数理解析研究所講究録
695巻 1989年 215-224

耐故障ネットワークと辺付加問題

広島大学 工学部 渡辺敏正 (Toshimasa Watanabe)
東 靖彦 (Yasuhiko Higashi)
中村 昭 (Akira Nakamura)

1.はじめに

耐故障ネットワーク構成問題をグラフの辺付加問題(augmentation problem)として議論する。通信ネットワークにおける故障発生が社会に与える影響の大きさは銀行のオンラインシステム等の事故による経済活動の混乱からも周知の事であり、ネットワークの故障対策の重要性が認識されている。通信ネットワークの故障発生箇所、故障のネットワーク機能への影響、耐故障性等を以下の(1)から(3)に示すように単純化することにより、ネットワークの大域的且つ静的耐故障性を、回線の接続構造に着目して、グラフの辺付加問題として定式化する。

(1)局を点に、局間を接続する通信回線を(有向または無向)辺に対応させて、通信ネットワークをグラフG=(V,E)で表現する。ここでV、Eはそれぞれ点集合、辺集合であり、V(G),E(G)と表すこともある。通信回線の通信方向が決められている場合にはその方向を示す有向辺を対応させ、両方向通信可能な場合は、(表現簡単化のため通常は)無向辺に対応させる。

(2)故障は局または通信回線に発生し、局故障の発生は局及びそれを端局とする通信回線を使用不能にする。また回線故障はその回線を使用不能にする。グラフモデル上では対応する点あるいは辺をグラフから除去することである。但し、点の除去とは点とそれを端点とする辺のすべてを除くことである。

(3)ネットワークの耐故障性とは、何箇所かの局または回線故障の発生後も、(例えば主要局等の)指定されたいくつかの局間の通信が可能であることである。

耐故障性を持つネットワークの構成法としては既設ネットワークに対して局間に何本かの回線を新しく設置する方法と何箇所かの新設局を加えて必要な回線を付加していく方法が考えられる。(耐故障性の定義より、既設ネットワークからの回線や局の撤去は考えないことにする。)回線の付加と局の新設にはそれぞれの設置場所等により必要経費が定ま

る。出来る限り少ない総費用で耐故障性を有するネットワークを構成することを考える。グラフモデルで考えれば、耐故障性を持つことは何個かの点や何本かの辺を除去した後でも指定された点部分集合内の任意の2点間に(有向または無向)道が存在することに対応する。またそのようなグラフの構成方法としては、辺の付加による方法と点及び辺の両方の付加による方法があり、いずれかの方法により,割り当てられているコスト総和ができる限り小さくなるような、付加すべき辺や点の集合を定めることと定式化できる。

本稿では、故障は局故障、回線故障のいずれか一種類であると仮定し、通信回線のみの付加による耐故障ネットワークの構成法を扱う。この問題は、以下に示すグラフの辺付加問題として定式化できる。(局及び通信回線両方の付加による構成法の一部は辺付加問題として扱うこともできる。)一般に、一つの性質πに関する辺付加問題は、与えられた初期グラフに付加すると指定した要素集合がπを満たすグラフが得られるような辺集合の中で、辺コスト総和が最小になるものを求める問題であり、πの与え方、初期グラフの形状、辺の向きを考えるか否か、πをみたすべき点あるいは辺の集合の与え方、等により種々の工学上の問題に応用できる。上述のネットワーク構成問題は、πとしてはグラフの局所点連結性または局所辺連結性を考え、初期グラフに付加すると指定した点部分集合内の任意の点対がπを満たすような辺集合の中でコスト総和最小のものを決定する問題となる。2．1．で基礎的定義を述べたのち、2．2．では、辺付加問題の定義を与え、3．において、πがグラフの（点または辺）連結性に関する性質である場合について現在までに知られている結果等を紹介する。

2.基礎的定義と辺付加問題

2．1．基礎的定義

議論に必要な諸定義を述べる。以下で定義されない用語等は[1,2,4,9,11]を参照されたい。**グラフ**(graph)**G=(V,E)**は、有限な空でない点集合Vと辺集合Eとからなる。辺はVの2点(その辺の端点と呼ばれ、一般的には、同一であってもよい)を結ぶものとする。両端点が等しいときその辺を自己閉路と呼ぶ。すべての辺に向きがあるとき、Gを**有向グラフ**と呼び、そうでないとき**無向グラフ**と呼ぶ。有向辺と無向辺が混在するグラフを**混在グラフ**と呼ぶ。2点u,vを両端点とする**無向辺**を**(u,v)**と、また、u(始点）からv（終点）への**有向辺**を**<u,v>**と表す。以下簡単のため、無向辺(それぞれ、有向辺)を単に辺(枝)と呼ぶことにする。グラフGにおいて、

点vの**点次数$d_G(v)$**を点vに接続している自己閉路以外の辺の総数または枝の総数とする。有向グラフGにおいて、点vを始点(それぞれ、終点)とする有向枝の本数を**入次数$Id_G(v)$**(**出次数$Od_G(v)$**)と呼ぶ。

u,vをグラフGの(必ずしも異なるとは限らない)2点とする。Gにおいてuとvを両端点とする**道**とは、点と辺または枝の交替列$u=v_0, e_1, v_1, \cdots v_{n-1}, e_n, v_n=v$で端点u,v以外の点が相異なるものである。ここで$e_i, 1 \leqq i \leqq n$,は、$v_{i-1}$と$v_i$を結ぶ辺または枝である。$e_i=(v_{i-1}, v_i)$または$e_i=\langle v_{i-1}, v_i\rangle), 1 \leqq i \leqq n$,のとき、それぞれ**無向道または有向道**と呼ぶ。また、$e_i=\langle v_i, v_{i-1}\rangle$あるいは$e_i=\langle v_{i-1}, v_i\rangle, 1 \leqq i \leqq n$,のとき、**弱連結道**と呼ぶ。特に、これらをそれぞれ**(u,v)-道**、**⟨u,v⟩-有向道**、**⟨u,v⟩-弱連結道**と呼び、(u,v)-道を$P_G(u,v)$、残りをいずれも$P_G\langle u,v\rangle$)と表す。道(それぞれ、有向道、弱連結道)の始点と終点とが同一の点であるとき、この道を**閉路**(**有向閉路**、**弱連結閉路**)という。無向グラフGのどの2点u,vに対しても、(u,v)-道が存在するとき、Gは**連結**であるという。有向グラフGにおいて枝の向きを無視すれば連結であるとき**弱連結**グラフという。また、⟨u,v⟩-有向道が存在するとき、vはuから**到達可能**であるといい、すべての点がある点rから到達可能であるとき、rを**根**という。Gの相異なるどの2点も、一方が他方から到達可能であるとき、Gは**強連結**であるという。**木**とは、無閉路的連結無向グラフのことをいう。弱連結な有向グラフG=(V(G),E(G))が$Id_G(v)=0$なる根rを持ち、且つ$Id_G(v)=1$(但し、vはr以外の任意の点)のとき、Gを**根付き有向木**と呼び、更に、$(\forall u \in V(T))Od_T(u) \leqq 2$のとき**根付き2進木**と呼ぶ。向きを無視したグラフが木である弱連結グラフを**有向木**という。弱連結閉路においてどの有向辺もその方向に従って一周できるとき、この閉路は**横断可能**(traversable)であるという。

グラフGから点集合P⊆VとP内の点に接続する辺すべてを取り去ることを点集合Pの**除去**といい、**G-P**と表す。Gから辺集合Q⊆Eを取り去ることを辺集合Qの**開放除去**といい、**G-Q**と表す。E'をV(G)内の2点を結ぶ辺の集合でE'∩E(G)=φとするとき、E'のG'への付加を**G+E'**=(V(G),E(G)∪E')と表す。G-P(それぞれ、G-Q)が非連結となる|P|(|Q|)の最小値をGの点連結度(辺連結度)と呼び、vc(G)(ec(G))と表す。**k-点連結(それぞれ、k-辺連結)グラフ**とは、vc(G)≧k(ec(G)≧k)なるグラフであり、これは言い換えると、任意の二点間に端点以外には点を共有しない道(辺を共有しない道)が少なくともk本あるグラフである。Gにおいて端点以外には点を共有しない(u,v)-道の最大数を$L_G(u,v)$、辺を共有しない(u,v)-道の最大数を$M_G(u,v)$と表す。なお、⟨u,v⟩-有向道に関しても同様

に$L_G\langle u,v\rangle$, $M_G\langle u,v\rangle$を定義する。

2. 2. 辺付加問題

πをグラフに関する一つの性質で(グラフに辺を付加してゆけば最終的にはπを満たすグラフが得られるという意味において)単調性を有するものとする。(πに関する)**辺付加問題**を以下で定義する:

『初期グラフ$G_0=(V_0, E_0)$とコスト関数$c: V_0\times V_0\rightarrow Z^+$(非負整数)が与えられているとき、グラフ$G=G_0+A=(V_0, E_0\cup A)$が$\pi$を満たし、且つコスト総和$c(A)$が最小となる辺集合Aを求めよ。』

ここで、$V_0\times V_0=\{\{u,v\}\in V_0, u\neq v\}$であり、$\{u,v\}$は順序対または非順序対である。$\{u,v\}\in V_0\times V_0$に対するコストを$c\{u,v\}$と表すとき、$c(A)$は各(有向または無向)辺$e\in A$の端点(順序または非順序)対$\{u,v\}$のコスト総和である。諸条件の与え方は$\pi$に依存して種々考えられるが、例えば、グラフの連結性に関する辺付加問題に対しては、以下の条件(1)から(5)等の与え方がある。

(1)コスト条件

(a)同一コスト(UW)

(b)異なるコストがあってもよい(W)

(2)辺条件

(a)無向辺のみ(UD)

(b)有向辺のみ(D)

(c)無向辺と有向辺の混在を許す(MIX)

(3)対象範囲(性質πを満たすべき点または辺の集合)

(a)点部分集合 $S\subseteq V(G)$(SUB)

(b)グラフ全体 $S=V(G)$(ALL)

(辺部分集合を指定することも考えられる。)

(4)性質π(対象範囲Sに関して)

(a)無向グラフの局所点連結度(それぞれ、局所辺連結度):

$\forall u,v\in S$に対して、$L_G(u,v)=k_{(u,v)}$ ($M_G(u,v)=k_{(u,v)}$)

但し、$k_{(u,v)}$は非負整数

(b)有向グラフの局所点連結度(それぞれ、局所辺連結度):

$\forall u,v\in S$に対して、$L_G\langle u,v\rangle=k_{\langle u,v\rangle}$ ($M_G\langle u,v\rangle=k_{\langle u,v\rangle}$)

但し、$k_{\langle u,v\rangle}$は非負整数

なお、Gが無向グラフで$S=V(G)$のとき、

$$vc(G)=\min_{u,v\in S} L_G(u,v) \quad (ec(G)=\min_{u,v\in S} M_G(u,v))$$

である。また、Gが有向グラフで、S=V(G)且つ$M_G\langle u,v\rangle \geq 1$(∀u,v∈S)であることはGが強連結であることを意味する。

(5)初期グラフG_0

(a)空グラフ($E_0=\phi$)(EMP)

(b)木(T)、有向木(DT)、根つき有向木(RDT)、根つき2進木(RDBT)等

(c)(k-1)-点連結グラフ((k-1)VC)、(k-1)-辺連結グラフ((k-1)EC)

(d)任意のグラフ(GEN)

3. 連結性に関する辺付加問題

πがグラフの連結性に関する性質である場合の辺付加問題に関して得られている結果を以下にまとめておく。なお、出来る限りの結果は集めたつもりであるが、不注意のため掲載されていない文献がある場合には、ご容赦いただくと共に、著者にご一報いただければ幸いである。以下、それぞれの条件は()内に示した略記号で示す。なお、異なるコストがあってもよい場合は大部分がNP-完全(NPCと略記)となり、近似アルゴリズム(APPと略記)が研究されている。コストが一定の場合に多項式時間アルゴリズムを持つものが多い。|V|,|E| 等は簡単のため単にV,Eと書く。

I. 無向グラフ

(1)S=V(G)

(a)π: k-点連結(∀u,v∈S, $L_G(u,v)\geq k$)

k=2,	G_0=EMP	W	NPC [3]
k=2,	G_0=GEN	UW	O(V+E) [3,20]
k=2,	G_0=T	W	NPC [6]
			O(V^2)APP(最適解の2倍以下) [6]
k=3,	G_0=GEN	UW	O($V(V+E)^2$) [26,27,32,39]
			(注:[45]に一般のkについて若干の考察あり)
k≧3,	G_0=EMP	W	NPC [26,27]

(b)π: k-辺連結(∀u,v∈S, $M_G(u,v)\geq k$)

k=2,	G_0=EMP	W	NPC [3]
		UW	O(V+E) [3]
k=2,	G_0=T	W	NPC [6]
			O(V^2)APP(最適解の2倍以下) [6]

k=3, G∅=GEN UN O(V^2(V+E)) [21,28]

k=3, G∅=1-EC W NPC [18,35,37,40]

k=3, G∅=2-EC W NPC [43]

O(V^2(V+E))APP（最適解の2倍＋α以下）[18,35,37,40]

O(V^3)APP（ある生成木の総コスト以下）[43]

k≧2, G∅=T UW 多項式 [25]

k≧2, G∅=(k-1)EC UW 多項式 [15]

k≧2, G∅=GEN W NPC [30,31,32]

k≧2, G∅=GEN UW O(kLV^3(kV+E))[33,34,36], L=min{k,V}

（注：[45]に一般のkについて若干の考察あり）

(c)π：局所辺連結度

G∅=EMP UW 多項式 [5]

(d)π：平面，2－点連結

G∅=any planar graph UW O(V+E) [19]

(2)S⊆V(G)（注：S=V(G)のときNPCならばS⊆V(G)のときでもそうである）

(a)π：k－点連結

k=2, G∅=GEN UW O(V+E) [7,8]

k=2, G∅=1-VC W O(V^2)APP（最適解の4倍以下）[12,42]

k=3, G∅=GEN UW O(V$(V+E)^2$) [29]（注：[29]ではO(V^3)）

(b)π：k－辺連結

k=2, G∅=GEN UW O(V+E) [21,28,29]

k=2, G∅=1-EC W O(V^3)APP（最適解の2倍以下）[12,38,42]

（注：[38]ではO(V^3logV)）

k=3, G∅=GEN UW O(V^2(V+E)) [21,28,29]

II. 有向グラフ

(1)S=V(G)

(a)π：k－点連結(∀u,v∈S, L_G<u,v>≧k)

k≧2, G∅=RDBT UW O(kV) [16]

k≧2, G∅=RDT UW O(kV) [17]

(b)π：k－辺連結(∀u,v∈S, M_G<u,v>≧k)

k=1, G∅=EMP W NPC [3]（注：強連結化）

k=1, G∅=GEN UW O(V+E) [3]

k≧2, G∅=DT UW 多項式 [13,14]

(2) $S \subseteq V(G)$

π： k－辺連結（$\forall u, v \in S, M_G < u, v > \geq k$）

k=1，　$G_\emptyset$=DT　UW　NPC（[42]の発表時，[44]）

k=1，　$G_\emptyset$=GEN　W　$O(V^3)$APP[22,42]

（注：[23,44]に5種類のAPPの実験評価あり）

Ⅲ．混在グラフ

$S=V(G)$

π：$G_\emptyset+A$において、各$e \in E(G_\emptyset)$に対し、これを含む横断可能な弱連結閉路がある

$G_\emptyset$=GEN　UW　$O(V+E)$　[10]

4．おわりに

通信ネットワークの故障発生箇所、故障のネットワーク機能への影響及び耐故障性等を単純化することにより、局または通信回線どちらか一方のみの故障に対する大域的且つ静的耐故障性を持つネットワークの構成問題をグラフの辺付加問題に帰着させ、辺付加問題に関する既知結果を述べた。理論的な意味で最も興味ある問題はπ：k－点連結、$S=V(G)$、$k \geq 2$、$G_\emptyset$=GEN、UW、なる辺付加問題であろう。多項式時間アルゴリズムの存在が予想できる。また、実用的観点からは$k \leq 3$、$S \subseteq V(G)$、W、なる辺付加問題に対する精度のよい近似アルゴリズムの開発、各点において付加できる辺集合が制限されているような辺付加問題の取扱い、局と回線両方の故障発生に対する耐故障性ネットワークの構成法の検討等が必要であろう。

文　献

[1] A.V.Aho, J.E.Hopcroft and J.D.Ullman, "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley, Reading, MA, (1974).

[2] B.Bollobas, "Extremal Graph Theory", Academic Press, London, (1978).

[3] K.P.Eswaran and R.E.Tarjan, Augmentation problems, SIAM J. Comput., **5**(1976), 653-655.

[4] S.Even, "Graph Algorithms", Pitman, London, (1979).

[5] H.Frank and W.Chou, Connectivity considerations in the design of survivable networks, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-17(1970), 486-490.

[6] G.N.Frederickson and J.Ja'ja', Approximation algorithms for several graph augmentation problems, SIAM J.Comput., **10**(1981),

270-283.
[7]藤田高宏，グラフの２重連結化問題，広島大学工学部昭和５８年度卒業論文（第２類システム基礎論）(1984-03).
[8]藤田，渡辺，翁長，グラフの２重連結化問題，電気四学会中国支部連合大会予稿集，52221(1983-10).
[9] M.R.Garey and D.S.Johnson , "Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness", Freeman, San Francisco, (1978).
[10] D.Gusfield, Optimal mixed graph augmentation, SIAM J. Comput., 16(1987), 599-612.
[11] F.Harary, "Graph Theory", Addison-Wesley, Reading, MA, (1969).
[12]東 靖彦，連結グラフ上の指定点部分集合に対する２辺連結化問題，広島大学工学部昭和６２年度卒業論文（第２類情報回路網工学）(1988-03).
[13] Y.Kajitani and S.Ueno, The minimum augmentationof directed a tree to a k-edge-connected directed graph, IECE Japan, Technical Research Reports CAS83-3(1983-05), 17-23.
[14] Y.Kajitani and S.Ueno, The minimum augmentationof a directed tree to a k-edge-connected directed graph, Networks, 16(1986), 181-197.
[15] 梶谷，上野，中田，最小数枝付加によるｋ－枝連結グラフの(ｋ＋１)－枝連結グラフへの拡大構成，京都大学数理解析研究所講究録，534(グラフ理論とその応用)，(1984-08)，206-220.
[16] 増澤，萩原，和田，都倉，ｋ－頂点連結性に関する有向２進木の拡大構成問題，信学論(D),J67-D, (1984-01), 77-84.
[17] T.Masuzawa, K.Hagihara and N.Tokura, An optimaltime algorithm for the k-vertex-connectivityunweighted augmentation problem for the rooteddirected trees, Discrete Applied Math., 7(1987), 67-105.
[18] Takanori Narita, On Constructing Robust Networks by Link Addition, Master Thesis, Information Engineering Major of the Graduate School of Engineering, Hiroshima University(1988-03).
[19] 小野口，千葉，西関，平面グラフの２連結化アルゴリズム，京都大学数理解析研究所講究録，534(グラフ理論とその応用)，(1984-08)，22

1-233.
[20] A.Rosenthal and A.Goldner, Smallest augmentations to biconnect a Graph, SIAM J. Comput., **6**(1977), 55-66.
[21] 高橋，ネットワークモデルに関する基礎的研究，広島大学大学院工学研究科 修士論文（1985-03).
[22]竹原，東，渡辺，翁長，通信回線の付加による指定端局集合に対する強連結化問題，昭和63年度電気四学会中国支部38回連合大会 122221, pp.243,(1988-10).
[23]竹原俊明，通信路付加問題近似アルゴリズムの実験評価，広島大学工学部昭和６３年度卒業論文（第２類情報回路網工学）(1989-03).
[24] S.Ueno, Y.Kajitani, and H.Wada,The minimum augmentation of trees to k-edge-connected graphs, IECE Japan, Technical Research Reports, IN83-6(1983-05), 1-6.
[25]S.Ueno, Y.Kajitani, and H.Wada,Minimum augmentation of a tree to a k-edge-connected graph, Networks,18(1988), 19-25.
[26]渡辺，中村，辺の付加による点一連結度の増加問題，信学技報，AL81-26(1981-07), 1-8.
[27] T.Watanabe and A.Nakamura,On a smallest augmentation to triconnect a graph, Technical Report C-18, Department of Applied Math., Faculty of Engineering, Hiroshima Univ., Higashi-Hiroshima, Japan (1983; revised 1988).
[28]渡辺，中村，高橋，辺付加によるグラフの拡大構成問題，京都大学数理解析研究所講究録，522(計算機科学の基礎理論)(1984-05),16-25.
[29] 渡辺，中村，高橋，グラフの点部分集合に対する拡大構成問題，信学技報，AL83-89(1984-03), 107-114.
[30] 渡辺，中村，辺の付加によるｋ一辺連結グラフの構成問題，信学技報，AL83-90(1984-03), 115-122.
[31] T.Watanabe and A.Nakamura, On a smallest augmen-tation to k-edge-connect a graph, Technical Report C-20, Department of Applied Math., Faculty of Engineering, Hiroshima Univ., Higashi-Hiroshima, Japan (1984).
[32] 渡辺，中村，辺の付加によるグラフの拡大構成問題，京都大学数理解析研究所講究録，534(グラフ理論とその応用)，(1984-08), 197-205.
[33] T.Watanabe and A.Nakamura, Edge-connectivity augmentation problems, J.Comput. and System Sci., **35**(1987-08), 96-144.

[34] T.Watanabe, An efficient way for edge-connectivity augmentation, Technical Report ACT-76-UILU-ENG-87-2221,(1987-04), Coordinated Science Lab., University of Illinois at Urbana, Urbana, IL 61801 U.S.A.
[35] 渡辺，中村，成田，通信回線の付加による耐故障ネットワークの構成，昭和62年度電気四学会中国支部38回連合大会，030119 (1987-10).
[36] T.Watanabe, A simple improvement on edge-connectivity augmentation, IECE Japan, Technical ResearchReports CAS87-203(1987-12), 43-48.
[37] 渡辺，中村，成田，通信回線の付加による耐故障ネットワークの構成，信学技報, CAS87-199(1987-12), 19-24.
[38]渡辺, 翁長, 東, 成田, 連結グラフの点部分集合2一辺連結化問題, 昭和63年電子情報通信学会春季全国大会予稿集, A-145(1988-03).
[39]T.Watanabe and A.Nakamura, 3-connectivity augmentation problems, Proceedings of 1988 IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems(1988-06), 1847-1850.
[40]渡辺, 中村, 成田, グラフの3一辺連結化について, 京都大学数理解析研究所講究録 666（計算アルゴリズムと計算量の基礎理論）, 195-204(1988-7).
[41]渡辺敏正, ネットワークの耐故障性一辺付加問題とその耐故障ネットワーク構成への応用一, 昭和63年電気・情報関連学会連合大会講演論文集, 第4分冊, 139-142(1988-10).
[42]渡辺, 東, 中村, 点部分集合に対する辺付加問題, 信学技報, COMP88-63(1988-11), 123-131.
[43]T.Watanabe, T.Narita and A.Nakamura, 3-Edge-Connectivity Augmentation Problems, 1989 IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems (1989-05), to appear.
[44]渡辺, 東, 中村, 指定点集合に対する辺付加問題, 第2回回路とシステム軽井沢ワークショップ(1989-05), 発表予定.
[45] 山口 忠, グラフ強化のために追加すべき線の必要最小数について, 昭和51年電気四学会北海道支部連合大会, 82(1976), pp.99.