数理解析研究所講究録
696巻 1989年 234-245

最適成長理論と力学系

京大経済研　西村和雄

(Kazuo Nishimura)

1．はじめに

経済学において、社会的厚生を最大化する動学的経路がどのような性質を持つかを研究する分野は最適成長理論とよばれている。他方、景気循環を実証的に研究することも行なわれてきたが、景気循環が必ずしも経済成長の特殊ケースとして扱われてはいなかった。太陽黒点説などはその例である。最近の最適成長理論のテーマは、景気循環を生む経済の内生的メカニズムを説明することである。その為に、ホップ分岐やカオスの理論が有効な方法として扱われている。以下では最近の結果を議論する為の準備として、最も簡単な経済の最適成長モデルの説明から始める。

2．経済モデルの説明

生産関数：いま、生産関数が1次同次関数

(1)　$Y=F(K,L)$

で表わされるとする。Kは資本財、Lは労働量である。生産物Yは消費と投資に費やされる。減価償却率をδとすると、t期における資本ストックの減耗分はδK_tである。よって、t期における純投資額は、

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

である。K_{t+1}は t+1期の初めにおける資本ストックの量である。かくて、生産物の需給均等式は

(2) $Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t$

で表わされる。(1)式と、(2)式から

(3) $c_t = F(K_t, L_t) + (1-\delta)K_t - K_{t-1}$

となる。生産関数の1次同次性から、(3)式をL_tで割って一人当りの変数に直すと、

(4) $C_t = F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t - n_t k_{t+1}$

となる。ここで、

$$c_t = \frac{C_t}{L_t},\ k_t = \frac{K_t}{L_t},\ n_t = \frac{L_{t+1}}{L_t}$$

とおいている。$n_t - 1$は労働者人口の成長率である。さらに

$$f(k_t) = F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t$$

とおくと、(4)式は

(5) $c_t = f(k_t) - n_t k_{t+1}$

となる。よって、以下では$f(k_t)$ を生産関数のようにみなして議論を進めてもかまわないであろう。当面の間、$f(k_t)$は単調増加な凹関数であると仮定する。しかも$f(\bar{k}) = \bar{k}$となる$\bar{k} > 0$が存在し、

(6) $f(k) > k$ for $0 < k < \bar{k}$、$f(k) < k$ for $k > \bar{k}$

が成り立つとする。

<u>効用関数</u>：個人は、各期に消費財を消費することから効用 $u(c_t)$ を得る。ここで c_t は1人当りの消費量である。全ての個人が同じ効用関数を持つと仮定すると、t期における全ての個人の効用の和は $L_t u(c_t)$ である。しかも、人口成長率 n_t-1 が常に一定値 $n-1$ をとると仮定すると

$$L_t=nL_{t-1}=n^t L_0$$

である。これを用いると、t期の効用の総和すなわち社会的効用は

$$n^t L_0 u(c_t)$$

となる。今期を0期とよび、無限の将来期間に渡る社会的効用の和を

$$(7)\quad \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t n^t L_0 u(c_t) = L_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\rho n)^t u(c_t)$$

と定義する。ρ^t は将来効用に対するウェイトで、$0<\rho<n^{-1}$ である。このウェイト ρ の意味をみるために、$n=1$ のケースについての2期に渡る効用の和

$$(8)\quad V(c_0, c_1)=u(c_0)+\rho u(c_1)$$

を考える。効用の和Vの値を一定とする (c_0, c_1) の組合せは c_0-c_1 平面上での無差別曲線を描く。この限界代替率をとると

$$(9)\quad -\frac{dc_1}{dc_0}=\frac{u(c_0)}{\rho u(c_1)}$$

である。ここで限界代替率(9)を $c_0=c_1$ で評価すると

$$\left.\frac{dc_1}{dc_0}\right|_{c_1=c_0}=\rho^{-1}$$

と一定の値をとる。よって、無差別曲線の傾きは 45°線上で一定となる。限界代替率は今期の消費財1単位に対する主観的評価を将来財c_1の量で測った値である。その値ρ^{-1}は1より大きい。すなわち、将来財は割引されて評価されている。ρ^{-1}は割引因子 (discount factor)、$\rho^{-1}-1$は割引率 (disount rate) あるいは時間選好率 (rate of time preferenceとよばれている。ここで$\beta=\rho^{-1}-1$とおくと、

(10) $V(c_0, c_1)=u(c_0)+\frac{1}{1+\beta}u(c_1)$

の関係がある。従って、(8)は消費 c_0、c_1からの効用の割引現在価値 (present discounted value) であるといえる。また

(8) 式を

$$V(c_0, c_1)=u(c_0)+\rho n u(c_1)$$

と修正するなら、$u(c_0)$ は今期の消費c_0がもたらす一人当りの効用$u(c_1)$ は、来期の消費c_1がもたらす1人当りの効用である。来期には人口がn倍されるので、$u(c_1)$をn倍している

以上の準備の下で (7) 式に戻ると、(7)式は、人口が毎期々にn倍に増加してゆくときの、無限の将来に渡る効用の割引現在価値を表わすことがわかるであろう。

最適成長問題：経済計画当局が無限期間に渡る社会的効用の経済価値を最大化する問題を考えてみる。目的関数は (7)式

で、生産側の制約条件は(5)式で与えられる。人口成長率n_tは本質的でないので、$n=1$とここで仮定する。すると、

$$(\mathrm{I})\quad \max\sum_{t=0}^{\infty}\rho^{t}u(c_t)\quad \mathrm{s.t.}\quad c_t=f(k_t)-k_{t+1}、\ \mathrm{for}\ t\geqq 0、$$

$$k_0>0\quad 所与$$

という問題を解くことになる。

我々は(I)の解(これを最適解とよぶ)としての$\{\hat{k}_t\}_{t=1}^{\infty}$がどのような数列であるかに関心がある。下で述べるように最も単純はケース(I)の解は、時間tと共に単調な数列となる。この結果は、解が存在する限りは、効用関数や生産関数の形状から独立に得られるものである。

我々の目的は、振動解、周期解あるいはカオスが生ずる可能性をできるだけ簡単なしかも経済的に意味のあるモデルで議論することにある。(I)の最適解は常に単調な数列となる。そこで次の可能性として、生産関数が

$$(11)\qquad c_t=T(k_{t+1},k_t)$$

となるケースを考える。このような生産関数は経済が少なくとも2つの産業からなるときに、それらを集計して得られるものである。例えば、第1産業で消費財を第2産業で資本財を生産し、その生産過程が

$$(12)\qquad C_t=f^1(K_1,L_1)$$

$$K_{t+1}=f^2(K_2,L_2)$$

であらわされるとする。現在の資本ストック量をK_t、総労働量をL_tとして、

$$(\mathrm{II})\quad \max\ f^1(K_1, L_1)$$

$$\text{s.t.}\quad f^2(K_2, L_2) = K_{t+1}$$

$$K_1 + K_2 = K_t$$

$$L_1 + L_2 = L_t$$

を解く。この問題の最大値C_tはK_{t+1}, K_t, L_tの関数

$$(13)\quad C_t = G(K_t, K_{t+1}, L_t)$$

として表わされる。L_tは常に一定値Lであり、生産関数f^1, f^2が1次同次性であると仮定する。このとき(13)の両辺をLで割って(11)が得られる。(11)を効用関数に代入すると、

$$v(T(k_{t+1}, k_t))$$

となる。この関数を改めて$v(k_t, k_{t+1})$とおく。結局、我々はより一般的には

$$(\mathrm{III})\quad \max \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t v(k_t, k_{t+1})$$

$$(k_t, k_{t+1}) \in D$$

$$k_0 > 0 \quad \text{所与}$$

という問題を解くことになる。ここでDは$R^2_+ = \{x \in R^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 > 0\}$ のコンパクトかつ凸な部分集合である。(III)の最適解の性質を調べるが、その際に用いられる条件は、Tとu、あるいは、f^1、f^2とuに関する条件に還元することができる。

3、最適解の性質

単調解と振動解：vに関しては以下の仮定をする。ただし、u_i, u_{ij}は偏微分、交差偏微分を表わす。

(A1) vは凹関数であり、Dにおいて連続、Dの内部においてC^2であり、$v_1>0, v_2<0$, $v_{11}>0$, $v_{22}<0$が成り立つ。

このとき、次の定理が成り立つ。ただしDの内部を$\dot{D}$と表わす。

定理1：(A1)が成り立つとして、$\{K_t\}$を（Ⅲ）の最適解とする。もし、$(k_t, k_{t+1}) \in \dot{D}$ならば、次の結果が成り立つ。

(i) $\dot{D}$上のすべての点(x, y)において、$v_{12}(x, y)>0$であれば、$k_t<k_{t+1}$のときは必ず$k_{t+1} \leqq k_{t+2}$となる。さらに$(k_{t+1}, k_{t+2}) \in \dot{D}$であれば、$k_{t+1}<k_{t+2}$が保証される。

(ii) $\dot{D}$上のすべての点(x, y)において、$v_{12}(x, y)<0$であれば、$k_t<k_{t+1}$のときは必ず$k_{t+1} \geqq k_{t+2}$となる。さらに$(k_{t+1}, k_{t+2}) \in \dot{D}$であれば$k_{t+1}>k_{t+2}$が保証される。

証明 Benhabib and Nishimura [1985]をみよ。

定理1の(i)は$\{K_t\}$が単調な数列となることを、(ii)は$\{K_t\}$が振動する数列となることを意味する。この結果から周期解が存在するとすれば、$v_{12}<0$ のケースである。また、カオスが生ずるとしてもやはりこのケースである。

周期解の存在　次に、周期解の存在を議論する。Dの内部上の解について、オイラーV方程式

(14)　$v_2(k_{t-1},k_t)+\rho v_1(k_t,k_{t+1})=0$

が成り立つ。(14)の解として、

(15)　$v_2(k(\rho),k(\rho))+\rho v_1(k(\rho),k(\rho))=0$

をみたす$k(\rho)$を定常解とよぶ。

(A2)　任意の$\rho\in[\delta,1]$に対して、定常解$k(\rho)$が存在し$(k(\rho),k(\rho))\in\dot{D}$である(但し、$\delta<1$)．

(A3)　任意の$(x,y)\in\dot{D}$に対して、$u_{12}(x,y)<0$である。

(A4)　適当な値$\underline{\rho}$、$\bar{\rho}$が存在し、$[\underline{\rho},\bar{\rho}]\subset[\delta,1]$でありかつ、次の(i)(ii)が成り立つ。

(i)　$v_{22}(k(\bar{\rho}),k(\bar{\rho}))+\bar{\rho}v_{11}(k(\bar{\rho}),k(\bar{\rho}))$
$<(1+\bar{\rho})v_{12}(k(\bar{\rho}),k(\bar{\rho}))$

(ii)　$v_{22}(k(\underline{\rho}),k(\underline{\rho}))+\underline{\rho}v_{11}(k(\underline{\rho}),k(\underline{\rho}))$
$>(1+\underline{\rho})v_{12}(k(\underline{\rho}),k(\underline{\rho}))$

以上の仮定のもとにある$\rho^* \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$に対して(Ⅲ)の最適解が周期性を持つことがいえる。

<u>定理2</u>：(A1)-(A4)が成り立つとする。このとき、ある$\rho^* \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$が存在して、(Ⅲ)は周期2の解を持つ。

<u>証明</u>　Benhabib and Nishimura [1985]

これまでの仮定のうち説明を要するのは(A4)であろう。(A4)(i)はuが凹関数でかつ$v_{11} \neq v_{22}$であれば十分1に近いρに対してみたされる。またvが狭義の凹関数であれば、やはり、十分1に近いρに対してみたされる。またそのとき、定常解は鞍点なる。すなわち、初期値k_0が定常解に十分近いとき、最適解は定常解に収束する。これを定常解の局所安定性とよぶ。(A4)(ii)はρを$\underline{\rho}$まで減少させると定常解が局所不安定となることを保証する。

<u>具体例</u>：以下の例はSutherland [1979]によるものである。

(16)　$u=9k_t^2-11k_{t+1}k_t-4k_{t+1}^2+43k_{t+1}$

この例に対しては(A1)-(A4)がみたされ、$\rho^*=1/3$のとき周期解となる。Samuelson [1973]による例を若干修正した

(17)　$u=k_t^{\alpha}(1-k_{t+1})^{\beta}$

も$\alpha+\beta<1, 1/2<\alpha<k, \alpha<\beta<1/2$に対して同様の性質を持

つ。

<u>4．カオス</u>：問題Ⅲの最適解が周期性を持つケースについては十分条件がえられた。次にカオスとなるケースであるが、最適成長問題についてカオスが生じる十分条件をvに関する条件として表現することは容易ではない。Deneckere and Pelikan [1986]はLi and Yorke [1975] の意味で最適解がカオスを成す例をあげている。すなわちD=[0,1.7] × [0,1.7] の上で定義された関数

(18)　$u=xy-x^2y-\frac{1}{3}y+0.075y^2+100/3\ x-7x^2+4x^3-2x^2$

に対しては、$\beta=0.01$ のときに周期3の周期解が存在することを証明した。特定の解が周期3の周期となることは、オイラー方程式を用いて簡単に確かめることができる。

また、Boldrin and Montrucchio [1986] はR_+のコンパクトで凸な部分集合Kに対して、$D=K\times K$とし、任意のC^2関数$\theta: K\rightarrow K$に対し、

$$v(k,\theta(k))=\max\{v(k,k^1)\mid k^1\in K\}$$

をみたす凹関数vが存在するという定理を用いて、ρが十分小さいときに問題（Ⅲ）の最適解がカオスがなすケースがあることを証明した。

<u>連続時間モデル</u>：以上は離散時間形の最適経済成長モデルであった。連続時間形のモデルでは、一般には、$\rho>0$に対して

$$(\mathrm{IV})\quad \max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(\dot{k}(t), k(t))dt,$$

$$\text{s.t.}\quad k(0)=k_0 \quad \text{所与}$$

$$(k(t), \dot{k}(t)) \in D$$

と問題を定式化できる。ただし、D は $R^n_+ \times R^n$ のコンパクトで凸な部分集合、u は D 上で定義された関数である。n=1 のケースには（IV）の最適解は単調な変動しかしないので、周期性を持つためには n ≧ 2 とする必要がある。Benhabib and Nishimura [1981]は n=2 のケースについて、このモデルの背後にある生産関数と効用関数を明示して、定常解が一意的なモデルにおいて、リミットサイクルの存在を証明した。その方法は、一意的な定常解が安定から不安定に変り、そのヤコビアンが常に複素根を持つことから、ホップの分岐定理を用いて証明するというものである。

参考文献

J.Benhabib and K.Nishimura, "Competitive Equilibrium Cycles", Jurnal of Economic Theory 35 (1985), p.284-306

J.Benhabib and K.Nishimura,"On the Uniquness of Steady State in an Economy with Heterogenous Capital Goods", International Economic Review, 20 (1979), p.59-82

J.Benhabib and K.Nishimura,"The Hopf Bifurcation and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth", Journal of Economic Theory 21, (1979), p.421-p.444

M.Boldirn and L.Montrucchio,"On the Indeterminancy of Capital accumulation Paths", Journal of Economic Theory 40, (1986), p.26-39

W.D.Dechert and K.Nishimura, "A complete Characterization and Optimal Growth Paths in an aggregate model with a non-concave Production Function", Journal of Eocnomc Theory 31,(1983), p.332-354.

R.Deneckre and S.Pelikan, "Competitive Caos", Journal of Economic Theory 40, (1986), 13-25

T.Li and J.Yorke,"Period Three Implies Chaos",American Mathematical Monthly 82, (1975), p.985-992

P.A.samuelson,"Optimality of Profit, Including Prices under Idial Planning, Proceedings National Academy of Science 70 (1973), p.585-589

W.A.Sutherland,"On Optimal Development in Multi-sectoral Economy: The Discounted Case, Review of Economic Studies 46, (1979), p.585-589