

*On reaction diffusion equations in a porous medium*

福岡大理 仙兼 隆 (Takasi Senba)

次の方程式の  $t \rightarrow \infty$  での挙動について考える。

$$(Eg 1) \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} - uv & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ v_t = (v^m)_{xx} - uv & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ただし、 $m \in [\frac{4}{3}, 2]$  なる定数、 $u_0$  と  $v_0$  は非負で compact な support を持つ  $\mathbb{R}$  上の連続関数とする。方程式 (Eg 1) は多孔質媒体中にある二つの気体が反応する状況を表わしている。そして、 $u$  と  $v$  は各時刻  $t$  での二つの気体の密度を表わしている。

方程式のイメージ

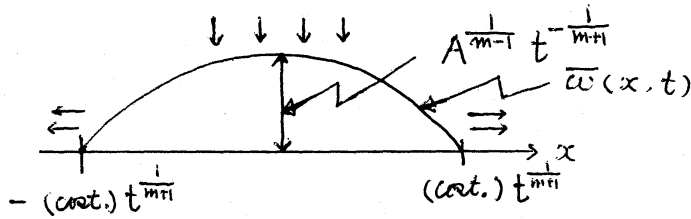
方程式 (Eg 1) は拡散項  $(u^m)_{xx}$ ,  $(v^m)_{xx}$  と反応を表わす項  $-uv$  で構成されている。そこで、この二つの部分に分けて方程式を説明する。最初に拡散項について考える、そのために次の方程式の解について考える。

$$(*)1) \quad (\mathcal{E}_g 2) \quad \begin{cases} \omega_t = (\omega^m)_{xx} & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \omega(\cdot, 0) = \omega_0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ただし  $m \in (1, \infty)$ 。ここで  $\omega_0 = \delta_0$  のとき次の関数が  $(\mathcal{E}_g 2)$  の解となる。

$$(*)2) \quad \bar{\omega}(x, t) = t^{-\frac{1}{m+1}} \left( A - \frac{(m-1)}{2m(m+1)} \frac{x^2}{t^{\frac{2}{m+1}}} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} \quad (1)$$

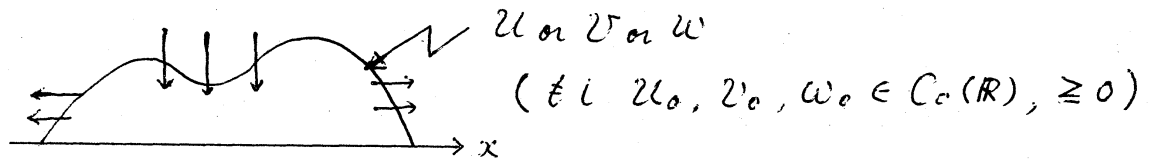
ただし  $|\omega(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} \equiv 1$  となるように  $A$  を決める, さらに  $(y)_+ = \max(y, 0)$  とする。このとき, 下の図の様にふる。



これと同様の挙動を。  
 $\omega(\cdot, 0) = \omega_0 \in C_0(\mathbb{R})$

,  $\geq 0$  なる場合の  $(\mathcal{E}_g 2)$  の

解。さらに  $(\mathcal{E}_g 1)$  の解  $u, v$  が示す。つまり各時刻  $t$  に対し



上の図の様に compact な support を持ち,  $t \rightarrow \infty$  のとき support が広がり,  $L^\infty$ -norm は小さくなる。次に  $-2(uv)$  について考える。ここでは二つの気体  $A, B$  の密度が場所  $x$  によらない場合について考える。<sup>(\*)3)</sup> そのとき  $(\mathcal{E}_g 1)$  は  $A + B \rightarrow C$  なる反応を考えていることに対応している。そのとき  $f(t), g(t)$  を  $A, B$  それぞれの気体の密度とすると  $f, g$  は

$$(*)4) \quad (\mathcal{E}_g 3) \quad \begin{cases} f' = -kfg & t \geq 0 \\ g' = -kfg & t \geq 0 \end{cases} \quad (k > 0, \text{定数})$$

なる方程式をみたす。(Eg 2)は多孔質媒体中を拡散する気体の密度がみたす方程式だから (Eg 2), (Eg 3)より (Eg 1)は多孔質媒体中を拡散しながら反応する二つの気体を表わしていると考えられる。

### 主結果とその説明

定義  $a(t), b(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  とする。そのとき

$$a(t) \sim b(t) \iff \begin{cases} \exists m, \exists M > 0 \text{ s.t. for sufficiently large } t \\ m a(t) \leq b(t) \leq M a(t) \end{cases}$$

定理.  $m \in [\frac{4}{3}, 2]$ ,  $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R})$ . さらに  $0 \leq u_0 \leq v_0$ ,  $0 < \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} < \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$  をみたすとき  $u, v$  は次のことをみたす。

$\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-\frac{1}{m+1}}$ , (十分  $t$  が大きいとき  $\text{supp } v(\cdot, t)$  は区間となることが別の議論でわかるから.)  $\text{supp } v(\cdot, t) = [\xi_{1v}(t), \xi_{2v}(t)]$  とおくと  $(-1)^i \xi_{iv}(t) \sim t^{\frac{1}{m+1}}$  ( $i=1, 2$ ).  
さらに  $\log \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim -t^{\frac{m}{m+1}}$ ,  $\bigcup_{t>0} \text{supp } u(\cdot, t)$  は  $\mathbb{R}$  の中の有界集合である。

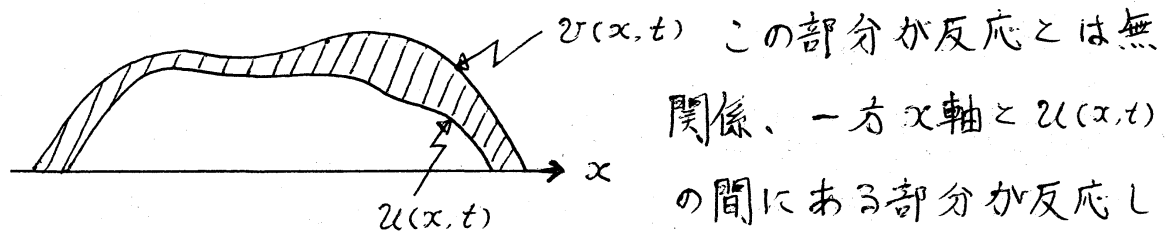
ここで  $v$  の order が (Eg 2) の解  $\bar{\omega}$  と同じである。実は  $\omega_0 \in C_0(\mathbb{R})$ ,  $\geq 0$  のとき  $\text{support } \omega_0$  と  $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  の挙動 (の order) は同じである。これについては (Eg 1) の式を  $\mathbb{R}_x$  上積分して辺々引くと  $\{\|v(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}\}' = 0$  かわかる。つまり

$$\|v(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^1} = \|v_0 - u_0\|_{L^1}$$

さらに  $v_0 \geq u_0$  なら  $v \geq u$  を示すことができるから

$$|v(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} = |u(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} + |v_0 - u_0|_{L^1(\mathbb{R})}$$

つまり下の図の斜線の部分は時間によらないで一定である。



他の結果との比較

本稿では  $0 \leq u_0 \leq v_0$  についてのみ考えることにする。そのとき 1°  $0 = |u_0|_{L^1(\mathbb{R})} < |v_0|_{L^1(\mathbb{R})}$  ( $u_0 \equiv 0$  のとき) 2°  $0 < |u_0|_{L^1(\mathbb{R})} < |v_0|_{L^1(\mathbb{R})}$  (本稿の定理) 3°  $0 < |u_0|_{L^1(\mathbb{R})} = |v_0|_{L^1(\mathbb{R})}$  ( $u_0 = v_0$ ) 以上の三つの場合に分けて解の挙動をくらべる。

1° このとき  $u \equiv 0$ 、つまり  $v$  は  $(E_g 2)$  をみただす。従って  $|v(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-\frac{1}{m+1}}$ ,  $(-1) \inf(\text{supp } v(\cdot, t))$ ,  $\sup(\text{supp } v(\cdot, t)) \sim t^{\frac{1}{m+1}}$  となる。前の Section で述べたように 1° の order と本稿の定理における  $v$  の order は同じである。

2° 本稿の定理であるので主結果を参照。

3° このとき  $u \equiv v$  となり  $\tilde{u} = u = v$  とおくと

$$(E_g 4) \begin{cases} Z_t = (Z^m)_{xx} - Z^p & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ Z(\cdot, 0) = Z_0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ただし、 $p=2$  である。 $(E_g 2)$  については  $p=2$  にかぎらず  $m, p \geq 1$  の場合にいろいろの結果が出ているが本稿の結果と比較するために  $p=2$  の場合だけ述べる。次の定理は Herero, Vazquez, Bertsch, Kerner などの結果に  $p=2$  を代入したものである。

(\*5) 定理 H.V.B.K.  $(E_g 4)$  の解  $Z$  は  $(Z_0 \in C_0(\mathbb{R}), \geq 0, \neq 0)$  次のことをみたす。

$$\|Z(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-1}, \quad (-1) \inf(\text{supp } Z(\cdot, t)), \quad \sup(\text{supp } Z(\cdot, t)) \sim t^{\frac{2-m}{2}} \quad (1 < m < 2), \quad \log t \quad (m=2).$$

前の Section で  $u$  の order が反応の状況に対応することを述べたが、そのことに注意すると 2° と 3° の場合では反応の速さに著しい違いがあるように思える。

### 証明のスケッチ

最初に次の比較定理を考える。

Lemma 1.  $0 \leq u_0 \leq Z_0 \leq v_0$ . えて  $u_0, v_0, Z_0 \in C_0(\mathbb{R})$  とし  $u, v$  を  $u_0, v_0$  を初期条件とする  $(E_g 1)$  の解、 $Z$  を  $Z_0$  を初期値とする  $(E_g 4)$  の解とする。そのとき

$$0 \leq u(x, t) \leq Z(x, t) \leq v(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

が成立する。(証明は省略)

一方、"主結果とその説明"で述べたように  $|v_0 - u_0|_{L^1(\mathbb{R})} = D_0 > 0$  とすると、Lemma 1 より、 $|v(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} = D_0 + |z(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})}$  ... (2) . 一方、定理 H.V.B.K. と Lemma 1 より

$$|z(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} \leq |Z(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad \text{つまり、}$$

$\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $\exists T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$  s.t.

$$|z(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon \quad \forall t \geq T_1. \quad \dots (3)$$

次に (Eg 2) を  $t \geq T_1$  で考える。

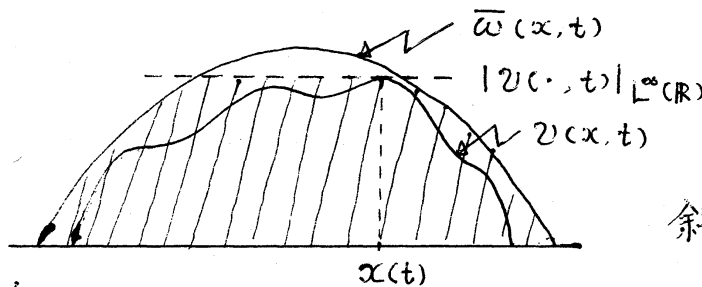
$$(Eg 5) \begin{cases} \omega_t = (\omega^m)_{xx} & (x, t) \in \mathbb{R} \times [T_1, \infty) \\ \omega(\cdot, T_1) = v(\cdot, T_1) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

比較定理より、 $v(x, t) \leq \omega(x, t)$  ( $x, t) \in \mathbb{R} \times [T_1, \infty)$

... (4) <sup>(\*ε)</sup> ここで  $\omega$  は  $t \rightarrow \infty$  で特殊解  $\bar{\omega}$  (ただし  $\bar{\omega}$  の  $A$  は

$|\bar{\omega}(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} = |\omega(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})}$  となるように決める。)にある意

味で近づくそこで、 $\bar{\omega} \doteq \omega$  として考える。図の様に  $x(t)$



を  $v(x(t), t) = |v(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})}$

となるように決める。

斜線の部分の面積を  $A(t)$

とおくと、

$$D_0 + \varepsilon \geq |\bar{\omega}(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} \geq A(t) \geq |v(\cdot, t)|_{L^1(\mathbb{R})} > D_0 \quad \dots (4)$$

( (2) より )。 (4) 式と  $\bar{\omega}$  の式より  $t \geq T_1$  のとき

$$|x(t)| \leq \left( \frac{\varepsilon}{3m(m+1)} A^{-\frac{m}{m-1}} \right)^{-\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{m+1}} (= ? \varepsilon t^{\frac{1}{m+1}} \text{ とおくと})$$

... (4). さらに

$$|\psi(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq t^{-\frac{1}{m+1}} \left( A - \frac{m-1}{2m(m+1)} \varepsilon^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (5)$$

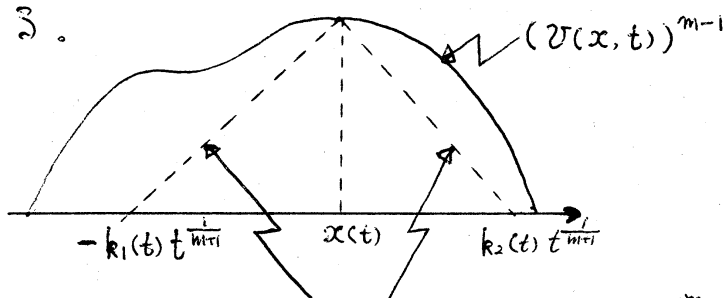
これらのことより  $|\psi(\cdot, t)|_{L^\infty} \sim t^{-\frac{1}{m+1}}$  がわかる。

Lemma 2. 定理と同じ仮定のもと

$$|(\psi^{m-1})_x(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_* t^{-\frac{m}{m+1}} \quad (t \geq 0)$$

ただし,  $C_*$  は  $u_0, v_0$  の  $L^1$ -norm と  $L^\infty$ -norm だけに依存する。

従って Lemma 2 の  $C_*$  に対して十分小さな  $\varepsilon$  (従って十分大きな  $T$ ) とすると下の図の様な  $k_1(t), k_2(t) > 0$  ( $t \geq T$ ) が存在する。



この直線の傾きは  $\pm C_* t^{-\frac{m}{m+1}}$

Lemma 2 より  $(\psi(x, t))^{m-1}$  はこの直線の上にある  
(折れ線)

さらに  $k_* > 0$  が存在して  $k_1(t), k_2(t) \geq k_*$  ( $t \geq T$ )

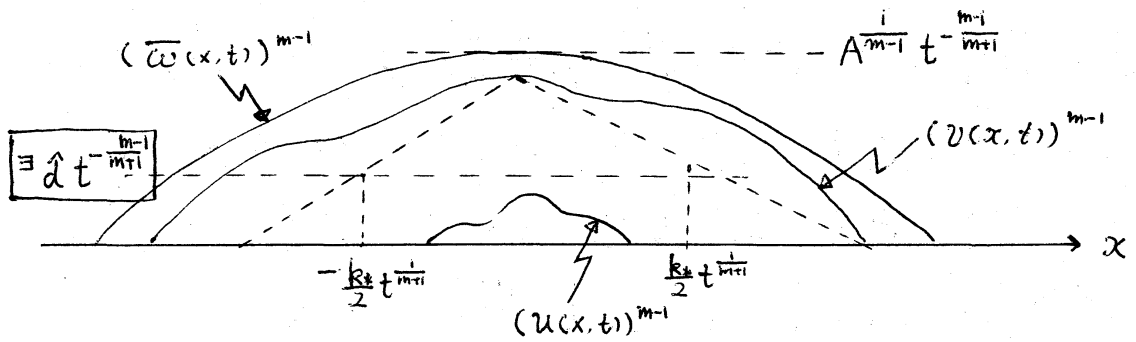
ここで  $(-1)^i \tilde{J}_{i\psi}(t) \sim t^{\frac{1}{m+1}}$  が示された。

さらに  $\frac{2-m}{2} < \frac{1}{m+1}$  ( $1 < m < 2$ ) に注意すると定理

H.V.B.K. と Lemma 1 より, 十分大きな  $t > 0$  に対して

$\sup_{\omega} u(\cdot, t) \subset \left[ -\frac{k_*}{2} t^{\frac{1}{m+1}}, \frac{k_*}{2} t^{\frac{1}{m+1}} \right]$  が成立する。ここで

$\omega \geq v$  にも注意すると十分大きな  $t > 0$  に対して次の様な状況になる。



従って図のような  $\hat{d} > 0$  が存在する。つまり

$$\exists T_2 > 0, \exists d = \hat{d}^{\frac{1}{m-1}} > 0 \text{ s.t. } t \geq T_2 \text{ なるとき}$$

$$v(x, t) \geq d t^{-\frac{1}{m+1}} \quad \forall x \in \text{supp } u(\cdot, t).$$

そこで次の Lemma を用意する。

Lemma 3.  $i = 1, 2$  に対して  $f_i \in$

$$\begin{cases} f_{it} = (f_i^m)_{xx} - P_i f_i & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ f_i(\cdot, 0) = f_{i0} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

の解とする。ここで  $P_1(x, t) \geq P_2(x, t) \geq 0$  in  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$

$f_{i0}(x) \leq f_{j0}(x)$  in  $\mathbb{R}$  なるとき  $f_1(x, t) \leq f_2(x, t)$  が成立する。

そのとき次の解を考える。

$$\begin{cases} u_t^* = (u^{*m})_{xx} - (d t^{-\frac{1}{m+1}}) u^* & \text{in } \mathbb{R} \times [T_2, \infty) \\ u^*(\cdot, T_2) = u(\cdot, T_2) & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{*t} = (u_*^m)_{xx} - (A^{\frac{1}{m-1}} t^{-\frac{1}{m+1}}) u_* & \text{in } \mathbb{R} \times [T_2, \infty) \\ u_*(\cdot, T_2) = u(\cdot, T_2) & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

そのとき  $d t^{-\frac{1}{m+1}} \leq v(x, t) \leq A^{\frac{1}{m-1}} t^{-\frac{1}{m+1}}$ ,  $t \geq T_2$ ,

$x \in \text{supp } u(\cdot, t)$ . に注意すると



$$u_*(x, t) \leq u(x, t) \leq u^*(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [T_2, \infty)$$

従って,  $u_*$ ,  $u^*$  について調べればよいがこの二つの解は次の様にして求めることができる。  $\omega(x, t) \in (E_2)$  (又  $(E_5)$ )

の解として  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t) \in$

$$\alpha'/\alpha = -d t^{-\frac{1}{m+1}} \alpha - (A t^{-\frac{1}{m+1}}) \quad \beta(t) = \int_0^t \alpha(s) ds + \beta_0$$

として  $\alpha(T_2) \omega(x, \beta(T_2)) = v(x, T_2)$  とおくと

$\alpha(t) \omega(x, \beta(t))$  が  $u^*$ ,  $u_*$  の解となる。  $\omega$  についてはよく知られているから、上の変換により定理の中の  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}$ ,  $\text{supp } u(\cdot, t)$  に対する事柄がわかる。

### 補足 1

$1 < m < 1 + \frac{1}{3}$ ,  $2 < m$  に対して結果が証明できないのは Lemma 2 が neck になっている。しかしながら,  $m=1$  について計算してみると (もともとこのときは  $\text{supp } u(\cdot, t) = \text{supp } u(\cdot, 1) = \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  であるが、)

$$\log \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim -t^{\frac{1}{2}}, \quad \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{\frac{1}{2}}$$

これは定理の結果に  $m=1$  を代入した結果となっている。

### 補足 2

(E1) の  $-u \cdot v$  の項を拡張して  $-u^n v^n$  としてと同様の証明方法である程度のことか計算できるので、以下でその計算結果を書きくわえる。図の様に

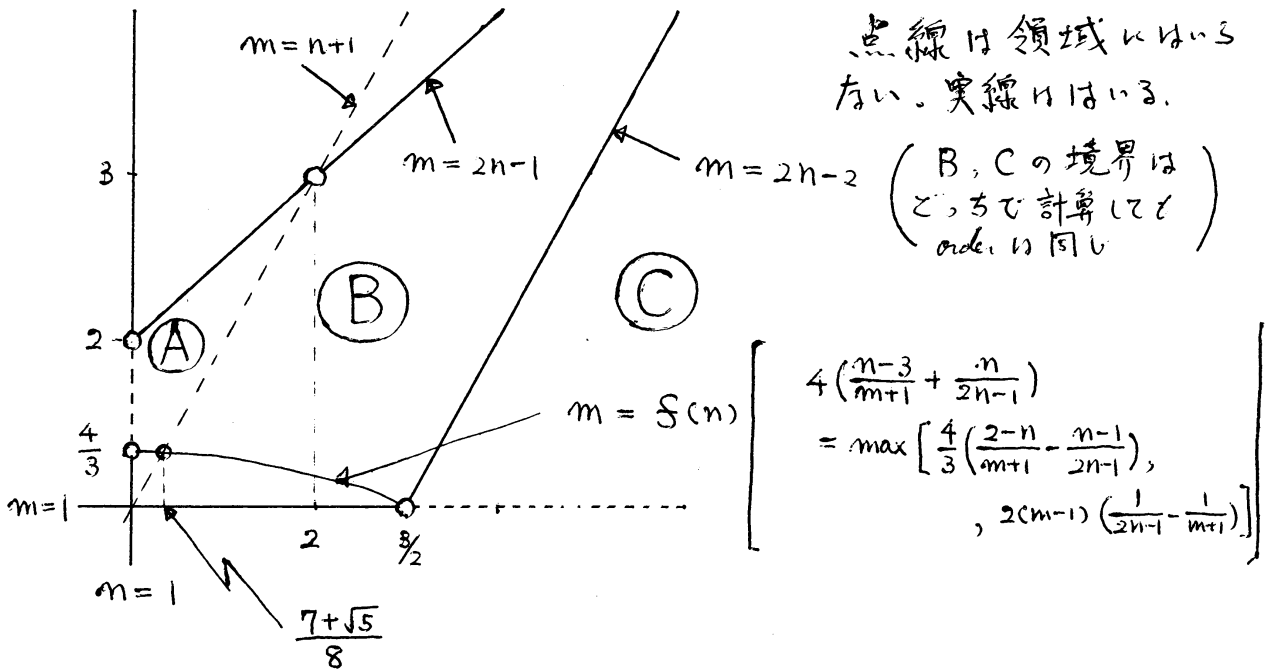
$$A = \left\{ (m, n) \in (1, \infty) \times (1, \infty) \mid S(n) \leq m \leq n+1, 1 < m < \frac{7+\sqrt{5}}{8} \right\}$$

$\text{or } 2n-1 < m \leq n+1 \}$

$B = \{(m, n) \in (1, \infty) \times (1, \infty); \mathcal{F}(m) \leq m < 2n-1 \quad (\frac{7+\sqrt{5}}{8} < n < \frac{3}{2})$

$\text{or } 2n-2 \leq m < 2n-1 \quad (\frac{3}{2} < n < 2) \text{ or } 2n-2 \leq m \leq n+1 \quad (2 < n)\}$

$C = \{(m, n) \in (1, \infty) \times (1, \infty); m \leq 2n-2 \}$



A, B, C と  $\mathcal{U}$  の order は

$|\mathcal{U}(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-\frac{1}{m+1}}, \quad (-1)^i \mathcal{J}_{i\mathcal{U}}(t) \sim t^{\frac{1}{m+1}}$

である。

$\mathcal{U}$  の order について.  $\mathcal{J}_{i\mathcal{U}} \in \text{supp } \mathcal{U}(\cdot, t)$  の境界とすると ( $i=1, 2$ )

①  $\bigcup_{t>0} \text{supp } \mathcal{U}(\cdot, t)$  は有界集合,  $|\mathcal{U}(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-\frac{1}{n-1}(1-\frac{n}{m+1})}$

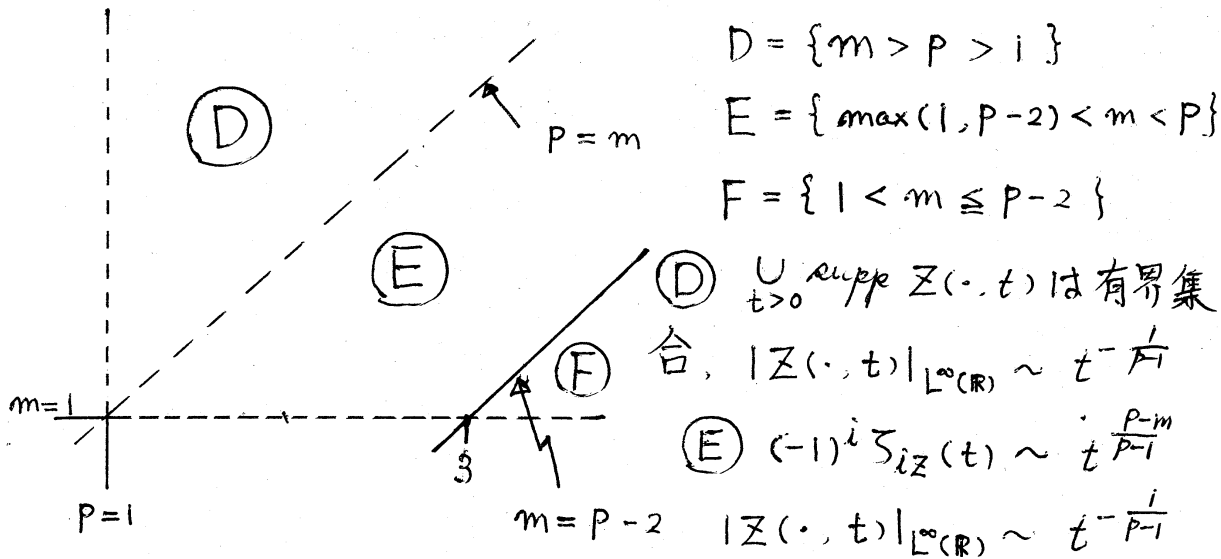
②  $(-1)^i \mathcal{J}_{i\mathcal{U}}(t) \sim t^{\frac{1}{2}\{1-\frac{(m-1)}{n-1}(1-\frac{n}{m+1})\}}$ ,  $|\mathcal{U}(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{\frac{-1}{n-1}(1-\frac{n}{m+1})}$

③  $(-1)^i \mathcal{J}_{i\mathcal{U}}(t) \sim t^{\frac{1}{m+1}}$ ,  $|\mathcal{U}(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-\frac{1}{m+1}}$

ただし A と B の境界では

$(-1)^i \mathcal{J}_{i\mathcal{U}}(t) \sim \log t$ ,  $|\mathcal{U}(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-\frac{1}{m-1}}$

となることがわかる。この結果と比較するために  $u_0 = v_0$  の  
 場合<sup>(\*)</sup> (Eg 4) の解について述べると、次の様になる



④  $(-1)^i \delta_{iZ}(t) \sim t^{\frac{1}{m+1}}$ ,  $|Z(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-\frac{1}{m+1}}$

ただし D と E の境界では  $(-1)^i \delta_{iZ}(t) \sim \log t$ ,  $|Z(\cdot, t)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sim t^{-1}$ .

ここで A と D, B と E, C と F が対応しているが今  $p=2$  より  $u_0 = v_0$  と  $u_0 \neq v_0$  のときでは order に少しづつ違いがあることがわかるが 全体の性質については同様であることがわかる。(少なくとも本稿の結果が適用できる領域については) つまり、三つの部分にわかれて、一つは  $\bigcup_{t>0} \text{supp } u(\cdot, t)$  が有界な部分、一つは (Eg 2) の解とその order がかわらない部分、そしてその二つの領域には含まれる部分 ( $\bigcup_{t>0} \text{supp } u(\cdot, t) = \mathbb{R}$  であるが、その order は (Eg 2) のそれとは異なる。) となっている。

## 参考文献

(\*1) この方程式の結果については

L. A. Peletier, *The porous medium equation, in Application of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences*, H. Amman et al., eds., Pitman, New York (1981), pp. 229-241.

と参照。

(\*2) この解についても (\*1) の文献参照。

(\*3) 反応と常微分方程式で表わした文献として

数理解析とその周辺 6 生物学におけるダイナミカルシステム  
の理論 R. ローゼン著. 産業図書。

の第二章を参照した。

(\*4) (\*3) と同様。

(\*5) この定理に関しては

M. A. Herrero and J. L. Vázquez, *The one-dimensional non-linear heat equation with absorption: Regularity of solutions and interfaces*, *SIAM J. MATH. ANAL.* 18 (1987), pp. 149-167.

の定理及び参考文献と参照した。

(\*6)  $(\varepsilon_2)$  の  $\tau \rightarrow \infty$  の詳しい挙動については

J. L. Vázquez, *Behavior of the velocity of one-dimensional flow in porous media*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 286 (1984),

pp. 787-802.

を参照した。

(\*7) ( $\varepsilon_2$ ) の漸近挙動については(\*5)で述べた文献と

A. S. Kalashnikov, *The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat conduction with absorption*, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 14(4) (1974), pp. 891-905.

を参照した。