数理解析研究所講究録
696巻 1989年 144-156

非可換2次元トーラスの微分同相について

慶大理工　小高一則 (Kazunori Kodaka)

非可換2次元トーラス

$\mathbb{T}$を1次元トーラスとし、φを、$\varphi(z)=e^{2\pi i\theta}z$, $z\in\mathbb{T}$により定まる$\mathbb{T}$上の微分同相とする。ここでθは無理数とする。$C(\mathbb{T})$を$\mathbb{T}$上の連続関数全体からつくられる可換C^*環とし、σをφより定まる$C(\mathbb{T})$上の$\mathbb{Z}$-actionとする。

定義　$C(\mathbb{T})$とσよりつくられるcrossed product $C(\mathbb{T})\times_\sigma\mathbb{Z}$を非可換2次元トーラスあるいは無理数回転$C^*$環という。これを$A_\theta$で表わす。

A_θの2つのunitary element u, vを次のように定義する。

$$u(n,z)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

$$v(n,z)=\begin{cases}z & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

このとき u, v の定義より

$$uv = e^{2\pi i\theta} vu$$

であり、A_θ は、u, v より生成される C^*-環と考えることができる。A_θ の state τ を

$$\tau(x) = \int_{\mathbb{T}} x(0, z)\, dz \qquad x \in l^1(\mathbb{Z}, C(\mathbb{T}))$$

と定める。簡単な計算により τ は A_θ の trace すなわち

$$\tau(xy) = \tau(yx) \qquad x, y \in A_\theta$$

であることがわかる。

A_θ については、次のようなことが知られている。

(1) A_θ は simple である。

(2) τ は unique tracial state である。

(3) $K_0(A_\theta) = \mathbb{Z}[1] \oplus \mathbb{Z}[p]$

ここで p は Rieffel projection (cf. [7]) であり

$\tau(p) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta \cap [0, 1]$

(4) $K_1(A_\theta) = \mathbb{Z}[u] \oplus \mathbb{Z}[v]$

微分同相写像

A_θ の dense $*$-部分環 A_θ^∞ を

$$A_\theta^\infty = \left\{ \sum c_{mn} u^m v^n \;\middle|\; \{c_{mn}\} \in S(\mathbb{Z}^2) \right\}$$

と定める。ここで $S(\mathbb{Z}^2)$ は $\mathbb{Z}^2$ 上の急減少関数全体とする。

δ_1, δ_2 を A_θ の canonical closed derivation で、

$$\delta_1(u) = 2\pi i u, \qquad \delta_1(v) = 0$$
$$\delta_2(u) = 0, \qquad \delta_2(v) = 2\pi i v$$

と定義されているとする。δ_1 と δ_2 とは可換であり、1-parameter group の generator になっている。このとき、

$$A_\theta^\infty = \bigcap_{m,n \geqq 0} \mathcal{D}(\delta_1^m \circ \delta_2^n)$$

である。ここで $\mathcal{D}(\delta_1^m \circ \delta_2^n)$ は任意の非負整数 m, n に対する作用素 $\delta_1^m \circ \delta_2^n$ の定義域とする。

定義 A_θ の自己同型 α が微分同相である。

$$\Longleftrightarrow \alpha(A_\theta^\infty) = A_\theta^\infty$$

A_θ の微分同相には次のようなものがある。

例1、$w \in A_\theta^\infty$ を unitary element とする。任意の $x \in A_\theta$ に対して、

$$Ad(w) : x \longmapsto w x w^*$$

と定める。

例2、$h = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、α_h を

$$\alpha_h(u) = u^a v^c, \qquad \alpha_h(v) = u^b v^d$$

と定める。

例3、$s, t \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha_{(s,t)}$ を

$$\alpha_{(s,t)}(u) = e^{2\pi i s} u, \qquad \alpha_{(s,t)}(v) = e^{2\pi i t} v$$

と定める。

A_θ の微分同相について Elliott が次のことを示した。

定理（Elliott） θ を generic とする。このとき、θ に対応する A_θ の任意の微分同相 α に対して、

$\exists w \in A_\theta^\infty$ unitary element $\quad \exists h \in SL(2,\mathbb{Z})$

$\exists s, t \in \mathbb{R}$

s.t. $\alpha = Ad(w) \circ \alpha_h \circ \alpha_{(s,t)}$

ここで θ が generic であるとは、次のことである。

定義 θ が generic である。

$\Longleftrightarrow \exists\, c > 0$, $\exists\, r > 1$

s.t. $|e^{2\pi i m\theta} - 1| \geqq \dfrac{c}{m^r}$

for $\forall m \in \mathbb{N}$,

すなわち、θ は、Liouville number ではないということである。

主結果

θ が generic のとき、A_θ の微分同相については、Elliott の結果がある。そこで、この節では、θ が non-generic のとき、A_θ の微分同相について、1つの結果を示す。

A_θ の任意の自己同型 α に対して、$\tilde{\tau}$ を τ より定まる crossed product $A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z}$ 上の tracial state とする。$\tilde{\tau}$ のつくり方は、τ のつくり方と同じであり、τ が unique であること

より、$\tilde{\tau}$ が tracial state であることがわかる。また $\tilde{\tau}_*$ を $\tilde{\tau}$ より定まる $K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})$ から $\mathbb{R}$ への homomorphism とする。

補題1、α を A_θ の自己同型で、$\alpha = Ad(w) \circ \alpha_h \circ \alpha_{(s,t)}$ という形をしているとする。このとき、

$$\alpha \text{ が inner} \iff \alpha_* = Id \text{ on } K_1(A_\theta)$$
$$\text{かつ } \tilde{\tau}_*(K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

(証明) $\Longrightarrow$ は明らか。そこで $\alpha_* = Id$ on $K_1(A_\theta)$ かつ $\tilde{\tau}_*(K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ を仮定する。このとき、$\alpha_* = Id$ on $K_1(A_\theta)$ より、$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。よって $\alpha = Ad(w) \circ \alpha_{(s,t)}$。

次に Pimsner [6, Theorem 3] より

$$\tilde{\tau}_*(K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}s + \mathbb{Z}t$$

ところが仮定より

$$\tilde{\tau}_*(K_0(A_\theta \times_\alpha \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

だから、$s, t \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$.

従って $\exists\, k, l, m, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{s.t. } s = k + l\theta, \quad t = m + n\theta$$

そこで $z = u^n v^{-l}$ とおくと

$$\begin{aligned} z u z^* &= u^n v^{-l} u v^l u^{-n} \\ &= e^{2\pi i l\theta} u \\ &= e^{2\pi i s} u \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z v z^* &= u^n v^{-l} v v^{l} u^{-n} \\
&= e^{2\pi i n\theta} v \\
&= e^{2\pi i t} v
\end{aligned}
$$

ゆえに、$\alpha_{(s,t)} = Ad(z)$，すなわち，α は inner である。

（証終）

可換 C^*-環 $C(\mathbb{T})$ と周期 1 の $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体がつくる C^*-環とを同一視する。

補題2. A_θ 上の自己同型 α を $\alpha(u) = f(v)u$，$\alpha(v) = v$ と定義する。ここで f は $C(\mathbb{T})$ の unitary element とする。このとき、$f \in C^\infty(\mathbb{T})$ ならば、α は A_θ の微分同相である。

（証明）任意の $x \in A_\theta^\infty$ に対して、$\alpha(x) \in A_\theta^\infty$ を示せば十分である。

$x = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} C_{mn} u^m v^n$ とする。ここで $\{C_{mn}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$。このとき

$$
\begin{aligned}
\alpha(x) &= \sum C_{mn}\, \alpha(u)^m \alpha(v)^n \\
&= \sum C_{mn}\, f(v) f(e^{2\pi i\theta} v) \cdots f(e^{2\pi i(m-1)\theta} v) u^m v^n
\end{aligned}
$$

任意の自然数 k に対して、

$$
y_k = \sum_{|m|,|n|\le k} C_{mn} f(v) f(e^{2\pi i\theta} v) \cdots f(e^{2\pi i(m-1)\theta} v) u^m v^n
$$

とかくと、

$y_k \in \mathcal{D}(\delta_j)$ $j=1,2$。また、$\|y_k - \alpha(x)\| \longrightarrow 0$ $k \to \infty$。

$\{C_{mn}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$，$|f(t)| = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ なので $\{\delta_j(y_k)\}_{k=1}^\infty$ は Cauchy sequence になる。従って δ_j が closed なので

$\alpha(x) \in \mathcal{D}(\delta_j)$ $j = 1, 2$。

同様の議論により　$\alpha(x)\in D(\delta_1^{m}\circ\delta_2^{n})$　$\forall m, \forall n\in\mathbb{N}$。

ゆえに、　$\alpha(x)\in A_\theta^\infty$　　（証終）

補題3、α は補題2と同様の自己同型とする。このとき、次の2つの条件は同値。

(1) $\exists n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ s.t. α^n は inner。

(2) $\exists R\in C(\mathbb{T})$ unitary element, $\exists n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

s.t. $[f(t)]^n=R(t)R(t+\theta)^{-1}$

for $\forall t\in\mathbb{R}$。

（証明）(1) $\Rightarrow$ (2)：α^n は inner だから、$\alpha^n=Ad(w)$。

ここで $w\in A_\theta$ は unitary element。一方 $\alpha(v)=v$。

よって、$vw=wv$。

ゆえに、$w\in C^*(v)$。

ここで $C^*(v)$ は v より生成される C^*-環で $C(\mathbb{T})$ と同型。

従って $\exists R\in C(\mathbb{T})$ unitary element s.t. $w=R(v)$。

更に $\alpha(u)=f(v)^n u$ だから、

$R(v)uR(v)^*=f(v)^n u$。

ゆえに、　$R(v)R(e^{2\pi i\theta}v)=f(v)^n$

すなわち、　$[f(t)]^n=R(t)R(t+\theta)^{-1}$ for $\forall t\in\mathbb{R}$。

(2) $\Rightarrow$ (1)：　$w=R(v)$ とすると、簡単な計算により、

$\alpha^n=Ad(w)$。

（証終）

補題4. A_θ の自己同型 α を　$\alpha(u)=e^{2\pi i g(v)}u$, $\alpha(v)=v$ とする。ここで g は $C(\mathbb{T})$ の selfadjoint element、すなわち $\mathbb{R}$ 上の周期1の実数値連続関数とする。もしも、
$\int_0^1 g(t)dt=0$ であり、かつ任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して、

$$g(t)=k(t)-k(t+\theta)$$

を満足するような $\mathbb{R}$ 上の周期1の実数値連続関数が存在しないならば、任意の $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ に対して、α^n は inner でない。

(証明) 上の補題の対偶を示す。補題3により、

$$\exists n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ \exists R\in C(\mathbb{T})\ \text{unitary element}$$

$$\text{s.t. } e^{2\pi i n g(t)}=R(t)R(t+\theta)^{-1}。$$

R は $C(\mathbb{T})$ の unitary element だから $|R(t)|=1$　$\forall t\in\mathbb{R}$。
このとき　$\exists k$　$\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数(周期1とは限らない)

$$\text{s.t. } R(t)=e^{2\pi i k(t)} \quad \forall t\in\mathbb{R}。$$

よって

$$e^{2\pi i n g(t)}=e^{2\pi i(k(t)-k(t+\theta))}$$

$$ng(t)=k(t)-k(t+\theta)+m(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

ここで m は $\mathbb{R}$ 上の整数値関数。g, k が連続だから、m も連続。よって m はある整数とみなせる。次に、
$R(t+1)=R(t)$ より、　$k(t+1)-k(t)=l(t)$。ここで l は整数値関数。k は連続だから、l も連続。

よって l も、ある整数とみなせる。 $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\hat{k}(t) = k(t) - lt$$

とかくと、

$$\begin{aligned}\hat{k}(t+1) &= k(t+1) - l(t+1)\\ &= k(t) - lt\\ &= \hat{k}(t)。\end{aligned}$$

よって、$\hat{k}$ は $\mathbb{R}$ 上の周期 1 の連続関数。

更に、$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned}\hat{k}(t) - \hat{k}(t+\theta) &= k(t) - lt - (k(t+\theta) - l(t+\theta))\\ &= k(t) - k(t+\theta) + l\theta\\ &= n g(t) - m + l\theta。\end{aligned}$$

$\int_0^1 g(t)\,dt = 0$ なので

$$\int_0^1 (\hat{k}(t) - \hat{k}(t+\theta))\,dt + m - l\theta = 0 。$$

$\hat{k}$ は周期 1 をもつので $\int_0^1 (\hat{k}(t) - \hat{k}(t+\theta))\,dt = 0$。

ゆえに、

$$m - l\theta = 0$$

すなわち $l = m = 0$。

従って、k は周期 1 をもつ $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数であり、

$$n g(t) = k(t) - k(t+\theta) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

を満足する。 (証終)

正の整数よりなる数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ を

$$n_1 = 1 \quad , \quad n_{j+1} = 2^{n_j} + n_j + 1$$

と定める。また、

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-n_j}$$

と定め、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{j} 2^{-n_j} \frac{1 - e^{2\pi i n_j \theta}}{|1 - e^{2\pi i n_j \theta}|} & n = n_j \\ \frac{1}{j} 2^{-n_j} \frac{1 - e^{-2\pi i n_j \theta}}{|1 - e^{-2\pi i n_j \theta}|} & n = -n_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定める。このとき任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して

$$|e^{2\pi i n_j \theta} - 1| < 2^{-n_j}$$

なので、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{|n| \to \infty} |n|^k |a_n| = 0$$

となる。従って

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t}$$

とおくと、

$$g \in C^{\infty}(\mathbb{T}) \text{ であり、} \int_0^1 g(t)\,dt = a_0 = 0$$

となる。

補題5. θ, gは上で定めたものとする。このとき任意の$t\in\mathbb{R}$に対して、

$$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$$

を満足する周期1の実数値連続関数kは存在しない。

(証明) 任意の$t\in\mathbb{R}$に対して、

$$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$$

を満足する周期1の実数値連続関数kが存在するとする。

kの Fourier series を $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i n t}$ とすると、

$g(t) = k(t) - k(t+\theta)$ より $a_n = (1-e^{2\pi i n\theta})b_n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

従って、 $b_n = \dfrac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}}$ $n\neq 0$。

よって $k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}} e^{2\pi i n t}$。

kは連続だから、kの Fourier series は Cesàro summable。

従って、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}}$ は Cesàro summable.

ところが$\{a_n\}$の定義より $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{a_n}{1-e^{2\pi i n\theta}}$ は Cesàro summable でないことがわかり、矛盾。 (証終)

定理6. θ, gは上で定めたものとする。A_θの自己同型αを $\alpha(u) = e^{2\pi i g(v)}u$, $\alpha(v) = v$ とおくと、αはA_θの微分同相であり、$\forall w\in A_\theta^\infty$ unitary element, $\forall R\in SL(2,\mathbb{Z})$, $\forall s,t\in\mathbb{R}$に対して

$$\alpha \neq Ad(w)\circ\alpha_R\circ\alpha_{(s,t)}$$

(証明) 補題2よりαは微分同相。

$\exists w \in A_\theta^\infty$ unitary element, $\exists h \in SL(2,\mathbb{Z})$, $\exists s,t \in \mathbb{R}$

s.t. $\alpha = Ad(w)\circ\alpha_h\circ\alpha_{(s,t)}$

と仮定する。このとき、$\alpha_* = Id$ on $K_1(A_\theta)$ 従って、

$Ker(Id-\alpha_*) = \mathbb{Z}[u]\oplus\mathbb{Z}[v]$。また、$\alpha(u)u^* = e^{2\pi i g(v)}$だから、

1と$e^{2\pi i g(v)}$とを結ぶ連続微分可能なpath ξを

$$\xi(r) = e^{2\pi i r g(v)} \qquad r\in[0,1]$$

と定めることができる。ゆえに、Pimsner [6; Theorem 3] により

$$\tau_*(K_0(A_\theta\times_\alpha\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta。$$

従って、補題1よりαはinner。一方 補題4よりαは innerではない。これは矛盾。 (証終)

References

[1] E.G. Effros and F. Hahn, Locally compact transformation groups and C^*-algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 75 (1967)

[2] G. A. Elliott, The diffeomorphism group of the irrational rotation C^*-algebra, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 8 (1986), 329–334

[3] H. Furstenberg, Strict ergodicity and transforms of the torus, Amer. J. Math., 83 (1961) 573–601.

[4] R. Mañé, Ergodic Theory and Differentiable Dynamics,

Springer-Verlag, 1987.
[5] G. K. Pedersen, C^*-Algebras and their Automorphism Groups, Academic Press, 1979.
[6] M. V. Pimsner, Ranges of traces on K_0 of reduced crossed products by free groups, Springer Lecture Notes in Math. No. 1132 (1983), 374-408.
[7] M. A. Rieffel, C^*-algebras associated with irrational rotations, Pacific J. Math. 93 (1981), 415-429.