数理解析研究所講究録
695巻 1989年 11-20

高々スター次数2の拡張正規表現

Extended Regular Expressions of Star Degree At Most Two

劉 信根　　橋口 攻三郎
Heekeun YOO and Kosaburo HASHIGUCHI
豊橋技術科学大学
Toyohashi University of Technology

1．まえがき

正規表現は理論的な分野ばかりでなく，応用的な分野においても重要である．特に，Kleene-閉包は重要な役割を果たす．文脈自由型言語を表現する非終端記号や複雑な演算子を持たない表現が存在すれば，便利であろう．

本研究では，次数2のスター演算の概念を提案し，和集合，連接，Kleene-閉包，次数2のスター演算に関する有限言語族の閉包，すなわち，アルファベットΣ上の高々スター次数2の拡張正規言語のクラス（ERL(2,Σ)）のいくつかの性質を明らかにする．さらに，Σ上の completely linearly nested context-free language のクラス（CLNCFL(Σ)）を紹介し，これら２つの言語のクラスが等しいことを示す．また，ERL(2,Σ)のその他の性質について述べる．例えば，(1)ERL(2,Σ)と線形言語の族との間には包含関係は成り立たない，(2)ERL(2,Σ)と決定性文脈自由型言語の族との間には包含関係は成り立たない等を示す．

本論文の2節では，準備として，基本的な定義を述べる．3節では，ERL(2,Σ)と CLNCFL(Σ)が等しいことを証明する．4節では，ERL(2,Σ)の基本性質について述べる．5節では，高々スター次数2のλ-free拡張正規表現の一つの重要な性質について述べる．6節では，ERL(2,Σ)と文脈自由型言語族の他の部分族との間の包含問題について述べる．

2．準備

Σは空でない有限アルファベットの集合である．λは空系列である．ϕは空集合である．任意の$W \in \Sigma^*$に対して $l(W)$はWの長さで，W^RはWの逆系列である．$L \subset \Sigma^*$に対して$L^R=\{W^R \mid W \in L\}$である．任意のアルファベットV, V′と$W \in V^*$に対して$V'(W)$はWに現われるV′の記号の集合である．任意の$A \in V$に対して$\#_A(W)$はWに現われるAの個数である．集合Bに対して#BはBの濃度である．

［定義2．1］

ERE(2,Σ)はΣ上の高々スター次数2の拡張正規表現のクラスであり，次

のように帰納的に定義される．

(1) λ, ϕ, $a \in ERE(2,\Sigma)$（但し $a \in \Sigma$）．

(2) もし $n \geq 1$ で，$E_0, E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \cdots, E_{2n} \in ERE(2,\Sigma)$ であれば，$E_{11} \cup E_{12}$，$E_{11}E_{12}$，$(E_0)^*$，$(E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_0, E_{21}, \cdots E_{2n})^{**} \in ERE(2,\Sigma)$．

［注意２．１］

表現を明瞭にするため $(E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_0, E_{21}, \cdots E_{2n})^{**}$ の代わりにしばしば

$$\left[\begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1n} \end{bmatrix}, E_0, \begin{bmatrix} E_{21} \\ \vdots \\ E_{2n} \end{bmatrix}\right]^{**}$$

の表現が導入される．

［定義２．２］

$E \in ERE(2,\Sigma)$ が表わす各々の言語 $|E|$ は次のように帰納的に定義される．

(1) $|\lambda| = \{\lambda\}$，$|\phi| = \phi$，$|a| = \{a\}$（但し $a \in \Sigma$）．

(2) $|E_1 \cup E_2| = |E_1| \cup |E_2|$,

$|E_1E_2| = |E_1||E_2| = \{vw \mid v \in |E_1|, w \in |E_2|\}$,

$|(E)^*| = |E|^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} |E|^i$,

$$\left|\left[\begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1n} \end{bmatrix}, E_0, \begin{bmatrix} E_{21} \\ \vdots \\ E_{2n} \end{bmatrix}\right]^{**}\right|$$

$$= |E_0| \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{1 \leq j_1, \cdots, j_i \leq n} |E_{1j_1}| \cdots |E_{1j_i}||E_0||E_{2j_i}| \cdots |E_{2j_1}| \right)\right).$$

$E \in ERE(2,\Sigma)$ に対して $|E|$ は Σ 上の高々スター次数2の拡張正規言語と呼ばれる．

［定義２．３］

$ERL(2,\Sigma) = \{|E| \mid E \in ERE(2,\Sigma)\}$.

［例２．１］

(1) $|(a, \lambda, b)^{**}| = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

(2) $\left|\left[\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, c, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right]^{**}\right| = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$.

文脈自由文法(CFG) G は (V,Σ,P,S) の四つの組で示される．Vは変数の有限集合，Σは終端記号，Pは生成規則の有限集合，そしてSは開始記号である．文法Gにおける生成規則は一般に $A \to W$（但し $A \in V$, $W \in (V \cup \Sigma)^*$）の形をしている．L(G) は文法Gによって生成される文脈自由型言語(CFL)である．

［注意２．２］

$1 \leq i \leq m$ に対して $P = P_1 \cup \cdots \cup P_m$ かつ $P_i = \{A_i \to W_{ij} \mid 1 \leq j \leq k_i\}$ の時しばしば次のように書く；

$$\begin{aligned} P:\ & A_1 \to W_{11} | W_{12} | \cdots | W_{1k_1} \\ & \quad \vdots \\ & A_m \to W_{m1} | W_{m2} | \cdots | W_{mk_m} \end{aligned}$$

［定義２．４］

完全線形入れ子文脈自由文法（clncfg）は次の(1)-(2)を満たす cfg $G=(V,\Sigma,P,S)$ である．

(1) V は線形順序をもつ．すなわち，$V=\{A_1,\cdots,A_n\}$ かつ $A_1 > A_2 > \cdots > A_n$，

(2) 任意の $i\ (1 \le i \le n)$，$W \in (V \cup \Sigma)^*$ に対して，$A_i \to W \in P$ であれば，

$\#_{A_i}(W) \le 1$ かつ $V(W) \subset \{A_i,A_{i+1},\cdots,A_n\}$ である．

任意の clncfg G に対して $L(G)$ は完全線形入れ子文脈自由型言語（clncfl）と呼ばれる．$CLNCFG(\Sigma)$ は Σ 上の clncfg の集合を表わす．

［定義２．５］

$CLNCFL(\Sigma)=\{L(G) \subset \Sigma^* \mid G \in CLNCFG(\Sigma)\}$．

［命題２．１］任意の $E \in ERE(2,\Sigma)$ に対して

$|(E)^*|=|(E,\lambda,\lambda)^{**}|=|(\lambda,\lambda,E)^{**}|$.

（証明）明らか．

［注意２．３］

$ERE(2,\Sigma)$ の定義の中で Kleene-閉包は省略できるが，表記の便宜のため Kleene-閉包を導入する．

３．$ERL(2,\Sigma)=CLNCFL(\Sigma)$ の証明

次の定理は本研究の主な結果の一つである．

［ 定理３．１］

$ERL(2,\Sigma)=CLNCFL(\Sigma)$．

定理３．１は次の二つの補題による．

［ 補題３．１］

任意の $E \in ERE(2,\Sigma)$ に対して，$|E| \in CLNCFL(\Sigma)$ である．

（証明）証明は E に現れる演算子の個数に関する帰納法による．

基底段階：$|\lambda|$, $|\phi|$, $|a| \in CLNCFL(\Sigma)$（但し $a \in \Sigma$）．

帰納段階：$E \in ERE(2,\Sigma)$ は次の４つのいずれかの形をしている．

(1) $E=E_1 \cup E_2$ (2) $E=E_1E_2$ (3) $E=(E_1)^*$

(4) $E=\left(\begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1n} \end{bmatrix}, E_0, \begin{bmatrix} E_{21} \\ \vdots \\ E_{2n} \end{bmatrix}\right)^{**}$.

(1) $E=E_1 \cup E_2$ の場合

帰納法の仮定により $|E_1|$ と $|E_2|$ を生成する clncfg $G_1=(V_1,\Sigma,P_1,S_1)$ と $G_2=(V_2,\Sigma,P_2,S_2)$ が存在する．そのとき $V_1 \cap V_2=\phi$ としてよい．次の $G=(V,\Sigma,P,S)$ は E に対する条件を満たす．

(1.1) $V=V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$

(1.2) $P=P_1 \cup P_2 \cup S \to S_1|S_2$

(2) $E=E_1E_2$ の場合

帰納法の仮定により $|E_1|$ と $|E_2|$ を生成する clncfg $G_1=(V_1,\Sigma,P_1,S_1)$ と

$G_2=(V_2,\Sigma,P_2,S_2)$ が存在する．そのとき $V_1 \cap V_2=\phi$ としてよい．次の $G=(V,\Sigma,P,S)$ はEに対する条件を満たす．

(2.1) $V=V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$

(2.2) $P=P_1 \cup P_2 \cup S \to S_1S_2$

(3) $E=(E_1)^*$ の場合

帰納法の仮定により $|E_1|$ を生成する clncfg $G_1=(V_1,\Sigma,P_1,S_1)$ が存在する．次の $G=(V,\Sigma,P,S)$ はEに対する条件を満たす．

(3.1) $V=V_1 \cup \{S\}$

(3.2) $P=P_1 \cup S \to \lambda\ |S_1|S_1S$

(4) $$E=\left[\begin{bmatrix}E_{11}\\ \vdots\\ E_{1n}\end{bmatrix},E_0,\begin{bmatrix}E_{21}\\ \vdots\\ E_{2n}\end{bmatrix}\right]^{**}$$ の場合

帰納法の仮定により $|E_{1i}|$, $|E_0|$, $|E_{2i}|$ を生成する clncfg $G_{1i}=(V_{1i},\Sigma,P_{1i},S_{1i})$, $G_0=(V_0,\Sigma,P_0,S_0)$, $G_{2i}=(V_{2i},\Sigma,P_{2i},S_{2i})$ が存在する（但し $1 \leq i \leq n$）．次の $G=(V,\Sigma,P,S)$ は Eに対する条件を満たす．

(4.1) $V=V_0 \cup \{S\} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (V_{1i} \cup V_{2i}))$

(4.2) $P=P' \cup P_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (P_{1i} \cup P_{2i}))$,

ここで，$P'=S \to S_0|S_{11}SS_{21}|S_{12}SS_{22}|\cdots|S_{1n}SS_{2n}$ □

［補題３．２］

任意の $L \subset CLNCFL(\Sigma)$ に対して $|E|=L$ である $E \in ERE(2,\Sigma)$ が存在する．

（証明）$L \in CLNCFL(\Sigma)$ とする．$G=(V,\Sigma,P,S)$ は Lを生成する clncfg とする．証明は #Vに関する帰納法による．

基底段階：#V=1．Pの形は；

$P=S \to a_1|a_2|\cdots|a_m|x_1Sy_1|x_2Sy_2|\cdots|x_nSy_n$（但し $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ に対して $m, n \geq 0$ かつ $a_i,x_j,y_j \in \Sigma^*$)．次の Eは条件を満たす；

$$E=\left[\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_m,\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}\right]^{**}.$$

帰納段階：$V=\{A_1,\cdots,A_n\}$, $A_1 > \cdots > A_n$ とする．$A_1=S$ と仮定する．

Pの形は；$P=A_1 \to v_{11}|\cdots|v_{1p}$

$|V_{11}A_1V_{21}|\cdots|V_{1q}A_1V_{2q}$

$|W_{11}|\cdots|W_{1r}$

$\cup P'$,

（但し $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq k \leq r$ に対して $v_{1i} \in \Sigma^*$, $V_{1j}\ V_{2j}$, $W_{1k} \in (\{A_2,\cdots,A_n\} \cup \Sigma)^*$ であり，任意の $A_t \to W \in P'$ に対して $2 \leq t \leq n$ である．

帰納法の仮定によって，任意の $W \in (\{A_2,\cdots,A_n\} \cup \Sigma)^*$ に対して $E(W) \in ERE(2,\Sigma)$ を次のように定義する．

(2.1) もし $W \in \Sigma^*$ なら，$E(W)=W$ である．

(2.2) $x_i \in \Sigma^*$ $(1 \le i \le u+1)$, $B_j \in \{A_2, \cdots, A_n\}$ $(1 \le j \le u)$ に対して
$W=x_1B_1x_2B_2\cdots x_uB_ux_{u+1}$ なら，$E(W)=x_1E(B_1)x_2E(B_2)\cdots x_uE(B_u)x_{u+1}$ である。
（但し $1 \le j \le u$ に対して $E(B_j) \in ERE(2,\Sigma)$, $|E(B_j)|=L(V,\Sigma,P,B_j)$）
　次の E は条件を満たす；

$$E=\left[\begin{bmatrix} E(V_{11}) \\ \vdots \\ E(V_{1q}) \end{bmatrix}, v_{11} \cup \cdots \cup v_{1p} \cup E(W_{11}) \cup \cdots \cup E(W_{1r}), \begin{bmatrix} E(V_{21}) \\ \vdots \\ E(V_{2q}) \end{bmatrix}\right]^{**}. \qquad \square$$

4．ERL(2,Σ)の基本性質

［命題4．1］

(1) ERL(2,Σ)の族は逆系列の演算について閉じている．
(2) ERL(2,Σ)の族はERL(2,Σ)代入について閉じている．
(3) ERL(2,Σ)の族は$\#\Sigma \ge 2$のとき共通集合の演算について閉じていない．
(4) ERL(2,Σ)の族は$\#\Sigma \ge 2$のとき補集合の演算について閉じていない．
（証明）(1)明らか．(2)もまた明らか，ERL(2,Σ)代入は各々の $a \in \Sigma$に対して $f(a) \in ERL(2, \Delta)$であるような代入 $f:\Sigma^* \to \Delta^*$である．(3) ERL(2,Σ)の族 $|E_1|=(a, \lambda, b)^{**}a^*$と$|E_2|=a^*(b, \lambda, a)^{**}$（但し$\Sigma=\{a,b\}$）の共通集合は $|E_1| \cap |E_2|=\{a^nb^na^n \mid n \ge 0\}$であり，文脈自由型言語でない[1,2].
(4) ERL(2,Σ)の族が補集合の演算について閉じていると仮定する．一般に，$L_1 \cap L_2=\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$なる関係が成り立つ．ここで $L_1,L_2 \in ERL(2,\Sigma)$とすると，上式の左辺は ERL(2,Σ)となる．これは(3)に矛盾する．　□

［注意4．1］

CFL(Σ) ⊃ ERL(2,Σ) ⊃ RL(Σ)であり，#Σ=1のとき CFL(Σ)=RL(Σ)であるから，#Σ=1のとき ERL(2,Σ)=RL(Σ)である（RL(Σ)は Σ上の正規言語）．

［定義4．1］

ERL(2,Σ)に対する共通集合問題は任意の与えられた$L_1,L_2 \in ERL(2,\Sigma)$に対して$L_1 \cap L_2=\phi$であるか否かを決定する問題である．

［定理4．1］

ERL(2,Σ)に対する共通集合問題は決定不能である．
（証明）証明は [1]の命題 8.3.1と補題 8.4.1の証明のように行う．$\Sigma_0=\{a,b\}$, $\Sigma=\{a,b,c\}$とする．任意の$n \ge 1$, $\overline{x}=(x_1, \cdots, x_n) \in ((\Sigma_0)^+)^n$に対して $L(\overline{x})$を次のように定義する；
$L(\overline{x})=\{ba^{i_k}b\cdots ba^{i_1}cx_{i_1}\cdots x_{i_k} \mid k \ge 1,\ 1 \le i_j \le n,\ 1 \le j \le k\}$.
そのとき$L(\overline{x})$を示す$E(\overline{x})$は；

$$E(\overline{x})=\left[\begin{bmatrix} ba \\ ba^2 \\ \\ \vdots \\ ba^n \end{bmatrix}, \bigcup_{i=1}^{n} ba^icx_i, \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right]^{**}.$$

であるから $L(\overline{x}) \in ERL(2,\Sigma)$ である.

任意の $\overline{y}=(y_1, \cdots, y_n) \in ((\Sigma_0)^+)^n$ に対して $L(\overline{x},\overline{y})$ を次のように定義する; $L(\overline{x},\overline{y})=L(\overline{x})\{c\}(L(\overline{y}))^R$. そのとき $L(\overline{x},\overline{y})$ を示す $E(\overline{x},\overline{y})$ は: $E(\overline{x},\overline{y})=E(\overline{x})c(E(\overline{y}))^R$ であるから $L(\overline{x},\overline{y}) \in ERL(2,\Sigma)$ である. 但し $(E(\overline{y}))^R$ は $E(\overline{y})$ の逆表現である. $L_S=\{w_1cw_2cw_2^Rcw_1^R \mid w_1,w_2 \in (\Sigma_0)^+\}$ とする. そのとき L_S を示す $E(L_S)$ は:

$$E(L_S)=\left[\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}, acE_0ca \cup bcE_0cb, \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right]^{**},$$

$$\text{但し } E_0=\left[\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}, aca \cup bcb, \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right]^{**}.$$

ゆえに, $L(\overline{x},\overline{y}) \cap L_S=\{t_1ct_2ct_2^Rct_1^R \mid t_1=ba^{i_k}\cdots ba^{i_1}, t_2=x_{i_1}\cdots x_{i_k}=y_{i_1}\cdots y_{i_k}\}$.

従って $L(\overline{x},\overline{y}) \cap L_S \neq \phi$ は $(\overline{x},\overline{y})$ の Post 対応問題の解が存在する時そのときに限る. Post 対応問題は決定不能であるから $ERL(2,\Sigma)$ に対する共通集合問題は決定不能である（但し $\#\Sigma \geq 2$）.

5. 高々スター次数2の λ-free 拡張正規表現

[定義5.1]

$E \in ERE(2,\Sigma)$ の表現の中に λ が現われないなら, E を λ-free という.

[定理5.1]

任意の $E \in ERE(2,\Sigma)$ に対して $|E'|=|E|-\{\lambda\}$ であるような λ-free $E' \in ERE(2,\Sigma)$ が存在する.

（証明）証明は E に現れる演算子の個数に関する帰納法による.

基底段階: $E=\lambda, \phi, a$（但し $a \in \Sigma$）のとき, 明かである.

帰納段階: 次の四つの場合を考える.

(1) $E=E_1 \cup E_2$ の場合,

帰納法の仮定により $|E_1'|=|E_1|-\{\lambda\}$, $|E_2'|=|E_2|-\{\lambda\}$ であるような λ-free $E_1', E_2' \in ERE(2,\Sigma)$ が存在する. このとき $E'=E_1' \cup E_2'$ とおけばよい.

(2) $E=E_1E_2$ の場合,

帰納法の仮定により $|E_1'|=|E_1|-\{\lambda\}$, $|E_2'|=|E_2|-\{\lambda\}$ であるような λ-free $E_1', E_2' \in ERE(2,\Sigma)$ が存在する. 次の四つの場合を考える.

(2.1) $\lambda \in |E_1| \cap |E_2|$ のとき, $E'=E_1' \cup E_2' \cup E_1'E_2'$ とおく.

(2.2) $\lambda \in |E_1|$ かつ $\lambda \notin |E_2|$ のとき, $E'=E_2' \cup E_1'E_2'$ とおく.

(2.3) $\lambda \notin |E_1|$ かつ $\lambda \in |E_2|$ のとき, $E'=E_1' \cup E_1'E_2'$ とおく.

(2.4) $\lambda \notin |E_1| \cup |E_2|$ のとき, $E'=E_1'E_2'$ とおく.

明かに $|E'|=|E|-\{\lambda\}$ である.

(3) $E=(E_1)^*$ の場合,

帰納法の仮定により $|E_1'|=|E_1|-\{\lambda\}$ であるような λ-free $E_1' \in ERE(2,\Sigma)$ が存在する. このとき $E'=E_1'(E_1')^*$ とおけばよい.

(4)
$$E=\left[\begin{bmatrix}E_{11}\\ \vdots\\ E_{1n}\end{bmatrix},E_0,\begin{bmatrix}E_{21}\\ \vdots\\ E_{2n}\end{bmatrix}\right]^{**}$$ の場合,

次の五つの場合を考える.

(4.1) $E_{11}=\lambda$ のとき，もし n=1 であれば，$|E|=|E_0(E_{21})^*|$ であり，(2) と (3) によって E' が存在する．もし $n\geq 2$ であれば，

$$|E|=\left|\left[\begin{bmatrix}E_{12}\\ \vdots\\ E_{1n}\end{bmatrix},E_0(E_{21})^*,\begin{bmatrix}E_{22}(E_{21})^*\\ \vdots\\ E_{2n}(E_{21})^*\end{bmatrix}\right]^{**}\right|$$ であり，n-1 の場合に還元される.

(4.2) $E_{21}=\lambda$ のとき，(4.1) と同様にして，$|(E_{11})^*E_0|$ または n-1 の場合に還元される.

(4.3) ある i $(2\leq i\leq n)$ に対して，$E_{1i}=\lambda$ のとき，

$$|E|=\left|\left[\begin{bmatrix}E_{1i}\\ E_{11}\\ \vdots\\ E_{1i-1}\\ E_{1i+1}\\ \vdots\\ E_{1n}\end{bmatrix},E_0,\begin{bmatrix}E_{2i}\\ E_{22}\\ \vdots\\ E_{2i-1}\\ E_{2i+1}\\ \vdots\\ E_{2n}\end{bmatrix}\right]^{**}\right|$$ となり，(4.1) に還元される.

(4.4) ある i $(2\leq i\leq n)$ に対して，$E_{2i}=\lambda$ のとき，(4.2) に還元される.

(4.5) すべての i $(1\leq i\leq n)$ に対して，$E_{1i}, E_{2i}\neq\lambda$ のとき，次の三つの場合を考える.

(4.5.1) $\lambda\in|E_{11}|$ のとき，$|E_{11}'|=|E_{11}|-\{\lambda\}$ であるような λ-free $E_{11}'\in ERE(2,\Sigma)$ が存在して,

$$|E|=\left|\left[\begin{bmatrix}E_{11}'\\ E_{12}\\ \vdots\\ E_{1n}\end{bmatrix},E_0(E_{21})^*,\begin{bmatrix}E_{21}(E_{21})^*\\ E_{22}(E_{21})^*\\ \vdots\\ E_{2n}(E_{21})^*\end{bmatrix}\right]^{**}\right|$$ である.

さらに $\lambda\in|E_{21}(E_{21})^*|$ であれば，(2) と (3) によって $|E_{21}'|=|E_{21}(E_{21})^*|-\{\lambda\}$ であるような λ-free $E_{21}'\in ERE(2,\Sigma)$ が存在して,

$$E=\left|\left[\begin{bmatrix}E_{11}'\\ E_{12}\\ \vdots\\ E_{1n}\end{bmatrix},E_0(E_{21})^*,\begin{bmatrix}E_{21}(E_{21})^*\\ E_{22}(E_{21})^*\\ \vdots\\ E_{2n}(E_{21})^*\end{bmatrix}\right]^{**}\right|$$ である。

(4.5.2) $\lambda\in|E_{21}|$ のとき，(4.5.1) と同様に考える.

(4.5.3) i $(2\leq i\leq n)$ に対して，(4.5.1) と (4.5.2) を繰り返して，E_{1i} と E_{2i} はすべての i $(1\leq i\leq n)$ に対して λ-free と仮定する．帰納法の仮定によって $|E_0'|=|E_0|-\{\lambda\}$ であるような λ-free $E_0'\in ERE(2,\Sigma)$ が存在する．このとき $\lambda\notin|E_0|$ であれば,

$$E' = \left[\begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1n} \end{bmatrix}, E_0', \begin{bmatrix} E_{21} \\ \vdots \\ E_{2n} \end{bmatrix}\right]^{**}$$ とおく.

$E_0 = \lambda$ であれば,

$$|E| = \left| \lambda \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_{1i}E_{2i} \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i_1, i_2 \leq n} E_{1i_1}E_{1i_2}E_{2i_2}E_{2i_1} \right) \cup \cdots \right|$$

$$= \left| \lambda \cup \left[\begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1n} \end{bmatrix}, \bigcup_{i=1}^{n} E_{1i}E_{2i}, \begin{bmatrix} E_{21} \\ \vdots \\ E_{2n} \end{bmatrix}\right]^{**} \right|$$ である.

最後に, $|E_0| = |\lambda \cup E_0'|$ かつ $|E_0'| \neq \phi$ であれば,

$$|E| = \left| \lambda \cup \left[\begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1n} \end{bmatrix}, E_0' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_{1i}E_{2i} \right), \begin{bmatrix} E_{21} \\ \vdots \\ E_{2n} \end{bmatrix}\right]^{**} \right|$$ である.

以上によって定理は成り立つ.

6. ERL(2,Σ)と文脈自由型言語族の他の部分族との間の包含問題

LCFL(Σ)をΣ上の線形言語の族, ULCFL(Σ)をΣ上の超線形言語の族, DCFL(Σ)をΣ上の決定性文脈自由型言語の族, UACFL(Σ)をΣ上のあいまいでない文脈自由型言語の族とする(詳細は[1. 2]).

[定義6. 1]

(1) ERL(2,Σ)-LCFL(Σ) $\neq \phi$; (2) ERL(2,Σ)-ULCFL(Σ) $\neq \phi$;
(3) ERL(2,Σ)-DCFL(Σ) $\neq \phi$; (4) ERL(2,Σ)-UACFL(Σ) $\neq \phi$;
(5) LCFL(Σ)-ERL(2,Σ) $\neq \phi$; (6) ULCFL(Σ)-ERL(2,Σ) $\neq \phi$;
(7) DCFL(Σ)-ERL(2,Σ) $\neq \phi$; (8) UACFL(Σ)-ERL(2,Σ) $\neq \phi$;

ここで, $\#\Sigma \geq 4$である.

(証明) (1) LCFL(Σ) ⊂ ULCFL(Σ)であるから(2)より成り立つ.

(2) $L_1 = (\{a^n cb^n \mid n \geq 1\}d)^* \notin$ ULCFL(Σ)は山崎によって証明された[3]. 他方, L_1を示す E_1は: $E_1 = ((a, acb, b)^{**}d)^*$.

(3) $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\} \notin$ DCFL(Σ)は知られている. 他方, L_2を示す E_2は:

$$E_2 = \left[\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \lambda, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right]^{**}.$$

(4) $L_3 = \{a^n b^n c^m d^m \mid n \geq 1, m \geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n \mid n \geq 1, m \geq 1\} \notin$ UACFL(Σ)は知られている[1,2]. 他方, L_3を示す E_3は:

$E_3 = (a, ab, b)^{**}(c, cd, d)^{**} \cup (a, a(b, bc, c)^{**}d, d)^{**}$.

(5) 次の線形文法 G=(V,Σ,P,S)を考える. ここで, Σ={a,b,c}, V={S,A},

P: $S \rightarrow aba \mid aSa \mid cAc$, $A \rightarrow bAb \mid cSc$.

L(G) ∈ ERL(2,Σ)と仮定する. そのとき L(G)を示すλ-free E ∈ ERE(2,Σ)が存

在する．まず次の系を示す．

(5.1) 任意の $w \in L(G)$ に対し，$w=vabav^R$ であるような $v \in \Sigma^*$ が存在する．

(5.2) $L(G) \cap \Sigma^*aba\Sigma^*aba\Sigma^* = L(G) \cap \Sigma^*abb\Sigma^* = L(G) \cap \Sigma^*bba\Sigma^* = \phi$．

(5.3) 任意の $u,v,w,x,y \in \Sigma^*$ に対して，すべての $i \geq 0$ に対して $ux^ivy^iw \in L(G)$ であれば，$l(x)=l(y)$ である．

（系の証明）(5.1)と(5.2)は定義によって明らかである．

(5.3) すべての $i \geq 0$ に対して $ux^ivy^iw \in L(G)$, $l(x) \neq l(y)$ と仮定する．$l(x) > l(y)$ と仮定する（その他は対称）．そのときある十分大きい $i > 0$ に対して $l(x^i) > 2l(uvy^iw)+3$ が存在する．(5.1)よりある $x_0, x_1 \in \Sigma^*$ に対して $x^i=x_0abax_1$ である．しかし $ux^{2i}vy^{2i}w=ux_0abax_1x_0abax_1vy^{2i}w \in L(G)$ であり，(5.1)に矛盾する． □

定理の証明（続き） nをEに現われるΣに属するすべての記号の数とする．$w=(a^{n+1}cb^{n+1}c)^{n+1}aba(cb^{n+1}ca^{n+1})^{n+1}$ を考える．明かに $w \in L(G)$ である．従って w は Eの中で導かれる．Eの位置 i に，位置 i に現われる各々の $x \in \Sigma$ を結びつける，但し i は正の整数で，x は左から Eの i 番目の位置に現われる記号を示す．従って w に対してペアの系列 $((x_1,i_1),(x_2,i_2),\cdots,(x_p,i_p))$ が存在する，ここで $w=x_1x_2\cdots x_p$, $x_1=\cdots=x_{n+1}=a$, $x_{n+2}=c$, $x_{n+3}=\cdots=x_{2n+3}=b, \cdots$ 等，そして各々の i_j は Eにおける x_j の位置である．n の定義によって $1 \leq j_{11} < j_{11}' \leq n+1$ かつ $i_{j_{11}}=i_{j_{11}'}$ であるような j_{11}, j_{11}' が存在する．(5.3)によって(H)*の型の Eの部分表現は存在しないことに注意する．従って $i_{j_{11}}$ 番目の位置は次のように**の中に現われる：

$$\cdots\left[\left[\begin{array}{c}\vdots\\ a^k\\ \vdots\end{array}\right],\cdots,\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{array}\right]\right]^{**}\cdots,\text{或は}\quad\cdots\left[\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{array}\right],\cdots,\left[\begin{array}{c}\vdots\\ a^k\\ \vdots\end{array}\right]\right]^{**}\cdots.$$

同様に $n+3 \leq j_{21} < j_{21}' \leq 2n+3$ かつ $i_{j_{21}}=i_{j_{21}'}$ であるような j_{21}, j_{21}' が存在する．従って $i_{j_{21}}$ 番目の位置は次のように**の中に現われる：

$$\cdots\left[\left[\begin{array}{c}\vdots\\ b^r\\ \vdots\end{array}\right],\cdots,\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{array}\right]\right]^{**}\cdots,\text{或は}\quad\cdots\left[\left[\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{array}\right],\cdots,\left[\begin{array}{c}\vdots\\ b^r\\ \vdots\end{array}\right]\right]^{**}\cdots.$$

(5.2)より $\left[\begin{array}{c}\vdots\\ a^k\\ \vdots\end{array}\right]$ と $\left[\begin{array}{c}\vdots\\ b^r\\ \vdots\end{array}\right]$ は明かに異なる．

w と Eを通じて整数の系列 $j_{11},\cdots,j_{1n+1},j_{21},\cdots j_{2n+1}$ を得る．nの選択によって $1 \leq e < f \leq n+1$ かつ $i_{j_{1e}}=i_{j_{1f}}$ であるような整数 e,f が存在する．従って Eは次のような部分表現を持つ；

$$\cdots\left[\left[\cdots(\ \vdots\ ,\cdots,\ \vdots\ )^{**}\cdots\right],\cdots,\left[\ \vdots\ \right]\right]^{**}\cdots,$$ 或は

$$\cdots\left[\left[\ \vdots\ \right],\cdots,\left[\cdots(\ \vdots\ ,\cdots,\ \vdots\ )^{**}\cdots\right]\right]^{**}\cdots$$ 。

従って，次の(5.4)または(5.5)が成り立つ．

(5.4) すべての $i, j \geq 0$ に対して $u_0(u_1v_0{}^iw_0v_1{}^iu_2)^jw_1v_2{}^ju_3 \in |E|$ であるような $u_0,u_1,u_2,u_3 \in \Sigma^*$ かつ $v_0,w_0,v_1,w_1,v_2 \in \Sigma^+$ が存在する．

(5.5) すべての $i, j \geq 0$ に対して $u_0v_0{}^iw_0(u_1v_1{}^jw_1v_2{}^ju_2)^iu_3 \in |E|$ であるような $u_0,u_1,u_2,u_3 \in \Sigma^*$ かつ $v_0,v_1,v_2,w_0,w_1 \in \Sigma^+$ が存在する．

これは(5.3)に矛盾する． □

(6)-(8) $L(G) \in ULCFL(\Sigma) \cap DCFL(\Sigma) \cap UACFL(\Sigma)$ に注目すれば，(5)の証明より(6)-(8)は成り立つ． □

参考文献

[1] M.A.Harrison, Introduction to Formal Language Theory, Addison-Wesley, 1978.

[2] J.E.Hopcroft and J.D.Ullman, Introduction to Automata Theory, Language, and Computation, Addison-Wesley,1979.

[3] 山崎：文脈自由言語のある部分言語の包含関係に関する一考察，信学論(D),J70-D,1,pp.1-9(87/1).

[4] S.A.Greibach, The unsolvability of the recognition of linear context-free languages. JACM, 13, 4 pp.582-587(1966).

[5] S.Ginsburg and H.G.Rice, Two families of languages related to ALGOL, JACM, 9, pp.350-371(1962).

[6] S.Ginsburg and E.H.Spanier, Bounded ALGOL-like languages, Trans.Am.Math.Soc., 113, pp.333-368(1964).

[7] S.Ginsburg, The Mathmatical Theory of Context-Free Languages, McGraw-Hill(1966).

[8] E.Shamir, On sequential language, Z.Phonetik,Sprach. & Kommunikationsforschung, 18, pp.61-69(1965).

[9] Kosaburo Hashiguchi and Heekeun Yoo, Extended regular expressions of star degree at most two, to appear in Theoretical Computer Science.