

半線型高階放物型方程式の大域解について

早大 理工 星野 弘喜 (Hiroki Hoshino)

早大 理工 山田 義雄 (Yoshio Yamada)

§0. 序  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の有界領域とし, 境界  $\partial\Omega$  は滑らかとする.

$$L = L(x, D) = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) D^\mu$$

を  $\Omega$  で定義された  $2m$  階楕円型作用素とし,

$$B_j = B_j(x, D) = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

を  $\partial\Omega$  で定義された  $m_j$  階微分作用素とする. 但し  $m_j < 2m$ .

次の半線型放物型初期値 - 境界値問題の大域解の存在を  $L^p(\Omega)$  で考える:

$$(P) \begin{cases} u_t + Lu = f(D^{\alpha_1} u, D^{\alpha_2} u, \dots, D^{\alpha_N} u), & x \in \Omega, t > 0 \\ B_j u = 0, & j = 1, 2, \dots, m, \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(\cdot, 0) = \phi & x \in \Omega \end{cases}$$

作用素  $A$  を

$$D(A) = \{u \in W^{2m, p}(\Omega) : B_j u = 0 \text{ on } \partial\Omega, j = 1, 2, \dots, m\}$$

$$Au = Lu \quad \text{for all } u \in D(A)$$

と定義する. (P) を次の様に書き直す:

$$(P') \quad \begin{cases} u_t + Au = f(u), & t > 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

但し (P) の右辺を  $f(u)$  と略記し、以下もそのようにする。  $e^{-tA}$  が解析的半群になる場合を考える。

$L^p(\Omega)$  における放物型初期-境界値問題の大域解の存在は Friedman [1], Henry [3], Ito [4], Kielhöfer [5], Rothe [8] 等で研究されている。Rothe [8] は 2 階で  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  の場合に限り議論している。ここで  $\operatorname{Re} \sigma(A)$  は  $A$  のスペクトルの実部を意味する。Henry [3], Ito [4], Kielhöfer [5] は  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  に制限しないで“安定多様体”を構成している。すなわち (P') の定常解の安定性を論じている。

$\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  のとき  $\phi \in D(A^\theta)$  とし (但し,  $\theta \geq 0$ ),  $f$  は  $\nu > 1$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $v, w \in D(A^\alpha)$  に対して

$$\|f(v) - f(w)\|_p \leq \operatorname{const.} (\|A^\alpha v\|_p + \|A^\alpha w\|_p)^{\nu-1} \|A^\alpha v - A^\alpha w\|_p$$

$$f(0) = 0$$

を満たすとする。Henry [3], Kielhöfer [5] 等は  $\alpha \leq \theta$  の場合の一般論を確立している。ここでは  $0 \leq \theta \leq \alpha$  の場合の (P') の大域解の存在, 自明解の安定性について考察する。我々は Kielhöfer [5] と比較して  $\alpha$  のとり得る範囲を広げることができ,  $\alpha$  のとり方に対して  $\nu$  の依存性を明らかにすることができた。詳しくは §1 で述べる。Ito [4] は  $\alpha=0$  であるが  $\operatorname{Re} \sigma(A) \ni 0$  の場

合も含めて安定性を論じている。我々は解の  $L^p$ -ノルムの exponential decay を出す為に  $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$  とする。

§1 では仮定と結果 —  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  のときの局所解, 大域解の存在,  $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$  のときの安定多様体の構成 — を述べる。  
 §2 ではいくつかの補題を準備する。§3 では  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  の場合の定理の証明を行う。§4 では  $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$  の場合の定理の証明を行う。安定多様体の正の不変性も得られるが, Hashimoto - Niikura - Yamada [2] で使われた方法を参考にした。我々は, 自明解の安定性を調べているが,  $u^*$  を

$$v_t + Av = f(v), \quad t > 0, \quad v(0) = \phi$$

の定常解とし,  $u \equiv v - u^*$ ,  $f(u) \equiv f(v) - f(u^*) = f(u + u^*) - f(u^*)$  とおいて仮定を満たすとき,  $u^*$  の安定性もいえる。

なお, Weissler [10] の局所解の存在の一部の結果を含んでいることに注意しておく ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$ ,  $\theta = 0$ )。

### §1. 仮定, 結果

仮定 1.1 ( $L, B_j$  について)

(i)  $|\mu| = 2m$  のとき  $a_\mu$  は  $\bar{\Omega}$  で有界, 一様連続,  $|\mu| < 2m$  のとき  $a_\mu$  は  $\Omega$  で有界可測。

(ii)  $|\mu| \leq m_j$  なる  $\mu$  に対し  $b_{j\mu} \in C^{2m - m_j}(\partial\Omega)$ ,  $|\gamma| \leq 2m - m_j$  なる任意の  $\gamma$  に対し  $D^\gamma b_{j\mu}$  は  $\partial\Omega$  上で有界, 一様連続。

(iii)  $L$  は  $\Omega$  で一様楕円型, 適正楕円型,  $\bar{\Omega}$  上で強楕円型.

(iv) 任意の  $x \in \Omega$  に対し  $L(x, D)$ ,  $\{B_j(x, D)\}_{j=1, 2, \dots, m}$  は補完条件を満足する.

(v)  $\mathcal{L}(x, D_x, D_t) \equiv L(x, D_x) - (-1)^m e^{i\theta} D_t^{2m}$  としたとき  
 任意の  $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$  に対し  $\mathcal{L}(x, D_x, D_t)$ ,  $\{B_j(x, D)\}_{j=1, 2, \dots, m}$   
 は補完条件を満足する.

以上は田辺 [9] による. 簡単の為に非線型項  $f$  に対して次の仮定をおく:

仮定 1.2 ( $f$  について)  $C_0 > 0$ ,  $\nu > 1$  とする.

(i)  $0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_N| = l < 2m$

(ii)  $|f(v) - f(w)| \leq C_0 \sum_{k=1}^N (|D^{\alpha_k} v| + |D^{\alpha_k} w|)^{\nu-1} |D^{\alpha_k} v - D^{\alpha_k} w|$

(iii)  $f(0) = 0$

[9] 及び仮定 1.1 により  $-A$  は解析的半群  $e^{-tA}$  を生成する.

(P') の代わりに積分方程式

$$(IE) \quad u(t) = e^{-tA} \phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds, \quad t > 0$$

の局所解, 大域解の存在を考えていく.

$\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  のときは  $\gamma > 0$  に対し作用素  $A$  の分数巾  $A^\gamma$  を定義することができる:

$$A^{-\gamma} \equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-tA} dt$$

$$A^\gamma \equiv (A^{-\gamma})^{-1}, \quad D(A^\gamma) = R(A^{-\gamma})$$

$D(A^\gamma)$  は  $L^p(\Omega)$  で稠密である.

$\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  のとき (IE) を解く空間を設ける為に  $A$  の分数中を用いる。  $\rho$  のとり方として次の様にする：

$$(1.1) \quad \rho \in (1, \infty) \text{ かつ } \rho > \frac{n(\nu-1)}{(2m\nu-l)\nu}$$

§0 で出てきた  $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$  については

$$(1.2) \quad \frac{n(\nu-1)}{2m\rho\nu} + \frac{l}{2m} < \alpha < 1$$

$$(1.3) \quad 0 \leq \theta \leq \alpha, \quad 1 - \alpha\nu + \theta(\nu-1) \geq 0, \quad (\alpha - \theta)\nu < 1$$

となるよう選ぶ。

(1.3) により,  $\alpha, \theta$  について

$$\alpha\nu > 1 \text{ のとき } \frac{\alpha\nu-1}{\nu-1} \leq \theta \leq \alpha$$

$$\alpha\nu = 1 \text{ のとき } 0 < \theta \leq \alpha$$

$$\alpha\nu < 1 \text{ のとき } 0 \leq \theta \leq \alpha$$

という関係を得る。初期値  $\phi$  について  $\phi \in D(A^\theta)$  とする。

$\rho, \alpha$  のとり方について注意しておく。(1.2) より

$$l - \frac{n}{\rho\nu} < 2m\alpha - \frac{n}{\rho}$$

であるから  $D(A^\alpha) \subset W^{l, \rho\nu}(\Omega)$  が成立する ([3], [7]):

$$\|u\|_{W^{l, \rho\nu}} \leq C_1 \|A^\alpha u\|_p \quad \text{for any } u \in D(A^\alpha)$$

(1.2) を満たす  $\alpha$  がとれる為の  $\rho$  の条件として

$$\frac{n(\nu-1)}{2m\rho\nu} + \frac{l}{2m} < 1, \quad \text{すなわち (1.1) を設ける.}$$

[5] では  $\alpha$  のとり方は  $\frac{n}{2m\rho} + \frac{l}{2m} < \alpha < 1$  であり, また  $\phi \in D(A^\alpha)$

である。我々は上で述べたことからわかるように  $\alpha$  の範囲を広げることができ, 初期値のとれる範囲も広げることができ

たのが改良点である。

$t \in [0, \infty)$  に対し関数  $\rho(t)$  を  $\rho(t) \equiv \min \{1, t\}$  と定義する。  
これは [8] による。大域解の存在を示す為、定数を  $t$  に依存させない為を用いる。

定理 1  $\operatorname{Re} \sigma(A) > \lambda > 0$  とする。ある  $T \in (0, \infty)$  に対し  $[0, T]$  上で (IE) の解  $u$  が存在する。  $u \in C((0, T]; D(A^\alpha)) \cap C([0, T]; D(A^0))$  で一意的。任意の  $\beta \in [0, 1)$  に対し

$$(1.4) \quad \|A^\beta u(t)\|_p \leq C_2(\beta) \rho(t)^{-(\beta-\theta)} e^{-\lambda t}, \quad t \in (0, T]$$

系 (IE) の解は (P') の解、従って定理 1 が (P') について成立。

注意 然るべき条件の下で (P') の解は (P) を満たす、すなわち古典解にもなる。

定理 2  $\operatorname{Re} \sigma(A) > \lambda > 0$  とする。  $\|A^\theta \phi\|_p$  が十分小さいならば (IE) の解が  $[0, \infty)$  上で存在する。(1.4) が  $t \in (0, \infty)$  について成立する。

定理 3  $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$  のときは安定多様体  $M$  が存在する。  $\phi \in M$  ならば (IE) の大域解  $u$  が存在し、  $t \rightarrow \infty$  とするとき  $\|u(t)\|_p \rightarrow 0$  であり、任意の  $t \geq 0$  に対し  $u(t) \in M$ 。

以下、  $C_0, C_1, C_2$  を含め正定数  $C_k$  は  $t, T$  には依存しない。

§ 2. 準備 ここでは  $\operatorname{Re} \sigma(A) > \lambda > 0$  とする。証明は省略する。

補題 2.1 (i)  $A^\gamma e^{-tA} = e^{-tA} A^\gamma$  on  $D(A^\gamma)$

(ii)  $\gamma \geq 0, v \in L^p(\Omega)$  とするとき

$$\|A^\gamma e^{-tA} v\|_p \leq C_3 t^{-\gamma} e^{-\lambda t} \|v\|_p \leq C_3 \varphi(t)^{-\gamma} e^{-\lambda t} \|v\|_p$$

(iii)  $v \in D(A^\gamma)$  ならば  $\|(e^{-tA} - I)v\|_p \leq C_4 t^\gamma \|A^\gamma v\|_p$

補題 2.2  $v \in L^p(\Omega), \gamma \geq 0$  とする.  $t \rightarrow 0$  とするとき

$$\varphi(t)^\gamma e^{\lambda t} \|A^\gamma e^{-tA} v\|_p \rightarrow 0$$

補題 2.3 任意の  $v, w \in D(A^\alpha)$  に対し

$$\|f(v) - f(w)\|_p \leq C_5 (\|A^\alpha v\|_p + \|A^\alpha w\|_p)^{\nu-1} \|A^\alpha v - A^\alpha w\|_p$$

補題 2.4  $a \in \mathbb{R}, b, c \in [0, 1), \rho \in (0, \infty)$  とする.  $t > 0$  に対し

$$G(t) \equiv \varphi(t)^a \int_0^t \varphi(t-s)^{-b} \varphi(s)^{-c} e^{-\rho s} ds$$

と定義するとき  $G(t) \leq C(b, c, \rho) \varphi(t)^{1+a-b-c}$

### §3. $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ の場合: 定理 1, 2 の証明

(定理 1 の証明) 補題 2.1 (ii) に注意し, 任意の  $\beta \in [0, 1)$

に対し  $\alpha$  次の空間を設定する:

$$\begin{aligned} E_{\beta, T} &\equiv \left\{ u \in C((0, T]; D(A^\beta)) : \sup_{0 < t \leq T} \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta u(t)\|_p < \infty \right\} \\ &= \left\{ u : \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} u(t) \in B((0, T]; D(A^\beta)) \right\} \end{aligned}$$

$E_{\beta, T}$  は  $\| \|u\|_{\beta, T} \equiv \sup_{0 < t \leq T} \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta u(t)\|_p$  をノルムと

して Banach 空間になる. 特に  $E_{\alpha, T}$  の閉球

$$B_T \equiv \left\{ u \in E_{\alpha, T} : \| \|u\|_{\alpha, T} \leq C \right\}$$

を考える.  $C, T$  はあとで決定する.

$u \in B_T$  に対し写像  $F$  を次の様に定義する:

$$(3.1) \quad Fu(t) \equiv e^{-tA} \phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds, \quad t \in (0, T]$$

(i)  $A^\beta Fu(t)$  は  $t \in (0, T]$  について (Hölder-) 連続であることを示す.  $0 < t < t+h \leq T$  とし,  $\delta \in (0, 1-\beta)$  とする. (3.1) より,

補題 2.1, 2.3, 2.4 を用い,  $B_T$  の定義に注意して

$$\begin{aligned} & \|A^\beta Fu(t+h) - A^\beta Fu(t)\|_p \\ & \leq C_3 C_4 h^\delta \varrho(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} \|A^\theta \phi\|_p \\ & \quad + \frac{C_3 C_5 C^\nu}{1-\beta} h^{1-\beta} \varrho(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda t} \\ & \quad + C_6 h^\delta \varrho(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

(ii)  $F: B_T \rightarrow B_T$  であることを調べる. (3.1) より

$$\begin{aligned} & \varrho(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta Fu(t)\|_p \\ & \leq \varrho(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta e^{-tA} \phi\|_p \\ & \quad + C_3 C_5 \varrho(t)^{\beta-\theta} \int_0^t \varrho(t-s)^{-\beta} \varrho(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda(\nu-1)s} ds \cdot \|u\|_{\alpha, T}^\nu \\ & \leq \varrho(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta e^{-tA} \phi\|_p + C_7(\beta) \varrho(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \|u\|_{\alpha, T}^\nu \end{aligned}$$

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1) \geq 0$  であるから

$$(3.2) \quad \|Fu\|_{\beta, T} \leq \sup_{0 < t \leq T} \varrho(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta e^{-tA} \phi\|_p + C_7(\beta) \varrho(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \|u\|_{\alpha, T}^\nu$$

特に  $\beta = \alpha$  とおいて

$$\begin{aligned} \|Fu\|_{\alpha, T} & \leq \sup_{0 < t \leq T} \varrho(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p \\ & \quad + C_8 \varrho(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \|u\|_{\alpha, T}^\nu \end{aligned}$$

よって



$$(3.3) \quad \sup_{0 < t \leq T} \varrho(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p + C_\varrho \varrho(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} C^\nu \leq C$$

ならば  $F: B_T \rightarrow B_T$  である.

(iii)  $F$  は  $B_T$  上の *strictly contraction* を示す.  $\nu, w \in B_T$  とする.

(3.1), 補題 2.1, 2.3, 2.4 より

$$(3.4) \quad \|F\nu - Fw\|_{\alpha, T} \leq C_\varrho \varrho(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} (2C)^{\nu-1} \|\nu - w\|_{\alpha, T}$$

となるので

$$(3.5) \quad C_\varrho \varrho(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} (2C)^{\nu-1} < 1$$

となるように  $C, T$  をとれば (3.4) より示される.  $\phi \in D(A^\theta)$

だから補題 2.1 により

$$\varrho(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta e^{-tA} \phi\|_p \leq C_3 \|A^\theta \phi\|_p$$

$1 - \alpha\nu + \theta(\nu - 1) > 0$  の場合, (3.3) の代わりにより弱い条件

$$(3.3') \quad C_3 \|A^\theta \phi\|_p + C_\varrho \varrho(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} C^\nu \leq C$$

を扱う.  $C > C_3 \|A^\theta \phi\|_p$  (例えば  $C = 2C_3 \|A^\theta \phi\|_p$ ) と  $C$  をとる

と,  $T$  を小さくとることにより (3.3'), (3.5) は成り立つ.

$1 - \alpha\nu + \theta(\nu - 1) = 0$  の場合, (3.3), (3.5) は

$$\sup_{0 < t \leq T} \varrho(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^\theta \phi)\|_p + C_\varrho C^\nu \leq C$$

$$C_\varrho (2C)^{\nu-1} < 1$$

となる.  $C > 0$  を  $C_\varrho (2C)^{\nu-1} < 1$  となるようにとり, 補題 2.2

より  $T$  を十分小さくして

$$\sup_{0 < t \leq T} \varrho(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^\theta \phi)\|_p \leq C - C_\varrho C^\nu$$

を満足するようにとる.

どちらの場合でも (3.4) によつて  $F$  は  $B_T$  上の *strictly contraction* になるから,  $F$  は  $B_T$  内に一意の不動点  $u$  をもち,  $t \in (0, T]$  について (IE) を満たす.  $\varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} u(t) \in B((0, T]; D(A^\alpha))$ .

(iv)  $t=0$  における連続性を調べる.  $1 - \alpha\nu + \theta(\nu-1) > 0$  の場合 (IE), 補題 2.1, 2.3, 2.4 及び  $B_T$  の定義により

$$\begin{aligned} & \|A^\theta u(t) - A^\theta \phi\|_p \\ & \leq \|A^\theta e^{-tA} \phi - A^\theta \phi\|_p + \int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A} f(u(s))\|_p ds \\ & \leq \|e^{-tA} A^\theta \phi - A^\theta \phi\|_p + C_\varphi \varphi(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

故に任意の  $\gamma \in [0, \theta]$  に対し  $u \in C([0, T]; D(A^\gamma))$ .

$1 - \alpha\nu + \theta(\nu-1) = 0$  の場合,  $T_0 \in (0, T]$  に対し (3.2) に注意して

$$\|u\|_{\alpha, T_0} \leq \sup_{0 < t \leq T_0} \varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p + C_\varphi C^{\nu-1} \|u\|_{\alpha, T_0}$$

$C_\varphi C^{\nu-1} < 1$  だから  $C_{10} > 0$  が存在して

$$\|u\|_{\alpha, T_0} \leq C_{10} \sup_{0 < t \leq T_0} \varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p$$

が成り立つ. よつて  $T_0 \rightarrow 0$  のとき補題 2.2 を用いて

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A} f(u(s))\|_p ds \\ & \leq C_3 C_5 C^{\nu-1} \int_0^t \varphi(t-s)^{-\theta} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda(\nu-1)s} ds \cdot \|u\|_{\alpha, T_0} \\ & \leq C_{11} C_{10} \sup_{0 < t \leq T_0} \varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^\theta \phi)\|_p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

従つて任意の  $\gamma \in [0, \theta]$  に対し  $u \in C([0, T]; D(A^\gamma))$ .

(v)  $u(t)$  の評価を求める. (3.2) に注意して

$$\|u\|_{\beta, T} \leq C_3 \|A^\theta \phi\|_p + C_7(\beta) C^\nu$$

であるから (1.4) が成立する. 特に

$$\|A^\alpha u(t)\|_p \leq C \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \in (0, T]$$

命題 3.1  $f(u(t))$  は  $t \in (0, T]$  について Hölder 連続.

(証明) 定理 1 の証明の (i) と同様に  $\beta = \alpha$  とし,  $\delta \in (0, 1-\alpha)$ ,

$0 < t < t+h \leq T$  とする.

$$\begin{aligned} & \|A^\alpha u(t+h) - A^\alpha u(t)\|_p \\ & \leq C_{12} h^\delta \varphi(t)^{-(\alpha+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} + C_{13} h^{1-\alpha} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

従って仮定 1.2 より

$$\begin{aligned} (3.6) \quad & \|f(u(t+h)) - f(u(t))\|_p \\ & \leq C_{14} h^\delta \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} e^{-\lambda \nu t} + C_{15} h^{1-\alpha} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\lambda \nu t} \end{aligned}$$

注意 Pazy [6] により命題 3.1 から (IE) は  $t \in (0, T]$  について微分可能, すなわち (P') について定理 1 が成立する.

命題 3.2  $t \in (0, T]$  に対し

$$(3.7) \quad \|A u(t)\|_p \leq C_{16} [\varphi(t)^{-(1-\theta)} + \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \|u_t(t)\|_p & \leq C_{16} [\varphi(t)^{-(1-\theta)} + \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\lambda t} \\ & \quad + C_5 C^\nu \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda \nu t} \end{aligned}$$

$$(証明) \quad \varphi(t)^{1-\theta} e^{\lambda t} \|A e^{-tA} \phi\|_p \leq C_3 \|A^\theta \phi\|_p$$

である. 続いて次の様に分けて考える:

$$\begin{aligned} & A \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds \\ & = \int_0^{t/2} A e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds + \int_{t/2}^t A e^{-(t-s)A} \{f(u(s)) - f(u(t))\} ds \\ & \quad + (I - e^{-\frac{t}{2}A}) f(u(t)) \end{aligned}$$

$$\varphi(t)^{1-\theta} e^{\lambda t} \|(I - e^{-\frac{t}{2}A}) f(u(t))\|_p \leq C_{17}$$

$$\varphi(t)^{1-\theta} e^{\lambda t} \int_0^{t/2} \|A e^{-(t-s)A} f(u(s))\|_p ds \leq C_{18}$$

がわかる。(3.6)より

$$\begin{aligned} & \int_{t/2}^t \|A e^{-(t-s)A} \{f(u(s)) - f(u(t))\}\|_p ds \\ & \leq C_3 C_{13} \varphi\left(\frac{t}{2}\right)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} e^{-\lambda t} \int_{t/2}^t (t-s)^{-1+\delta} e^{-\lambda(\nu-1)s} ds \\ & \quad + C_3 C_{14} \varphi\left(\frac{t}{2}\right)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\lambda t} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\lambda(\nu-1)s} ds \\ & \leq C_{19} \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} e^{-\lambda t} + C_{20} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

であるから(3.7)が成立する。(3.8)は(P'), 補題2.3よりいえる。

(定理2の証明)  $1 - \alpha\nu + \theta(\nu - 1) > 0$  のとき:  $C$  を

$$C_8 (2C)^{\nu-1} < 1$$

を満たすようにとり, 次に  $\phi$  を

$$C_3 \|A^\theta \phi\|_p \leq C - C_8 C^\nu$$

が成立するようにすると  $\varphi(T) = 1$  とし (3.3'), (3.5) が成り立つ。従って  $T = \infty$  ととることができる。

$1 - \alpha\nu + \theta(\nu - 1) = 0$  のとき: 上と同様に  $C$  をとり

$$\sup_{0 < t \leq T} \varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p \leq C_3 \|A^\theta \phi\|_p$$

だから

$$C_3 \|A^\theta \phi\|_p \leq C - C_8 C^\nu$$

と  $\phi$  をとれば,  $T$  の大きさを絞る必要はない。

§4.  $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$  の場合  $\sigma_1 = \sigma(A) \cap \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ ,

$\sigma_2 = \sigma(A) \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$  とおく.  $\sigma_1$  は有限集合である.

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z-A)^{-1} dz, \quad P_2 = I - P_1$$

と定義する. 但し  $\Gamma$  は  $\sigma_1$  を内部に含み  $\sigma(A) \setminus \sigma_1$  を外部におく単純閉曲線である.  $k=1, 2$  に対して  $P_k$  は  $X = L^p(\Omega)$  上の射影作用素となる.  $X_k = P_k L^p(\Omega)$  とし,

$$A_k \equiv A|_{X_k}, \quad \sigma(A_k) = \sigma_k, \quad k=1, 2$$

として  $A = A_1 + A_2$  と分解できる.  $X_1$  は有限次元であるから,  $-A_1$  は有界作用素で群  $e^{-tA_1}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) を生成し,  $-A_2$  は解析的半群  $e^{-tA_2}$  ( $t \geq 0$ ) を生成する. ( $P'$ ) は

$$\begin{cases} (u_k)_t + A_k u_k = P_k f(u), & t > 0 \\ u_k(0) = \phi_k \end{cases}$$

と分解される ( $k=1, 2$ ). 二二  $u_k = P_k u$ ,  $\phi_k = P_k \phi$ . よって (IE) は  $k=1, 2$  に対し

$$u_k(t) = e^{-tA_k} \phi_k + \int_0^t e^{-(t-s)A_k} P_k f(u(s)) ds, \quad t > 0$$

となる.

$C_{21} > 0$  を適当にとり  $\tilde{A} \equiv A + C_{21} I$  と定義し,  $\operatorname{Re} \sigma(\tilde{A}) > 0$  となるようにする.

次のことに注意しておく.  $C_{22} > 0$ ,  $\omega > 0$  が存在して任意の  $v \in L^p(\Omega)$ ,  $\gamma \geq 0$  に対して

$$(4.1) \quad \left. \begin{aligned} & \| \tilde{A}^\gamma e^{-t\tilde{A}} v \|_p \\ & \| \tilde{A}^\gamma e^{-tA_2} v \|_p \end{aligned} \right\} \leq C_{22} t^{-\gamma} e^{-\omega t} \|v\|_p \leq C_{22} \varrho(t)^{-\gamma} e^{-\omega t} \|v\|_p, \quad t > 0$$

$$\| \tilde{A}^\gamma e^{-tA_1} v \|_p \leq C_{22} e^{\omega t}, \quad t < 0$$

定理3をより詳しく述べそれを定理4.1とする。この節は定理4.1を証明する。

定理4.1 以下を満足する安定多様体  $M$  が存在する:

$$(i) \quad M = \{ w_1 + w_2 : w_k \in P_k D(\tilde{A}^\theta), w_1 = \Phi(w_2), \Phi \text{ は連続} \}$$

(ii)  $\phi \in M$  ならば (IE) の大域解  $u$  が存在し

$$\| \tilde{A}^\alpha u(t) \|_p \leq C_{23} \varrho(t)^{-(\alpha-\theta)} e^{-\omega t} \quad \text{for all } t > 0$$

$$\| \tilde{A}^\theta u(t) \|_p \leq C_{24} e^{-\omega t} \quad \text{for all } t \geq 0$$

(iii)  $\phi \in M$  ならば 任意の  $t \geq 0$  に対し  $u(t) \in M$ .

(iv)  $u$  を (IE) の大域解で (ii) の評価をもつとする。

$$\| \tilde{A}^\theta P_2 \phi \|_p \leq C_{25} \quad \text{ならば } \phi \in M \text{ である.}$$

$\psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta)$ ,  $t > 0$  に対し積分方程式

$$(4.2) \quad v(t) = e^{-tA_2} \psi - \int_t^\infty e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s)) ds \\ + \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) ds$$

を考える。

補題4.2  $\| \tilde{A}^\theta \psi \|_p$  が十分小さいとき (4.2) の大域解  $v(t; \psi)$

が存在し,  $v \in C((0, \infty); D(\tilde{A}^\alpha))$  で一意的。さらに任意の

$\beta \in [\theta, 1)$  に対し

$$\|\tilde{A}^\beta v(t; \varphi)\|_p \leq C_{26}(\beta) \varphi(t)^{-(\beta-\theta)} e^{-\omega t}, \quad t > 0$$

(証明) 定理 1 と同じ様に任意の  $\beta \in [\theta, 1)$  に対して次の空間を定義する:

$$E_\beta \equiv \left\{ v \in C((0, \infty); D(\tilde{A}^\beta)) : \sup_{0 < t < \infty} \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \|\tilde{A}^\beta v(t)\|_p < \infty \right\}$$

$$= \left\{ v : \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} v(t) \in B((0, \infty); D(\tilde{A}^\beta)) \right\}$$

$E_\beta$  は  $\|v\|_\beta \equiv \sup_{0 < t < \infty} \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \|\tilde{A}^\beta v(t)\|_p$  をノルムとして Banach 空間になる.  $E_\alpha$  の閉球

$$B \equiv \left\{ v \in E_\alpha : \|v\|_\alpha \leq C \right\}$$

を考え,  $v \in B$  に対して写像  $F$  を

$$(4.3) \quad Fv(t) \equiv e^{-tA_2} \varphi - \int_t^\infty e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s)) ds$$

$$+ \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) ds, \quad t > 0$$

と定義する.

(i)  $\tilde{A}^\beta Fv(t)$  は  $t \in (0, \infty)$  について (Hölder-) 連続であることを示す. 次のことに注意する:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \tilde{A}^\gamma e^{-tA_k} = e^{-tA_k} \tilde{A}^\gamma \text{ on } D(\tilde{A}^\gamma), \quad k=1, 2 \\ \|(e^{tA_1} - I)v\|_p \leq C_{27} (1 - e^{-\omega t}) \|v\|_p, \quad v \in P_1 L^p(\Omega), \quad t > 0 \\ \|(e^{-tA_2} - I)v\|_p \leq C_{28} t^\gamma \|\tilde{A}^\gamma v\|_p, \quad v \in D(\tilde{A}^\gamma), \quad t > 0 \end{cases}$$

$0 < t < t+k < \infty$ ,  $\delta \in (0, 1-\beta)$  とする.

$$\|\tilde{A}^\beta Fv(t+k) - \tilde{A}^\beta Fv(t)\|_p$$

$$\leq \|(e^{-kA_2} - I) \tilde{A}^\beta e^{-tA_2} \varphi\|_p$$

$$+ \int_t^{t+k} \|\tilde{A}^\beta e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s))\|_p ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t+h}^{\infty} \| (e^{hA_1} - I) \tilde{A}^{\beta} e^{-(t+h-s)A_1} P_1 f(v(s)) \|_p ds \\
& + \int_t^{t+h} \| \tilde{A}^{\beta} e^{-(t+h-s)A_2} P_2 f(v(s)) \|_p ds \\
& + \int_0^t \| (e^{-tA_2} - I) \tilde{A}^{\beta} e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) \|_p ds \\
\leq & C_{29} h^{\delta} \varphi(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\omega t} + C_{30} h^{\delta} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t} \\
& + C_{31} h^{1-\beta} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t}
\end{aligned}$$

(ii)  $F: B \rightarrow B$  であることを調べる。(4.3)より  $v \in B$  のとき

$$\begin{aligned}
& \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \| \tilde{A}^{\beta} F v(t) \|_p \\
& \leq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \varphi \|_p \\
& + C_5 C_{22} \| P_1 \| C^{\nu} \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \int_t^{\infty} e^{\omega(t-s)} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega \nu s} ds \\
& + C_5 C_{22} \| P_2 \| C^{\nu} \varphi(t)^{\beta-\theta} \int_0^t \varphi(t-s)^{-\beta} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega(\nu-1)s} ds
\end{aligned}$$

=" "

$$\begin{aligned}
& \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \int_t^{\infty} e^{\omega(t-s)} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega \nu s} ds \\
& \leq \int_0^1 s^{-(\alpha-\theta)\nu} ds + \int_1^{\infty} e^{-\omega(\nu-1)s} ds
\end{aligned}$$

また補題 2.4 より

$$\begin{aligned}
& \varphi(t)^{\beta-\theta} \int_0^t \varphi(t-s)^{-\beta} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega(\nu-1)s} ds \\
& \leq C_{32}(\beta) \varphi(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \leq C_{32}(\beta)
\end{aligned}$$

であるから

$$\| F v \|_{\beta} \leq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \varphi \|_p + C_{33}(\beta) C^{\nu}$$

特に  $\beta = \alpha$  とおいて

$$\| F v \|_{\alpha} \leq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \varphi \|_p + C_{34} C^{\nu}$$

を得る。C のとり方として



$$(4.5) \quad C_{34} (2C)^{\nu-1} < 1$$

とし,  $\varphi$  を  $C_{22} \|\tilde{A}^\theta \varphi\|_p \leq C - C_{34} C^\nu$  とすると  $\|Fv\|_\alpha \leq C$  すなわち  $F: B \rightarrow B$  である.

(iii)  $F$  は  $B$  上の *strictly contraction* であることを示す.  $v, w \in B$  とする. (4.3) より

$$\|Fv - Fw\|_\alpha \leq C_{34} (2C)^{\nu-1} \|v - w\|_\alpha$$

(4.5) より示すことができた.  $F$  は  $B$  内に一意の不動点  $v$  をもち (4.2) を満足する.  $g(t)^{\alpha-\theta} e^{wt} v(t) \in B((0, \infty); D(\tilde{A}^\alpha))$ .

上の計算からわかるように

$$\|v\|_\beta \leq C_{22} \|\tilde{A}^\theta \varphi\|_p + C_{33}(\beta) C^\nu$$

特に  $\beta = \alpha$  のとき  $t > 0$  に対し

$$\|\tilde{A}^\alpha v(t)\|_p \leq C g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-wt}$$

また  $\beta = \theta$  のとき  $t \geq 0$  に対し

$$(4.6) \quad \|\tilde{A}^\theta v(t)\|_p \leq (C_{22} \|\tilde{A}^\theta \varphi\|_p + C_{35} C^\nu) e^{-wt}$$

補題 4.3  $v(t; \varphi)$  は

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(0) = \varphi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds \end{cases}$$

を満足する.

(証明) 積分方程式として考える. (4.2) を変形して

$$v(t) = e^{-tA_1} P_1 \left( \varphi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s)) ds \right)$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-tA_2} P_2 \left( \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s)) ds \right) \\
& + \int_0^t e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s)) ds \\
& + \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) ds
\end{aligned}$$

多様体  $M, M(c)$  を

$$M = \left\{ \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \psi)) ds : \begin{array}{l} \psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta) \\ v : (4.2) \text{ の解} \\ \|v\|_\alpha : \text{有界} \end{array} \right\}$$

$$M(c) = \left\{ \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \psi)) ds : \begin{array}{l} \psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta) \\ C_{22} \|\tilde{A}^\theta \psi\|_p \leq c - C_{24} C^\nu \\ v : (4.2) \text{ の解, } \|v\|_\alpha \leq c \end{array} \right\}$$

と定義する。明らかに  $0 \in M(c) \subset M$ 。

補題 4.4  $u(t; \phi)$  を (IE) (P') の大域解とする。

(i)  $\phi \in M$  ならばすべての  $t \geq 0$  に対し  $u(t; \phi) \in M$ 。

(ii)  $\phi \in M(c)$  ならば  $T_1 \in [0, \infty)$  が存在してすべての  $t \geq T_1$  に対し  $u(t; \phi) \in M(c)$ 。

(証明)  $\phi \in M$  とする。  $\psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta)$  として

$$\phi = \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \psi)) ds$$

と表される。(P') の解は B 一意である。補題 4.3 より任意の  $t \geq 0$  に対し  $u(t; \phi) = v(t; \psi)$ 。  $\tau > 0$  を任意にとり固定し  $t \geq 0$  に対し

$$w(t) \equiv v(t + \tau; \psi)$$

と定義する.

$$\begin{aligned}
 w(t) &= e^{-(t+\tau)A_2} \varphi \\
 &\quad - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{-(t+\tau-s)A_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds \\
 &\quad + \int_0^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)A_2} P_2 f(v(s; \varphi)) ds \\
 &= e^{-tA_2} \left\{ e^{-\tau A_2} \varphi + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A_2} P_2 f(v(s; \varphi)) ds \right\} \\
 &\quad - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{-(t+\tau-s)A_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds \\
 &\quad + \int_{\tau}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)A_2} P_2 f(v(s; \varphi)) ds \\
 &= e^{-tA_2} \left\{ e^{-\tau A_2} \varphi + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A_2} P_2 f(v(s; \varphi)) ds \right\} \\
 &\quad - \int_t^{\infty} e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s+\tau; \varphi)) ds \\
 &\quad + \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s+\tau; \varphi)) ds
 \end{aligned}$$

よって  $w$  は (4.2) の  $\varphi$  の代わりに  $P_2 v(\tau; \varphi)$  としたものを満足する. すべての  $t \geq 0$  に対して

$$v(t+\tau; \varphi) = w(t) = v(t; P_2 v(\tau; \varphi))$$

従って

$$\begin{aligned}
 u(\tau; \varphi) &= v(\tau; \varphi) = w(0) \\
 &= P_2 v(\tau; \varphi) - \int_0^{\infty} e^{sA_1} P_1 f(v(s; P_2 v(\tau; \varphi))) ds
 \end{aligned}$$

また  $P_2 v(\tau; \varphi) \in P_2 D(\tilde{A}^{\theta})$  である. よって (i) が成立する.

$u(t; \varphi) = v(t; \varphi)$  だから  $u$  も補題 4.2 の評価 (4.6) を満足する. よって  $T_1 \in [0, \infty)$  が存在して

$$C_{22} \|\tilde{A}^{\theta} P_2 v(t; \varphi)\|_p \leq C - C_{34} C^{\nu}, \quad t \geq T_1$$

とすることができ, (ii) が成り立つ.

補題 4.5  $u$  は (IE) ( $P'$ ) の大域解で, 補題 4.2 と同じ評価をもつとする.  $C_{22} \|\tilde{A}^\theta P_2 \phi\|_p \leq C - C_{34} C^\nu$  ならば,  $\phi \in M(C)$  である.

$$(証明) \quad P_1 u(t) = e^{-tA_1} P_1 \phi + \int_0^t e^{-(t-s)A_1} P_1 f(u(s)) ds$$

(4.1) 及  $u$   $e^{sA_1} P_1 f(u(s))$  は  $(0, \infty)$  上  $L^1$  可積分であるから

$$e^{tA_1} P_1 u(t) = P_1 \phi + \int_0^t e^{sA_1} P_1 f(u(s)) ds \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

従って

$$P_1 \phi = - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(u(s)) ds$$

でなく  $\phi$  はならない.  $u(t; \phi) = v(t; \psi)$  から

$$\phi = v(0; \psi) = \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \psi)) ds$$

また  $P_2 \phi = \psi$  より  $\phi \in M(C)$  である.

なお  $\psi_1, \psi_2 \in P_2 D(\tilde{A}^\theta)$  とし,  $v_1(t; \psi_1), v_2(t; \psi_2)$  を (4.2) の大域解とすると

$$\|v_1 - v_2\|_\alpha \leq C_{36} \|\tilde{A}^\theta \psi_1 - \tilde{A}^\theta \psi_2\|_p$$

となり定理 4.1 (i) がいえる.

命題 4.6  $v \in B$  を (4.2) の大域解とし,  $0 < t < t+h < \infty$ ,  $\delta \in (0, 1-\alpha)$  とする.

$$(i) \quad \|\tilde{A}^\alpha v(t+h) - \tilde{A}^\alpha v(t)\|_p$$

$$\leq C_{37} h^\delta \left[ \varrho(t)^{-(\alpha+\delta-\theta)} + \varrho(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} \right] e^{-\omega t}$$

$$+ C_{38} h^{1-\alpha} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t}$$

$$(ii) \quad \| f(v(t+h)) - f(v(t)) \|_p$$

$$\leq C_{39} h^\delta \left[ \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} \right] e^{-\omega\nu t}$$

$$+ C_{40} h^{1-\alpha} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\omega\nu t}$$

$$(iii) \quad \| \tilde{A} v(t) \|_p$$

$$\leq C_{41} \left[ \varphi(t)^{-(1-\theta)} + \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} \right] e^{-\omega t}$$

以上の結果の証明などの詳細は Hoshino - Yamada [11] を参照していただきたい。

## 文 献

1. A. Friedman; Remarks on nonlinear parabolic equations, Proc. Symp. Appl. Math. 17 (1965), 3-23.
2. Y. Hashimoto, Y. Niikura and Y. Yamada; Stability and instability for semilinear parabolic equations with free boundary conditions, Nonlinear Analysis 8 (1984), 683-694.
3. D. Henry; Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
4. M. Ito; The conditional stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 25 (1978), 263-275.

5. H. Kielhöfer; On the Lyapunov-stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Differential Equations 22 (1976), 193-208.
6. A. Pazy; A class of semi-linear equations of evolution, Israel J. Math. 20 (1975), 23-36.
7. A. Pazy; Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Appl. Math. Sci. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
8. F. Rothe; Global Solutions Of Reaction-Diffusion Systems, Lecture Notes in Math. 1072, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
9. 田辺広城 関数解析 上, 下 実教出版, 1978, 1981.
10. F. Weissler; Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in  $L^p$ , Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 79-102.
11. H. Hoshino and Y. Yamada; Global solutions for semilinear parabolic equations of higher order. (準備中)