数理解析研究所講究録
698巻 1989年 51-69

全空間における退化した準線形楕円型偏微分方程式に対する粘性解の存在と一意性

神戸商船大学　冨　田　義　人
(Yoshihito TOMITA)

１９８３年、M.G. Crandall と P.L. Lions は１階偏微分方程式に対して新しい解-粘性解(viscosity solution)-の概念を導入した([2])。すぐあとに、この概念の２階偏微分方程式への自然な拡張が Lions 自身によってなされ、stochastic control 問題に対する value function が対応した Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式の粘性解になっていることが示された([11])。更に最近になって、一般の２階楕円型偏微分方程式の粘性解を解析的な方法で取り扱った論文が現われてきた([1,4,7-10,12-15])。

本稿では、発展方程式における range condition に相当する方程式

$$u + H(Du) - \Delta u = f(x) \quad \text{in} \quad R^N$$

を少しばかり一般化した、退化した準線形楕円型方程式に対する粘性解の存在と一意性を考察する。目標は (i) $H=H(p)$, $f=f(x)$ の連続性、増大度と、粘性解の一意性が成立する関数のクラスとの関連を調べること.(ii)一意性の成立するクラスでの存在を示すこと．である。

なお、本稿の内容は、筆者が昨年から今年にかけて Wisconsin大学において M.G. Crandall, R. Newcomb 両教授と行った共同研究によるものであることを断っておく。

§1．粘性解の定義

全空間 R^N で退化した準線形楕円型偏微分方程式

$$(1.1) \qquad u + H(x,Du) - Pu = 0 \qquad \text{in} \quad R^N$$

を考える．ここで $Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_N})$, 線形微分作用素 P :

$$Pu = \sum_{i,j=1}^{N} p_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

は連続な係数 $p_{ij}(x)$ をもち，定数 $\Lambda \geq 0$ が存在して

$$(1.2) \quad (p_{ij}(x)) = (p_{ji}(x)), \quad 0 \leq \sum_{i,j=1}^{N} p_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \qquad (x,\xi \in R^N)$$

を満たすとする。関数 $H: R^N \times R^N \to R$ は連続と仮定したうえで，Hの p についての構造に関して次の３つの場合に分けて，それぞれに応じて粘性解の存在と一意性を調べることにしよう。

(H1) H は p について Lipschitz 連続である。すなわち、定数 $L > 0$ が存在して

$$|H(x,p) - H(x,q)| \le L|p-q| \qquad (x,p,q \in R^N)$$

が成立する。

(H2) H は p について一様連続である。すなわち、連続度 $m(\cdot)$ が存在して

$$|H(x,p) - H(x,q)| \le m(|p-q|) \qquad (x,p,q \in R^N)$$

が成立する。

(H3) H は $|p|$ の多項式のような挙動をする。すなわち、定数 $K > 0$ $m > 1$ が存在して

$$|H(x,p) - H(x,q)| \le K(|p|^{m-1} + |q|^{m-1} + 1)|p-q| \qquad (x,p,q \in R^N)$$

が成立する。

さて、「粘性解とは何か?」を述べよう。このために次の記号を導入する： Ω を R^N の開集合とし、$u: \Omega \to R$ とする。任意の $x \in \Omega$ に対して、$(p,A) \in R^N \times S^N$ が

$$u(y) \le u(x) + (p,y-x) + \frac{1}{2}(A(y-x),y-x) + o(|y-x|^2) \quad (y \to x)$$

を満たすとき、$(p,A) \in D^{2,+}u(x)$ であると定義し、また、

$$u(y) \ge u(x) + (p,y-x) + \frac{1}{2}(A(y-x),y-x) - o(|y-x|^2) \quad (y \to x)$$

が成り立つとき、$(p,A) \in D^{2,-}u(x)$ であると定義する。

最近の流行も考慮して、粘性解の定義を、(1.1) を含んだ fully nonlinear ２階楕円型方程式：

$$F(x,u,Du,D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1.3}$$

に対して与えておく。ここで $F: \Omega \times R \times R^N \times S^N \to R$ は楕円型、すなわち

$$F(x,r,p,A) \le F(x,r,p,B) \qquad \begin{pmatrix} x \in \Omega,\ r \in R,\ p \in R^N \\ A,B \in S^N,\ \underline{A \ge B} \end{pmatrix}$$

であるとする。ここで $A \geq B$ はすべての $y \in R^N$ に対して $(Ay,y) \geq (By,y)$ であることを表す。

定義1(粘性解の定義 [11])

(I) 関数 $u : \Omega \to R$ が

(i) u は Ω において上に半連続(以後 u.s.c. と書く)である.

(ii) 任意の $x \in \Omega$ と任意の $(p,A) \in D^{2,+}u(x)$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$F(x,u(x),p,A) \leq 0 .$$

を満たすとき、u は(1.3)の劣粘性解(viscosity subsolution)であるという。

(II) 関数 $u : \Omega \to R$ が

(i) u は Ω において下に半連続(以後 l.s.c.) である.

(ii) 任意の $x \in \Omega$ と任意の $(p,A) \in D^{2,-}u(x)$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$F(x,u(x),p,A) \geq 0.$$

を満たすとき、u は(1.3)の優粘性解(viscosity supersolution)であるという。

(III) 連続関数 u が(1.3)の劣且つ優粘性解であるとき、u は(1.3)の粘性解(viscosity solution)であるという。

本稿では定義1の意味での粘性解を採用するが、定義1と同値な次の定義もよく用いられる。

定義2(粘性解の定義)

(I) $u:\Omega \to R$ が次の(i),(ii)を満たすとき、(1.3)の劣粘性解という。

(i) u は Ω で u.s.c. である.

(ii) 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ と $u-\varphi$ の極大点 $x_0 \in \Omega$ に対して次式が成り立つ:

$$F(x_0,u(x_0),D\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)) \leq 0.$$

(II) $u:\Omega \to R$ が次の(i),(ii)を満たすとき、(1.3)の優粘性解という。

(i) u は Ω で l.s.c. である.

(ii) 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ と $u-\varphi$ の極小点 $x_0 \in \Omega$ に対して次式が成り立つ:

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0.$$

$u \in C^2(\Omega)$ が(1.3)の古典的な意味での解ならば、u は(1.3)の粘性解であることは容易にわかる。

次節で考える我々の一意性問題とは次のように粗くいえる: P の係数 $p_{ij}(x)$ と $H = H(x,p)$ が x について適当な (technicalな) 条件が満たされているとする(§2で詳しく述べる)。u を(1.1)の劣粘性解, v を(1.1)の優粘性解であると仮定するとき、比較定理(R^N の各点 x で $u(x) \leq v(x)$ が成り立つ)を保障するための、$(u-v)(x)$ の $|x| \to \infty$ のときの増大度を(H1),(H2),(H3)の３つの場合に応じて(殆どbestに)決定させること。

なお、増大度が高々1の連続関数のクラスでの非有界な粘性解の一意性については 相沢-冨田[1],石井[7] の研究がある。

石井-Lions の結果

有界領域での fully nonlinear 楕円型偏微分方程式 (1.3) に対する比較定理については、石井仁司、P.L. Lions 両氏によるすばらしい結果がある。この結果は本稿においても基本的な役割を果たすので述べておく。

Ω は有界領域とし、(1.3) の F には次の仮定をおく:

(F1) 任意の $R < \infty$ に対して、$\gamma_R > 0$ が存在して

$$F(x,t,p,A) \geq F(x,s,p,A) + \gamma_R(t-s)$$

$$(x\in\Omega, -R\leq s\leq t\leq R, p\in R^N, A\in S^N).$$

任意の $0 < R < \infty$ に対して連続度 $\omega_R(\cdot):R^+ \to R^+$ が存在して

(F2) $$|F(x,t,p,A)-F(y,t,p,A)| \leq \omega_R(|x-y|(1+|p|))$$

$$(x,y\in\Omega, |t|\leq R, p\in R^N, A\in S^N),$$

又は

(F2)' $|F(x,t,p,A)-F(y,t,p,A)| \le \omega_R(|x-y|)$

$$(x,y\in\Omega, |t|\le R, |p|\le R, A\in S^N)$$

が成り立つ。

定理 0 (Ishii-Lions [8])
(F1) を仮定する。u を(1.3)の劣粘性解，v を(1.3)の優粘性解とし、次の(i)又は(ii)が成り立っているとする:
(i) F は (F2) を満たす;
(ii) F は (F2)' を満たし、u, v のうち少なくとも一方が Ω において局所Lipschitz連続である.

このとき

$$u(x)-v(x) \le \sup_{x\in\partial\Omega} (u^*(x)-v_*(x))^+ \qquad (x \in \Omega)$$

が成立する。ここで

$$u^*(x) = \limsup_{y\to x, y\in\Omega} u(y) \qquad (u \text{ の u.s.c. envelope という}),$$

$$v_*(x) = \liminf_{y\to x, y\in\Omega} v(y) \qquad (v \text{ の l.s.c. envelope という}).$$

§2. 一意性

方程式 (1.1) に対する粘性解の一意性を次の technical な仮定のもとで考える。

$(TC1)_\theta$ $S(x) = (s_{ij}(x))$ は $S(x)^2 = P(x) = (p_{ij}(x))$ を満たす非負行列で，指数 θ の局所Hölder連続である。

(TC2) 任意の $0<R<\infty$ に対して，連続度 $\omega_R(\cdot)$ が存在して

$$|H(x,p)-H(y,p)| \le \omega_R(|x-y|(1+|p|)) \qquad ((x,y,p)\in B_R\times B_R\times R^N)$$

を満たす。ここで $B_R = \{ x \in R^N ; |x| \le R \}$.

$H = H(x,p)$ に対する条件 (H1) のもとでは、次式で定義される２つの定数 a, b を用意する:

(2.1) $$a \equiv \frac{-L+(L^2+4\Lambda)^{1/2}}{2\Lambda}, \qquad b \equiv \frac{\Lambda(N-1)a}{L+2a\Lambda}.$$

定理 1

(H1) を仮定する。u を(1.1)の劣粘性解，v を(1.1)の優粘性解とし、

(2.2) $$\varlimsup_{|x|\to\infty} (u(x)-v(x))^{+} e^{-a|x|}|x|^{b} = 0$$

が成り立つとする。このとき

(i) $(TC1)_{\theta=1}$ と (TC2) のもとで

(2.3) $$u \leq v \quad \text{in} \quad R^N$$

が成立する。

(ii) u, v のうち一方が局所Lipschitz連続であって、$(TC1)_\theta$ $(\theta>\frac{1}{2})$ が成り立つならば、(2.3) が成立する。

定理 2

(H2) を仮定する。u を(1.1)の劣粘性解，v を(1.1)の優粘性解とし、

(2.4) $$\varlimsup_{|x|\to\infty} (u(x)-v(x))^{+} e^{-c|x|} = 0 \quad (\text{すべての } c>0 \text{ に対して})$$

が成り立つとする。このとき

(i) $(TC1)_{\theta=1}$ と (TC2) のもとで、(2.3) が成立する。

(ii) u,v のうち一方が局所Lipschitz連続であって，$(TC1)_\theta$ $(\theta>\frac{1}{2})$ が成り立つならば、(2.3) が成立する。

定理 3

(H3) と $(TC1)_\theta$ $(\theta>\frac{1}{2})$ を仮定する。u を (1.1) の劣粘性解，v を局所Lipschitz連続な (1.1) の優粘性解とし

(2.5) $$\lim_{R\to\infty} \operatorname*{ess-sup}_{|x|\geq R} \left(|Dv(x)|+(u(x)-v(x))^{+}|x|^{-1}\right)|x|^{-\frac{1}{m-1}} = 0$$

が成り立つならば、(2.3) が成立する(u が局所Lipschitz連続であって，Dv を Du とおいた (2.5) が成り立つならば、やはり (2.3) が成立する)。

注意 粗く言って、上記の定理1－3は次のことを意味する。

(i) (H1) のもとでは、$o(e^{a|x|}|x|^{-b})$ $(|x|\to\infty)$ のクラスで粘性解は一意的である。

(ii) (H2) のもとでは、多項式のクラスで粘性解は一意的である。

(iii) (H3) のもとでは、$o(|x|^{m^*})$ のクラスで粘性解は一意的である。ただし $m^* = m/(m-1)$.

さて証明であるが、定理1－3の証明の方針はみな同じである。すなわち、任意の $R>0$ に対して次の(2.6),(2.7)を満たす R^N で定義された関数 $z_R(x)$ を構成する:

(2.6) $v+z_R$ は R^N 上において (1.1) の優粘性解で、且つ、

$$u \le v + z_R \qquad \text{on} \quad \partial B_R .$$

(2.7) 任意の $x \in R^N$ を固定するとき、$\lim_{R\to\infty} z_R(x) = 0$ が成り立つ.

このとき、(2.6) と Ishii-Lions の結果(定理 0)により

$$u(x) \le v(x) + z_R(x) \qquad (x \in B_R).$$

そこで (2.7) を使うと (2.3) が得られる。

<u>定理1の証明</u>　先ず $w \in C^2(R^N)$ と仮定して、$v+w$ が(1.1)の優粘性解となる十分条件を求めよう。

$(p,A) \in D^{2,-}(v+w)(x)$ とすると、$w \in C^2(R^N)$ であるから

$$p = p_0 + Dw(x),\ A = A_0 + D^2w(x)$$

と書ける。ただし $(p_0,A_0) \in D^{2,-}v(x)$. 更に w が convex とすると $D^2w(x) \ge 0$ となる。仮定より $\Lambda I-P(x) \ge 0$ であるから

$$\mathrm{Tr}\left[(\Lambda I-P(x))(D^2w(x))\right] \ge 0.$$

従って

$$\Lambda\Delta w(x) \ge (Pw)(x).$$

今後

$$F(x,r,p,A) \equiv r + H(x,p) - \sum_{i,j=1}^{N} p_{ij}(x)a_{ij}$$
$$= r + H(x,p) - \mathrm{Tr}(P(x)A)$$

（ただし $A = (a_{ij})$）と書くことにする。このとき、(H1) を使うと

$$F(x,v(x)+w(x),p,A)$$
$$\geq F(x,v(x),p_0,A_0) + w(x) - L|Dw(x)| - \Lambda\Delta w(x)$$

が得られるので、結局、$w(x)$ が convex で

(2.8) $\qquad w(x) - L|Dw(x)| - \Lambda\Delta w(x) \geq 0 \qquad \text{in } R^N$

を満たすとき、$v+w$ が (1.1) の優粘性解となる。そこで、増大度が最も大きい (2.8) の radial な解を見つけよう。$w(x) = G(|x|)$ とおいて、G が単調増加とすると (2.8) は

(2.9) $\qquad G(r) - (L + \frac{\Lambda(N-1)}{r})G'(r) - \Lambda G''(r) \geq 0$

となる。$r = \infty$ の近傍において

$$G(r) = \frac{e^{ar}}{r^b}(1 + \frac{1}{\log r})$$

が (2.9) の解であることが計算で確かめられるので、この $G(r)$ を $[0,\infty)$ まで $G'(0) = 0$ 且つ convex の性質を保たせて延長する。こうして得られる $G(r)$ は (2.9) を満たすかどうか不明であるが、十分に大きい正の定数 C を加えた $G(r)+C$ が (2.9) の解となるようにできる（方程式の特徴より）。$G(r)+C$ を改めて $G(r)$ と書くことにすれば

$w(x)=G(|x|)$ は (2.9) の正, convex, radial な解

となっている。

次に

$$\alpha(R) \equiv \sup_{|x|=R} (u(x) - v(x))^+$$
$$z_R(x) \equiv \frac{\alpha(R)}{G(R)} G(|x|)$$

とおくとき、$v+z_R$, z_R はそれぞれ(2.6),(2.7)を満たすので定理 1 の証明はおわる。

<u>定理２の証明</u>　仮定 (H2) から、任意の $\varepsilon>0$ に対して定数 $L_\varepsilon>0$ が存在して

$$|H(x,p) - H(x,q)| \leq L_\varepsilon|p-q| + \varepsilon \qquad (x,p,q \in R^N)$$

が成り立つ。定理1の証明と同様に進めると次のことがわかる：もし $w_\varepsilon(x)$ が R^N で convex で、且つ

$$w_\varepsilon(x) - L_\varepsilon|Dw_\varepsilon(x)| - \Lambda\Delta w_\varepsilon(x) \geq 0 \qquad \text{in} \quad R^N$$

を満たすならば、$v+w_\varepsilon+\varepsilon$ は R^N において (1.1) の優粘性解となる。

L を L_ε でおきかえた (2.9) の正, convex, radial な解を $G_\varepsilon(r)$ とし、$w_\varepsilon(x) \equiv G_\varepsilon(|x|)$ とおく。さらに

$$z_R^\varepsilon(x) \equiv \frac{\alpha(R)}{G_\varepsilon(R)} G_\varepsilon(|x|) + \varepsilon$$

とおくと、$v+z_R^\varepsilon$, z_R^ε は (2.6) と (2.7) を満たすので任意の $x\in R^N$ を固定し $R\to\infty$ とすれば $u(x)\leq v(x)+\varepsilon$ が成り立ち、ε の任意性を考え合わせると (2.3) が得られる。

<u>定理3の証明</u>　仮定 (2.5) から任意の $\varepsilon>0$ に対して定数 $C_\varepsilon>0$ が存在して

$$|Dv(x)| \leq \varepsilon|x|^{m^*-1} + C_\varepsilon \qquad \text{a.e. in} \quad R^N$$

(ただし $m^* = m/(m-1)$) が成り立つ。だから

$$(p_0, A_0) \in D^{2,-}v(x) \Longrightarrow |p_0| \leq \varepsilon|x|^{m^*-1} + C_\varepsilon.$$

定理1の証明と同様に、$w \in C^2(R^N)$, $(p,A) \in D^{2,-}(v+w)(x)$ と仮定すると

$$\begin{aligned}
&F(x, v(x)+w(x), p, A)\\
&\geq w - K\left(|p_0+Dw(x)|^{m-1} + |p_0|^{m-1} + 1\right)|Dw(x)| - \Lambda\Delta w(x)\\
&\geq w - K\left((C_m+1)|p_0|^{m-1} + C_m|Dw|^{m-1} + 1\right)|Dw(x)| - \Lambda\Delta w
\end{aligned}$$

ここで $|p_0+Dw|^{m-1} \leq C_m(|p_0|^{m-1} + |Dw|^{m-1})$. Hölder の不等式より、$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば

$$\begin{aligned}
K(C_m+1)|p_0|^{m-1} &\leq K(C_m+1)C_m\left(\varepsilon^{m-1}|x| + C_\varepsilon^{m-1}\right)\\
&\leq \nu|x| + C - K
\end{aligned}$$

とできる。ここで $C=C(\varepsilon)>0$ は定数で $\nu>0$ は $\nu m^*<1$ を満たす定数である。従って $w(x)$ が convex で

$$(2.10)\qquad w(x) - \left(\nu|x|+KC_m|Dw|^{m-1}+C\right)|Dw| - \Lambda\Delta w \geq 0$$

を満たすように選べれば、$v+w$ が (1.1) の優粘性解となる。ところで $G(r) = \alpha r^{m^*}$ ($r=|x|=\infty$ の近傍において) の形の(2.10)の convex な C^2-解を見つけることができる。なぜならば、

$$\alpha r^{m^*}\left(1 - \nu m^* - KC_m(m^*)^m\alpha^{m-1} - \frac{Cm^*}{r} - \frac{\Lambda((N-1)m^*+m^*(m^*-1))}{r^2}\right) \geq 0$$

となればよいが、定数 $\alpha>0$ を

$$KC_m(m^*)^m\alpha^{m-1} < 1 - \nu m^*$$

を満たすように小さくとればよい。次に $G(r)$ を $[0,\infty)$ まで convex, $G'(0) = 0$ となるように拡張し、(2.10) が成り立つように十分大きい定数を加えると、$w(x) = G(|x|)$ が radial で且つ (2.10) を満たす。前と同じく

$$z_R(x) = \frac{\alpha(R)}{G(R)}\, G(|x|)$$

とおくと $v+z_R$, z_R はそれぞれ (2.6), (2.7) を満たすので定理３の証明はおわる。

注意 仮定 (H3) のもとでは次の例が示すように、一意性が成立するクラスは $o(|x|^{m^*})$ であることが殆どギリギリといえる([1])。

$$H(p)=\begin{cases} -\left|\dfrac{p}{m^*}\right|^m + m^*(m^*-1)\left|\dfrac{p}{m^*}\right|^{\frac{m^*-2}{m^*-1}} + \dfrac{(N-1)|p|}{\left|\dfrac{p}{m^*}\right|^{m-1} - \dfrac{m^*-2}{m^*-1}} & \text{if } |p| \geq m^* \\[2ex] -\dfrac{|p|^2}{2m^*(m^*-1)} + Nm^*(m^*-1) - \dfrac{m^*-1}{2(m^*-1)} & \text{if } |p| < m^* \end{cases}$$

であるとするとき、

$$u_1(x) = \begin{cases} \left(|x| + \dfrac{m^* - 2}{m^* - 1}\right)^{m^*} & \text{if } |x| \geq \dfrac{1}{m^* - 1} \\ \dfrac{m^*(m^* - 1)}{2}|x|^2 + \dfrac{m^* - 2}{2(m^* - 1)} & \text{if } |x| < \dfrac{1}{m^* - 1} \end{cases}$$

および

$$u_2(x) = -Nm^*(m^* - 1) + \frac{m^* - 2}{2(m^* - 1)}$$

はともに

$$u + H(Du) - \Delta u = 0 \qquad \text{in } R^N$$

の C^2-解で且つ $O(|x|^{m^*})$ のクラスに属している。

さらに、仮定 (H1) のもとでは、$o(e^{a|x|}|x|^b)$ のクラスが一意性を保障させるギリギリのクラスであることも次の例からわかる:

(2.11) $$u - L|u'| - \Lambda u'' = 0 \qquad \text{in } R^1$$

を考える。このとき (2.1) で定義される a, b (b=0) として

$$u_1(x) = e^{ax}, \quad u_2(x) \equiv 0$$

がともに (2.11) の解になっていることより $O(e^{a|x|}|x|^{-b})$ では一意性は成り立たない。

定理１－３の系 (1.1) の代わりに次の方程式を考えてみよう:

$$Q[u] \equiv u + H(x,Du) - Pu = f(x) \quad \text{in } R^N$$

ここで f(x) は連続関数である。u, v がそれぞれ $Q[u] \leq f(x)$, $Q[v] \geq g(x)$ の粘性解で且つ、定理１－３に応じて増大条件 (2.2),(2.4),(2.5) のうち一つを満たしているとき

$$u(x) - v(x) \leq \sup\{f(x) - g(x);\ x \in R^N\} \qquad (x \in R^N)$$

が満たされる。

§3．存在

この節では (1.1) の粘性解の存在を調べる。これについても一意性のときと同様に、$H = H(x,p)$ に対する仮定 (H1) - (H3) に応じて状況は異なってくる。(H2) の場合から始めよう。

定理4

(H2), $(TC1)_{\theta=1}$, (TC2) を仮定する。もし定数 $C > 0$, $\mu > 0$ が存在して

$$(3.1) \qquad |H(x,0)| \le C(|x|^{\mu} + 1) \qquad (x \in R^N)$$

が成り立つならば、(1.1) の粘性解が存在する。さらに粘性解は

$$\mathcal{F} = \{v \in C(R^N)\ ;\ |v(x)| \le \text{const.}(|x|^{\mu} + 1) \text{ on } R^N\}$$

において一意的である。

<u>証明</u>　Perron の方法による。(1階の方程式に対する粘性解の存在証明のために石井氏は Perron の方法を開発されたが、これについては [6] を参照されたい。) 先ず

$$(**) \quad \left[\begin{array}{l} (1.1) \text{ の優粘性解 } \overline{u},\ \text{劣粘性解 } \underline{u}\ (\underline{u}, \overline{u} \in C(R^N)) \text{ が} \\ \text{存在して且つ、} \overline{u} - \underline{u} \text{ が定理2の仮定を満たす。} \\ \text{i.e.,} \quad \varlimsup_{|x|\to\infty} (\overline{u}(x) - \underline{u}(x))^{+} e^{-c|x|} = 0 \quad (\forall c>0) \end{array}\right]$$

を示せたとしょう。このとき、

$$\mathcal{B} = \{\ v(x)\ ;\ v \text{ は } (1.1) \text{ の劣粘性解}, \underline{u} \le v \le \overline{u} \text{ on } R^N\ \},$$

$$u(x) \equiv \sup\{\ v(x)\ ;\ v \in \mathcal{B}\ \}$$

とおくとき、

$$u^{*}(x) = \varlimsup_{y\to x} u(y) \text{ は u.s.c., 且つ } (1.1) \text{ の劣粘性解}$$

であるので、$u^{*} \in \mathcal{B}$ である。従って u の定義式より $u^{*}(x) \le u(x)$ となる。$u(x) \le u^{*}(x)$ は明らかだから $u^{*} = u$. また、

$$u_{*}(x) = \varliminf_{y\to x} u(y)$$

が (1.1) の優粘性解であることを [6] と同様にして示せる。
明らかに成り立つ次の不等式：

$$\underline{u} \le u_{*} \le u, \quad u - u_{*} \le \overline{u} - \underline{u} \quad \text{on } R^N$$

に注意すれば、定理２を適用することができて、$u \leq u_*$ が得られ $u = u_*$ となり結局、$u \in C(R^N)$ は (1.1) の粘性解であることが示される。(**) を示そう。仮定 (H2) のもとでは、適当に定数 $L > 0$ を選んでやれば

$$|H(x,p) - H(x,0)| \leq L|p| + 1 \qquad (x,p \in R^N)$$

とできる。もし $u(x)$ が convex で且つ

$$\bar{u} - L|D\bar{u}| - \Lambda\Delta\bar{u} \geq C(|x|^{\mu} + 1) + 1 \quad \text{on} \quad R^N \tag{3.2}$$

を満たすならば、$\bar{u}$ は

$$\bar{u}(x) + H(x,D\bar{u}(x)) - (P\bar{u})(x) \geq 0 \quad \text{in} \quad R^N \tag{3.3}$$

を満たす。$\bar{u}(x) = (C+1)|x|^{\mu}$ は遠方で (3.2) を満たすので、いつものように convex の性質を保たせて全空間に拡張し、十分大きい定数を加えて $\bar{u}$ が convex, 且つ

$$0 \leq \bar{u}(x) \leq C_1(|x|^{\mu} + 1)$$

を満たす (3.3) の解 $\bar{u}(x)$ を構成することができる(ただし C_1 は定数)。次に 同様の方針により、concave で且つ

$$0 \geq \underline{u}(x) \geq - C_1(|x|^{\mu} + 1);$$

$$\underline{u} - H(x,D\underline{u}) - P\underline{u} \leq 0 \qquad \text{in} \quad R^N$$

を満たす関数 $\underline{u}$ が構成できる。従って (**) を示すことができたので定理４の証明はおわる。

注意 $H = H(x,p)$ が仮定 (H1) を満たしているとき、明らかに (H2) を満たすので、定理４は (H1) のもとでも成立する。実は、(H1) のもとではもう少し良い結果が得られる。(3.1) は

$$|H(x,0)| \leq C \frac{e^{a|x|}}{|x|^{b+\delta+1}} \qquad (|x| \geq 1) \tag{3.4}$$

(ただし $C>0$ は定数)に緩めることができる。ここで a, b は (2.1) で与えられた定数、δ は任意の正の定数である。実際、(H1)のもとでは

$$|H(x,p) - H(x,0)| \leq L|p| \qquad (x,p \in R^N) \tag{3.5}$$

が成立するので、(1.1) の C^2-subsolution $\underline{u}$, C^2-supersolution $\overline{u}$ を次の手順をふめば構成することができる:(3.4),(3.5) より $G(r)$ が

$$(3.6)\qquad G(r) - \left[L + \frac{(N-1)\Lambda}{r}\right]G'(r) - \Lambda G''(r) - C\frac{e^{ar}}{r^{b+\delta+1}} > 0$$

を満たすならば、$\overline{u}(x) = G(|x|)$ は supersolution となるが、いつものように $r=\infty$ の近傍で (3.6) を解けば十分である。いま、

$$G(r) \equiv e^{ar}r^{-(b+(\delta/2))}$$

とおいて、この $G(r)$ を (3.6) の左辺に代入すると十分大きな $r>0$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$\frac{e^{ar}}{r^{b+(\delta/2)+1}}\left[(L+2a\Lambda)\frac{\delta}{2} - \frac{\hat{C}}{r} - \frac{C}{r^{\delta/2}}\right] > 0,$$

ここで

$$\hat{C} = \Lambda(b + \frac{\delta}{2})(b + \frac{\delta}{2} + 2 - N).$$

最後に仮定 (H3) のもとでの存在問題を考える。こんどの場合は今までの場合と様子が異なる。なぜならば、(H3) のもとでの比較定理（定理３）においては u 又は v の少なくとも一方に regularity と導関数に対する仮定 (2.5) を課していたが、今のところ regularity が不明なので定理４のようにPerronの方法を直接使うことができない。以下で述べる存在定理の証明から得られる粘性解は滑らかさは得られなくても一意であることが示されるので少しはおもしろいと思う。

しかしながら、(1.1) より後退した形である次の方程式を考えることにする。

$$(1.1)'\qquad u + H(Du) - Pu = f(x) \qquad \text{in} \quad R^N,$$

ここで P は定数係数の楕円型作用素である。

定理５

$H = H(p)$ は (H3) を満たし、P は定数係数とする。$1 \le \mu < m^*$ と定数 c_0 が存在して

$$(3.7)\qquad |f(x) - f(y)| \le c_0R^{\mu-1}|x-y| \qquad (x,y \in B_R)$$

(ただし $R \geq 1$) が成り立つとする。このとき、(1.1)' は $O(|x|^{\mu})$ のクラスで一意的な粘性解をもつ。

証明　T_n を R^N から半径 n の球 B_n への radial な射影とする。すなわち

$$T_n x = \begin{cases} x & \text{if} \quad |x| \leq n \\ nx/|x| & \text{if} \quad |x| \geq n. \end{cases}$$

方程式 (1.1)' を次の方程式:

$$U + H(T_m DU) - PU = f(T_n x) \quad \text{in} \quad R^N \tag{3.8}$$

(ここで $m, n > 0$ は定数)で近似する。(3.8) は有界な粘性解 U を一意的にもつ([12])。任意の $y \in R^N$ に対して $U(\cdot+y)$ が $f(T_n(\cdot+y))$ とした(3.8)の粘性解であることと定理1－3の系および(3.7)により

$$\begin{aligned} |U(x+y) - U(x)| &\leq \sup_{x \in R^N} |f(T_n(x+y)) - f(T_n x)| \\ &\leq c_0 n^{\mu-1}|y| \end{aligned} \tag{3.9}$$

が得られるので、U は Lipschitz 連続で且つ

$$\|DU\|_\infty \leq c_0 n^{\mu-1}$$

を満たす。

だから m が十分大きいならば $u_n = U$ は

$$u_n + H(Du_n) - Pu_n = f(T_n x)$$

の粘性解となっている。$\{u_n\}$ が局所一様にある連続関数 u に収束することを示そう。(1.1)'のsubsolution, supersolutionを $(1+|x|^2)^{\mu/2}$ の定数倍したもので見つけられるので、ある定数 c (n に依存しない) が存在して

$$|u_n(x)| \leq \frac{c}{2}|x|^{\mu} \qquad (|x| \geq 1) \tag{3.10}$$

が成立する。(3.9) から

$$(p, A) \in D^{2,-}u_n(x) \Longrightarrow |p| \leq c_0 n^{\mu-1} \tag{3.11}$$

と仮定してよい。もし z が convex で且つ

$$z - \left(KC_m|Dz|^{m-1} + K(C_m+1)(c_0 n^{\mu-1})^{m-1} + K\right)|Dz| - \Lambda\Delta z \geq 0 \quad \text{on } B_n \tag{3.12}$$

を満たすならば、u_n+z は B_n 上で (1.1)' の優粘性解となる。

いま、定数 γ を

$$\gamma > \frac{m^*\mu}{m^*-\mu} \tag{3.13}$$

を満たすように選んで、次の関数

$$z_n(x) \equiv cn^{\mu-\gamma}(n^{2\mu/m^*}+|x|^2)^{\gamma/2} \tag{3.14}$$

を考える。明らかに z_n は convex で且つ連続である。さらに (3.10) より

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leq z_n(x) \qquad (x \in \partial B_n \ ;\ k,n > 0).$$

次のことを示そう:

(#)　n が十分大きいとき、z_n は (3.12) を満たす.

この (#) がいえれば、球 B_n 上での比較定理から $n \leq k$ に対して

$$u_k(x) - u_n(x) \leq z_n(x) \qquad (x \in B_n).$$

なぜならば、$n \leq k$ のとき、B_n 上では u_n, u_k に対する方程式は同じであるから。同様に下からの不等式も得られるので、結局

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leq z_n(x) \quad \text{in } B_n \quad (n \leq k) \tag{3.15}$$

を得たこととなる。(3.13) が $\mu - \gamma + \mu\gamma/m^* < 0$ を意味するので

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = 0$$

が R^N の有界集合上で一様収束の意味で成り立つ。だから $\{u_n\}$ は局所一様にある連続関数 u に収束するが、粘性解の理論ではよく知られたことより([11])、u は (1.1)' の粘性解となる。

(#) を示そう。$z_n(r) = z_n(|x|)$ とおくとき、

$$z_n'(r) = c\gamma n^{\mu-\gamma} r(n^{2\mu/m^*}+r^2)^{(\gamma/2)-1} \tag{3.16}$$

$$z_n''(r) = c\gamma n^{\mu-\gamma}(n^{2\mu/m^*}+r^2)^{(\gamma/2)-2}\psi(r) \tag{3.17}$$

ここで

$$\psi(r) \equiv (\gamma - 1)r^2 + n^{2\mu/m^*}.$$

従って $z_n(r)$ は convex で且つ 単調増加となり $z_n(x)$ は convex で

あることがわかる。以後 C は定数を表すとする。$2\mu/m^* < 2$ に注意すれば

$$n^{2\mu/m^*} + r^2 < Cn^2 \qquad (r \leq n)$$

であるから (3.16) より

(3.18) $$|Dz_n| \leq Ccn^{\mu-1} \qquad \text{on} \quad B_n .$$

よって 球 B_n 上で

(3.19) $$K\left(C_m|Dz_n|^{m-1}+(C_m+1)c_0^{m-1}n^{(\mu-1)(m-1)}+1\right) \leq Cn^{(\mu-1)(m-1)}$$

が成り立つ。また (3.16),(3.17) より

$$\Delta z_n \leq Ccn^{\mu-\gamma}\left(n^{2\mu/m^*}+ r^2\right)^{(\gamma/2)-1} \qquad \text{on} \quad B_n$$

となる。そこで

(3.20) $$\rho \equiv n^{2\mu/m^*}+ |x|^2$$

とおくとき、B_n 上で

$$z_n - K\left(C_m|Dz_n|^{m-1}+(C_m+1)(c_0n^{\mu-1})^{m-1}+1\right)|Dz_n| - \Lambda\Delta z_n$$
$$\geq cn^{\mu-\gamma}\rho^{(\gamma-2)/2}\left(\rho - Cn^{(\mu-1)(m-1)}\rho^{1/2} - \Lambda C\right)$$

が成り立つ。ところで十分大きい n に対しては

(3.21) $$\rho - Cn^{(\mu-1)(m-1)}\rho^{1/2} - \Lambda C > 0$$

が成り立つことを注意する。なぜならば、2次方程式

$$t^2 - Cn^{(\mu-1)(m-1)}t - \Lambda C = 0$$

の大きい方の解を t_0 とすると $\rho^{1/2} > t_0$ ならば (3.21) が得られるが、t_0 を解いて評価すれば

$$t_0 < Cn^{(\mu-1)(m-1)}$$

であることが容易にわかるのと、ρ の定義式 (3.20) より

$$\rho^{1/2} > n^{\mu/m^*} \qquad (|x| \leq n)$$

に注意し、更に

$$(\mu-1)(m-1) < \mu/m^*$$

であることより、n が十分大きいときは B_n 上で(3.21)が成り立つ。

次に一意性の証明であるが、これについては再び上の議論をすれば

よい。v を (1.1)' の任意の粘性解とする。このとき、v は B_n 上では u と同じ方程式を満たすので u_k-u_n に対して得られた不等式が $v-u_n$ に対して成り立つ。だから v は $\{u_n\}$ の局所一様収束の極限とみなされるので、一意性が得られたことになる。

参考文献

[1] S. Aizawa and Y. Tomita, On unbounded viscosity solutions of a semilinear second order elliptic equation, Funkcial. Ekvac., 31(1988), 147-160.

[2] M.G. Crandall and P.L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc.,277 (1983), 1-42.

[3] M.G. Crandall and P.L. Lions, Remarks on the existence and uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Illinois J. Math., 31(1987), 655-688.

[4] M.G. Crandall, R. Newcomb and Y. Tomita, Existence and uniqueness of viscosity solutions of degenerate quasilinear elliptic equations in R^N,(to appear).

[5] H. Ishii, Uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Indiana Univ. Math. J., 33 (1984), 721-748.

[6] H. Ishii, Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, Duke Math. J., 55(1987), 369-384.

[7] H. Ishii, On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second order elliptic PDE's,(to appear).

[8] H. Ishii and P.L. Lions, Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations,(to appear).

[9] R. Jensen, The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations, Arch. Rat. Mech. Anal.,(1988), 1-27.

[10] R. Jensen, P.L. Lions and P.E. Souganidis, A uniqueness

result for viscosity solutions of second-order fully nonlinear partial differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 102(1988), 975-978.

[11] P.L. Lions, Optimal control of diffusion processes with Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part II: viscosity solution and uniqueness, Comm. in Partial Differential Equations, 8(1983), 1229-1276.

[12] Y. Tomita, Uniqueness and existence of bounded viscosity solutions of second-order nonlinear elliptic equations, Rev. Kobe Univ. of Mer. Mar.,Part II, 33(1985), 115-119.

[13] N.S. Trudinger, On regularity and existence of viscosity solutions of nonlinear second order elliptic equations, (to appear).

[14] N.S. Trudinger, Comparison principles and pointwise estimates for viscosity solutions of second order, (to appear).

[15] N. Yamada, The Hamilton-Jacobi-Bellman equation with a gradient constraint, J. Diff. Eq.,71(1988), 185-199.