わしたとき、$\frac{\partial}{\partial x_j}$ の作用を $\nabla_j \varphi$ で定義する。$[\nabla_i, \nabla_j] = 0$ $(0 \leq i, j \leq g)$ であり、これは $\mathcal{D}$-加群の構造を定める。

（注意）$R = \exp(\sum_{j=0}^{g-1} c_j(\hat{z}) x_j)$, $c_j(\hat{z})$: $\hat{X}$ 上の正則関数 として f を $R(g\hat{z}, \alpha + \gamma) f R(\hat{z}, \alpha)^{-1}$ に変えても, $\mathcal{L}$ と同型な直線束を定義するが、この時 $\nabla_j \longrightarrow R \nabla_j R^{-1}$ と変換し、$\mathcal{D}$-加群の構造は変わらない。（ここで, $R \nabla_j R^{-1}$ が $Pic^0(X)$ 上1価（ただし, R を $\hat{X} \times \overline{H^0(X, \Omega^1)}$ 上の正則(nowhere vanishing) として）とすると上の形に限ることは容易に分かる。)

この命題は、上の $\mathcal{L}$ の具体的構成を使って, $\mathcal{F}(X, D)$ の section が、$\hat{X} \times \overline{H^0(X, \Omega^1)}$ 上の関数としてみたすべき（$G \times \Gamma$ の作用に対する）変換性を調べることにより容易に証明される。

（定義）$\mathcal{F}(X, D)$ に $\mathcal{D}$-加群の構造を入れて考えたものを、Baker-Akhiezer(BA) 加群と呼ぶ。

§2　アーベル多様体のBA加群と構造定理

アーベル多様体のBA加群は、テータ関数を使って具体的に表すことが出来る。

（命題2.0）(X,Θ)は主偏極アーベル多様体, $\Theta=(\theta(z)=0)$, $\theta(z)$: Riemannのテータ関数　と表わされているとする。この時

i) 各 $c\in X\simeq \mathrm{Pic}^0(X)$ に対し

$$\mathfrak{F}(X,\Theta)_c \simeq V_c \exp\left(-\sum_{i=0}^{g-1} x_i \zeta_i(z)\right) \qquad \zeta_i=\frac{\partial}{\partial z_i}\log\theta(z)$$

$$V_c=\bigcup_{n\geq 0} V_c(n) \qquad V_c(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g/n\mathbb{Z}^g}\mathcal{O}\, f_{n,a}\left(z+\frac{c+x}{n}\right)\theta(z)^{-n}$$

ここで, $f_{n,a}(z)=\theta\begin{bmatrix}\frac{a}{n}\\0\end{bmatrix}(nz,n\Omega)$, $\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z,\Omega)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^g}\exp(\pi i\,{}^t(m+a)\Omega(m+a)+2\pi i\,{}^t(m+a)(z+b))$

$\mathcal{O}=\mathbb{C}\{\{x_0,\cdots,x_{g-1}\}\}$（$g$変数収束巾級数環）, $g=\dim X$ とする。

ii) $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(0\leq i\leq g-1)$ の作用は、右辺の元を $(x_0,\cdots x_{g-1})$ の関数とみて素直に微分することで定まる。ここで、$(x_0,\cdots,x_{g-1})$ は $\mathrm{Pic}^0(X)$ の universal covering の global な座標とする。

以下では、次のような記号を用いる。

$$\mathcal{D}=\mathcal{O}\left[\frac{\partial}{\partial x_0},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{g-1}}\right], \quad \mathcal{D}^{(n)}=\{P\in\mathcal{D}\mid \mathrm{ord}(P)\leq n\}$$

$$\mathfrak{F}(X,\Theta)_c(n)=V_c(n)\exp\left(-\sum_{i=0}^{g-1}x_i\zeta_i\right)\ (n\geq 0), \quad =0 \ \ (n<0)$$

$$\mathrm{gr}\,\mathfrak{F}(X,\Theta)_c=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{F}(X,\Theta)_c(n)/\mathfrak{F}(X,\Theta)_c(n-1)\text{。}$$

アーベル多様体の場合の構造定理は次のようになる。

（構造定理）(X,Θ)をg次元主偏極アーベル多様体で、Θが非特異のものとする。この時次のことが成り立つ。

i) $\mathcal{F}(X,\Theta)_c(n)=\mathcal{D}^{(1)}\mathcal{F}(X,\Theta)_c(n-1)$ $\begin{cases} n\geq g+2 & (c=0) \\ n\geq g+1 & (c\neq 0)\end{cases}$

ii) $c\neq 0$ならば、$gr\mathcal{F}(X,\Theta)_c$は、階数$g!$の自由$gr\mathcal{D}$－加群であり，特に$\mathcal{F}(X,\Theta)_c$は、階数$g!$の自由$\mathcal{D}$－加群である。

この定理は、次の命題に帰着させて証明する。

（命題2.1）(X,Θ)は上の定理と同じとする。このとき

i) $V_c(n)=D_X^{(1)}V_c(n-1)$ $\begin{cases} n\geq g+2 & (c=0) \\ n\geq g+1 & (c\neq 0)\end{cases}$

ii) $c\neq 0$ならば、grV_cは、階数$g!$の自由grD_X－加群である。

ここで，$D_X=\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_0},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_{g-1}}]=X$上微分作用素環のglobal sectionとする。

命題は、内容を微分形式のglobal sectionに対する命題に書き直し（アーベル多様体のcotangent bundleが自明であることを使う）、直線束のコホモロジーの消滅を使って証明する。

$c=0$でfreenessが破れているのは、証明上の観点から言えば、trivial bundleのみ、消滅の具合が悪いためである。

（注意）定理の中で、Θが非特異であることが条件となって

いるが、Andreotti, Mayer[1]によって、一般の主偏極アーベル多様体の Θ は非特異であることが証明されている。ただしJacobi多様体の Θ は一般に特異点を持ち，$\dim \mathrm{Sing}\,\Theta = g-3$ (hyper-elliptic), $= g-4$ (non-hyperelliptic) となることが証明されている。$g=2$ の時 Θ はいつも非特異，$g=3$ のときは，non-hyperelliptic Jacobi多様体の Θ は非特異である。

§3 非線型微分方程式

2次元の方程式について調べる。以下

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{O}}[[\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1}\partial_1]][\partial_0] \qquad \hat{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[[x_0, x_1]] \qquad \mathcal{D} = \hat{\mathcal{O}}[\partial_0, \partial_1]$$

又、添字集合 $I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{E}(I) = \{ \sum a_\alpha \partial^\alpha \in \hat{\mathcal{E}} \mid \alpha \notin I \text{ なら } a_\alpha = 0 \}$$

と書くことにする。

$$\mathcal{J} = \mathcal{D} W_0 \oplus \mathcal{D} W_1$$

$$W_0 = 1 + \sum_{j \geq 0,\, i+j \leq 0} w_{0/ij}\, \partial_0^i \partial_1^j$$

$$W_1 = \partial_0^{-1}\partial_1^2 + \sum_{\substack{i+j \leq 1,\, j \geq 0 \\ i+j=1 \text{ なら } j \geq 3}} w_{1/ij}\, \partial_0^i \partial_1^j$$

で

$$\mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{J}^{(n)} \oplus \mathcal{E}(J^{(n)}) \qquad \mathcal{J}^{(n)} = \mathcal{J} \cap \mathcal{E}$$

$$J^{(n)} = \{ \alpha = (\alpha_0, \alpha_1) \mid |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 \leq n,\ -2\alpha_0 + 1 \geq \alpha_1 \geq 0 \}$$

をみたすものを考える。

このW_0, W_1に対して方程式は

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial W_\ell}{\partial t_{ij}} + W_\ell \partial_0^i \partial_1^j = \sum_{k=0,1} B_{\ell,ij,k} W_k \quad j,\ell=0,1 \quad i \in \mathbb{Z}_{>0},\ i+j \geq 2 \\ {}^{\exists} B_{\ell,ij,k} \in \mathcal{D} \end{array}\right\} (1)$$

で与えられる。$\mathcal{J}$がfreeゆえ、$B_{\ell,ij,k}$はW_0, W_1 i, jにより uniqueに決まる。1次元の場合とは異なり、上の形の方程式が成り立つためには，$W_{\ell}/_{ij}$たちは時間微分を含まない多くの微分関係式をみたさねばならない。これは、方程式が有限の閉じた形になるための条件である。この条件をみたすW_ℓ $(\ell=0,1)$がどのくらいあるかを決定することは重要であるが、$\mathcal{J}$が多項生成の場合はむずかしくなるようで，2次元に限っても完全に分かっているとは言えない。単項生成の場合については大山氏の結果がある[6]。上の方程式について分かっていることは以下の2つである。

i)

i) 本論説中の、大山氏の扱っている$r=2$の場合の発展方程式の解を2つ用意しU_0, U_1とする。これを

$$U_i = 1 + \sum_{k \leq -1,\, j \geq 0} u_{i/kj}\, \partial_0^k \partial_1^j \qquad i=0,1$$

と展開した時、次の命題が成り立つ。

(命題3.0) $\{u_{i/kj}\}$が以下の条件をみたすならば、$\mathcal{J} = \mathcal{D} U_0 + \mathcal{D} U_1 \partial_0^{-1} \partial_1^2$ は直和であり、(1)の解になる。

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
1 & u_{0/1,1} & u_{0/2,2} & \cdots & u_{0/n,n} & \cdots & & u_{0/2n,2n} \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
 & \bigcirc & & & 1 & u_{0/1,1} & u_{0/2,2} \cdots & u_{0/n,n} \\
\hline
 & & 1 & u_{1/1,1} \cdots & u_{1/n-1,n-1} & \cdots & & u_{1/2(n-1),2(n-1)} \\
 & & & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
 & \bigcirc & & & 1 & u_{1/1,1} & \cdots & u_{1/n-1,n-1}
\end{array}\right|_{x=0} \neq 0 \qquad n=1,2,\cdots。$$

発展方程式が(i)をみたすことは，U_0，U_1がもともとみたす、発展方程式の形からほぼ自明である。ただこの場合、U_0，U_1はそれぞれで閉じた方程式をみたすことになる。

ii) $\varphi_\ell = W_\ell \exp\left(\frac{x_0}{w_0} + x_1\frac{w_1}{w_0} + \sum_{n\geq 2} t_{n0}\frac{1}{w_0^n} + \sum_{n\geq 1} t_{n1}\frac{w_1}{w_0^n}\right) \qquad \ell=0,1$

とおく。ここで w_0, w_1 はパラメータ。この時(i)により

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_{ij}} - \mathbb{B}_{ij}\right)\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix}=0$$

$$\mathbb{B}_{ij} = (B_{\ell,ij,k})_{\ell,k=0,1} \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathcal{D})$$

が成り立つ。$B_{\ell,ij,k}$ の係数を，W_0, W_1 の係数を使って表わしておけば、積分可能条件

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_{ij}} - \mathbb{B}_{ij}, \frac{\partial}{\partial t_{k\ell}} - \mathbb{B}_{k\ell}\right]=0$$

は、有限個の$\{t_{ij}\}$を考えるとき、有限個の$\{w_{i/jk}\}$を未知関数とする、有限個の方程式系を与える。1次元のときは、t_2, t_3を考えることにより、KP方程式が出る。さて、この時次の命題が成り立つ。

(命題3.1) 方程式系

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_{20}} - \mathbb{B}_{20}, \frac{\partial}{\partial t_{11}} - \mathbb{B}_{11}\right] = 0$$

の解は、i)の形の解に属するある特殊解のまわりで、2変数の任意関数を含み、しかも高々2変数の任意関数しか含まない。

(注意) 1. 命題3.1の方程式系は、ヒエラルヒー(1)で、W_l $(l=0,1)$が、t_{20}, t_{11}にしか依らない、とした方程式より弱い方程式である。何故なら、(1)でW_l $(l=0,1)$がt_{20}, t_{11}にしか依らないとした方程式では、付加条件は、時間を全部入れたものと同じになるからである。

2. i)で取り上げた解は、もともとの(大山氏が論じている)方程式系の一般解が2変数の任意関数を含むことから、2変数の任意関数を含むことが分かる。命題3.1は、ある特殊解のまわりとは言え、i)の形の解を、(1)の解として変形してもあまり変形しないことを示している。

命題3.1は、特殊解のまわりで方程式を線型化することにより証明する。

reference

[1] A. Andreotti and A. Mayer : On period relations for Abelian integrals on algebraic curves. Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 21, 189-238 (1967)

[2] K. Kodaira : Characteristic linear systems of complete continuous systems. Amer. J. Math. 78, 716-744 (1956)

[3] I. M. Krichever : Method of algebraic geometry of non-linear equations. Russian Math. Surveys. 32, no. 6, 185-214 (1977)

[4] A. Nakayashiki : RIMS-preprint 650

[5] A. Nakayashiki : in preparation

[6] Y. Ohyama : in this volume

[7] Yu. I. Manin : Algebraic aspect of non-linear differential equations, Modern problems of mathematics, 11 (1978).