

投影図の自動理解へ向けて

東大・工 杉原厚吉 (Kokichi Sugihara)

1. はじめに

3次元空間に存在する立体の2次元平面への投影図からもとの立体を復元する研究は、ロボットの眼の開発、工業用図面の自動読取りなどへの応用を念頭において1960年代から盛んに行われている[1, 2, 3]. そこには、投影図が1枚(単眼視)か2枚(両眼立体視)か3枚(三面図の自動理解)か、隠れて見えない線が描かれているか否か、対象物体は多面体か曲面物体も含むか、など多様なバリエーションがあり、それぞれ難しい問題を含んでいる. 本稿では、対象を多面体に限定し、その1枚の投影図から立体を復元する問題の数理的側面[4]について考える.

2. 立体構造の候補の抽出

2.1. 問題

多面体とは、有限個の平面だけで囲まれた物体のことで、必ずしも凸である必要はなく、また穴が貫通していてもかまわない. 多面体の表面を構成する平面多角形(内部に多角形の穴があいていることもある)を面、2個の面の境界を稜線、稜線の端点を頂点と呼ぶ. このような多面体を一般の姿勢において描いた単面図が与えられるものとする. ただし、多面体が一般の姿勢にあるとは、視点が多面体のどの面の延長上にもない状況を意味するものとする. ここで考える単面図は、実際の多面体シーンの写真画像から稜線抽出処理を施して得られる線画や、人が描く線画などのことである. したがって、必ずしも正しく多面体を表す図ばかりとは限らず、頂点の位置がずれていたり、あるべき線が欠けていたりするかもしれない. 目標は、このような単面図だけがあたえられたとき、それが正しく多面体を表しているか否かを判定し、正しい場合には、そこに描かれている多面体の構造を抽出するための、機械的な手続きを構成することである. もちろん、単面図では奥行き情報が欠けているから、多面体の正確な形を一義的に決定することは不可能である. したがって、頂点・稜線・面が互いにどのように接続して物体を構成しているのかという“構造的”な情報を抽出することが目標である.

2.2. ラベルづけによる解釈

与えられた線画から、そこに描かれている立体の構造を読み取るという作業が、驚くほど単純な機構である程度は実現できることを最初に示したのは Huffman [1] と Clowes [5] である。彼らの方法は次のとおりである。

まず、線画の中に現れる線分を、それが表す稜線の物理的属性に従って3種類に分類し、ラベルをつける。すなわち、(i) 稜線の両側の面が見えていてそれらの面が尾根をなす場合は + のラベルを、(ii) 稜線の両側の面が谷をなす場合は - のラベルを、(iii) 稜線の片側の面だけが見えていてもう一方の面は裏側に隠れている場合は矢印を、それぞれの線分につける。ただし、矢印の向きは、右側が物体の面で左側は背景となるように選ぶ。このとき、“3個の面が交わってできる頂点の見え方は図1に示す12種類しかない”ことが証明できる [1]。このリストをあらかじめ用意しておけば、線画の中のすべての頂点の形が図1に含まれるような線のラベルの組合せを見つけることによって、多面体の構造を抽出することができる。

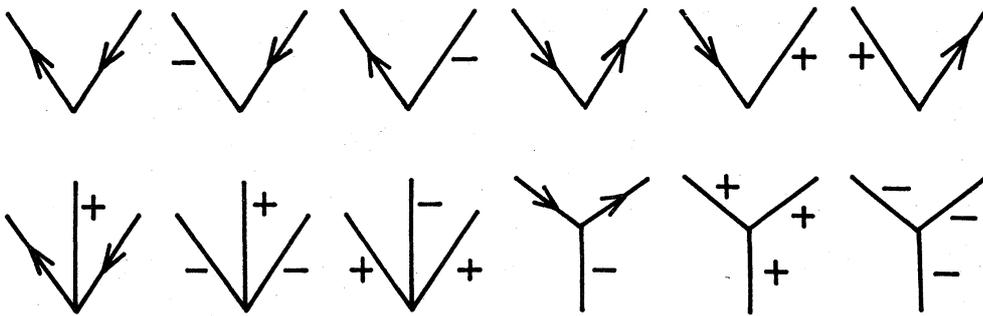


図1. 頂点の見え方のリスト

たとえば、図2(a)の線画では(a')のようなラベルづけが見つかり物体の構造が得られる。しかも、最も外側の線を時計回りの向きをもった矢印のついた輪郭線とみなす(これは立体が線画の画面からはみ出していないと仮定することに相当する)と、矛盾のないラベルの組は図2(a')に示す一組しかないことがわかる。一方、(b)の線画では(b')に示すように矛盾のないラベルの組は存在せず、その結果、(b)の線画が間違っていることが判定できる(2個の平面は一直線で交わるはずなのに、(b)の線画では、上の面と左手前の面とが2本の交線をもっているから、これは多面体を表していない)。

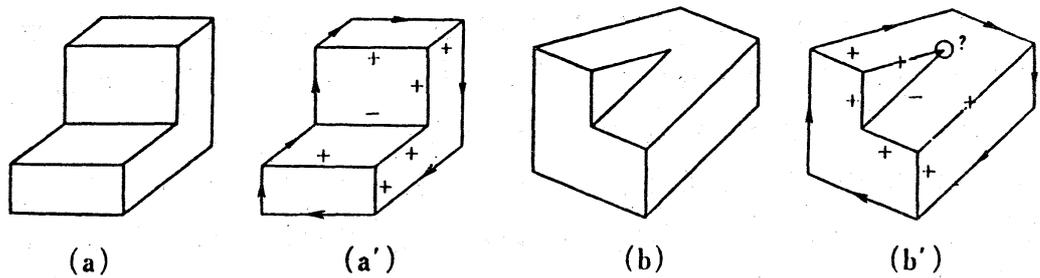


図2. ラベルづけによる構造の抽出

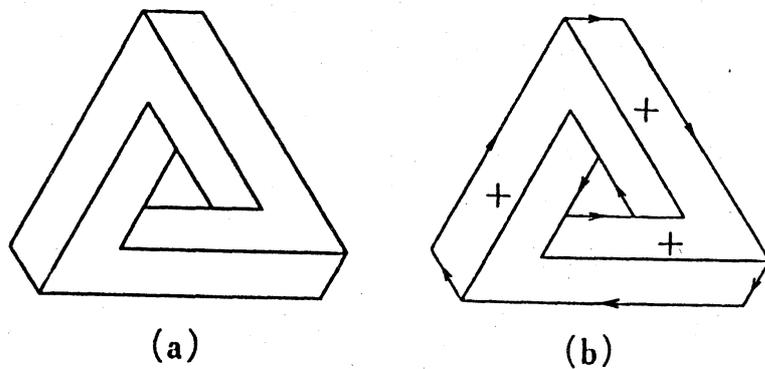


図3. ラベルづけの限界

このように、図1に示した頂点の一覧表は、線画という“言語”を解釈するための“辞書”であるといえよう。この手法は、その後、陰影線つきの線画[6]、隠れ線つきの線画[7]、紙細工の線画[8]など、種々の線画に対して拡張されている。

しかし、矛盾なくラベルがつくということは、しよせん、線画が正しく多面体を表すための必要条件にすぎない。たとえば、多面体の線画としてはあり得ない図3(a)の場合でも、(b)に示すとおり図1に反しないラベルがついてしまう。

すなわち、線画に対して矛盾のないラベルの組が得られたということは、その線画を立体として解釈するための一つの“候補”が得られたことを意味するにすぎない。この候補が真に正しい解釈であるか否かは、さらに調べなければならない。

3. 正しい線画と誤った線画の峻別

前節で見たとおり、図1に反しないラベルがつくということは、その線画が多面体を表すための一つの必要条件にすぎない。本節では、既にラベルのついた線画がその

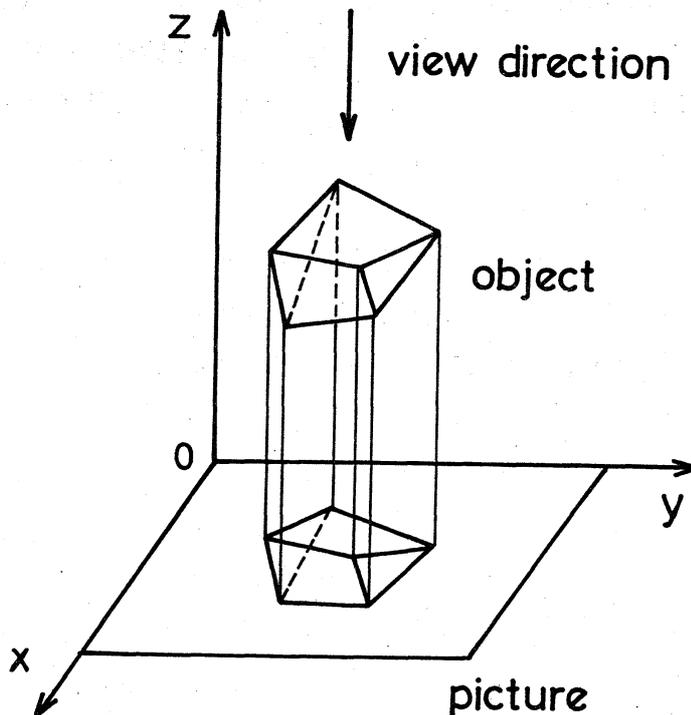


図 4. 多面体とその垂直投影図

ラベルで表される立体構造を本当に表し得るか否か、を判定する方法を構成する。

3.1. 線形方程式・不等式による拘束の表現

図 4 に示すように、3次元 (x, y, z) 直交座標系に対して静止している多面体を $x-y$ 平面へ垂直に投影して得られる線画を考えよう。多面体は視線方向 (z 軸) に平行な面はもっていないものとする。以下では、線画には、図 1 に反しないラベルが既についているものとする。ここでは、線画を投影図としてもつ多面体のある線形方程式・不等式系の解として特徴づける。そのために、線画から四つ組 $S = (V, F, R, T)$ を次のように構成する。

線画の線は平面をいくつかの連結領域に分割する。これらの連結領域の集合と 1 対 1 対応する集合として F を定義する。 $f_i \in F$ に対して、 f_i に対応する連結領域を $[f_i]$ で表す。 F の要素 f_i は立体の見える面を表し、 $[f_i]$ はそれに対応する投影図上の領域を表す。

V は立体の頂点の集合を表すもので、 $V = \emptyset$ から出発して線画中の各頂点 q に対して次のように要素が生成され V に追加される。 q に接続する線のうち矢印のラベル

のついたものが k 本あるとする。ただし、矢印のラベルのついた線が 0 本のときは、便宜上 $k = 1$ とする。このとき、矢印のラベルのついた線によって、 q の周りの領域は k 個の扇形の領域に分割される ($k = 1$ のときには、 q の周り 360 度を一つの扇形領域とみなすことにする)。それぞれの扇形領域に対して一つずつの要素 v_1, \dots, v_k を作り V に追加する。

R は、立体の頂点とそれが載っている面の対の集合で、 V の要素 v に対して、 v とそれに対応する扇形領域の中に含まれる面との対の全体である。すなわち、各 $v \in V$ に対して、 v に対応する扇形領域に含まれる連結領域を、 $[f_1], [f_2], \dots, [f_i]$ とするとき、 $(v, f_1), (v, f_2), \dots, (v, f_i)$ が R の要素となる。このようにして R を作ったとき、 $(v, f) \in R$ ならば、“頂点 v は面 f の上に載っている”という。

T は、線画に描かれている立体の要素間の遠近関係を表すもので、 T の要素は $(\alpha, \beta, \text{front})$, $(\alpha, \beta, \text{properly-front})$ あるいは $(\alpha, \beta, \text{properly-behind})$ という形をしている。ただし、 α は V の要素、 β は $V \cup F$ の要素である。 $T = \emptyset$ から出発して、線画中の各線 e に対して、次のように T の要素を生成していく。 e が + または - のラベルをもっているときには、 e の両側の面を f_i, f_j とし、 f_i の上に載っている頂点で、線画平面上において e に対して f_i 側にあるものの一つを v_k とし、 e のラベルが + なら $(v_k, f_j, \text{properly-behind})$ を、 e のラベルが - なら $(v_k, f_j, \text{properly-front})$ を T に加える。 e が矢印のラベルをもっているときには、 e の始点、終点、中点において、次のように T の要素を生成する。 e の始点において 2 本以上の線が矢印のラベルをもっていたら、 e のすぐ右側の扇形領域に対応する頂点 v_1 と e のすぐ左側の扇形領域に対応する頂点 v_2 に対して、要素 (v_1, v_2, front) を T に追加する。同様に、 e の終点において 2 本以上の線が矢印のラベルをもっていたら、 e のすぐ右側の扇形領域に対応する頂点 v_1 と e のすぐ左側の扇形領域に対応する頂点 v_2 に対して、要素 (v_1, v_2, front) を T に追加する。また、 e の中点と (x, y) 座標が一致する頂点 v を生成して V に追加し、さらに、 e の右側の連結領域を $[f_i]$ 、左側の連結領域を $[f_j]$ とするとき、 R の要素 (v, f_j) 、 T の要素 $(v, f_i, \text{properly-behind})$ を生成する。

以上のように $S = (V, F, R, T)$ を構成したら、方程式・不等式系を次のように生成する。

各 $(v_i, f_j) \in R$ に対して、

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \quad (1)$$

を生成する。ただし、 (x_i, y_i) は頂点 v_i に対応する線画平面上の点の (x, y) 座標で

あり、既知定数である。したがって、式(1)は未知数 z_i, a_j, b_j, c_j に関して線形である。

このような線形方程式をすべて集めたものを

$$Aw = 0 \quad (2)$$

とおく。ただし、 A は定数行列で、 w は未知数ベクトル $w = {}^t(z_1, \dots, z_n, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m)$ である (集合 X の要素の数を $|X|$ で表すとき、 $n = |V|, m = |F|$ である)。

[注1] 上の定式化では、線画が立体の垂直投影図である場合だけを考えた。しかし、線画が立体の中心投影図である場合にも、以下のようにまったく同様の代数的構造が得られる。図5に示すように、投影の中心(視点)を原点に置き、線画平面を $z = 1$ とする。頂点 v_i の線画平面への投影点の位置ベクトルを $p_i = (x_i, y_i, 1)$ とおくと、頂点 v_i 自身の位置ベクトルは $x = p_i/t_i$ と表すことができる。ただし、 t_i はあるスカラー量である。さらに面 f_j の載っている平面の方程式を、パラメータ $d_j = (a_j, b_j, c_j)$ を用いて、 $d_j \cdot x = -1$ と表すことにする。この式は原点を通る平面を表すことができないが、物体は一般の姿勢に置かれているものと仮定しているから不都合は生じない。さて、このとき、頂点 v_i が面 f_j の上にあるという条件は $d_j \cdot p_i + t_i = 0$ と表され、これを書き直して

$$a_j x_i + b_j y_i + t_i + c_j = 0$$

を得る。 x_i, y_i は線画から決まる定数であるから、この式は、 t_i, a_j, b_j, c_j を未知数とする線形方程式である。そしてこれは、未知数の意味の違いを除いて式(1)とまったく同じ形をしている。すなわち、線画を垂直投影図とみなそうと中心投影図とみなそうと、面と頂点に関する代数的構造には何ら差はない。このことから、“線画がある多面体の中心投影図なら、その線画を垂直投影図としてもつ(別の)多面体が存在する”という性質を導くことができる。本稿では、線画は垂直投影図であるものとして話を進めるが、以上の理由から、本稿の結果は中心投影図に対しても成立する。

また、 T の要素からは次のようにして線形不等式を構成する。 T の要素で (v_i, v_j, front) の形のものに対しては

$$z_i \geq z_j, \quad (3.1)$$

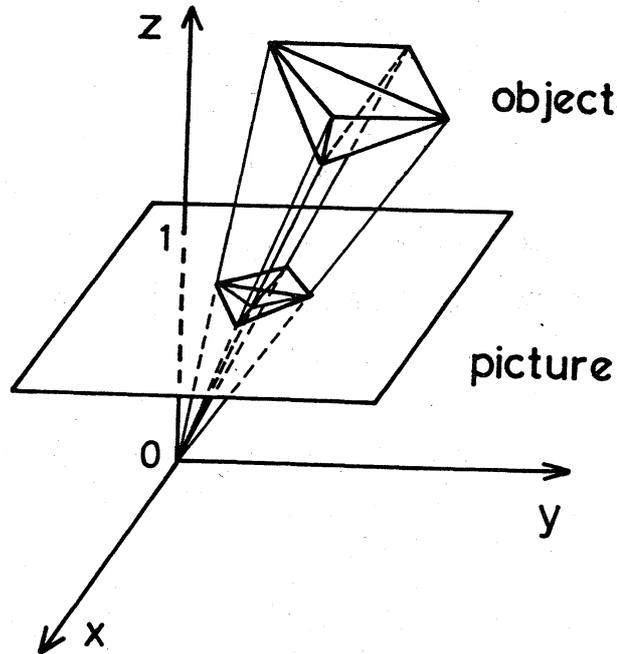


図 5. 多面体とその中心投影図

$(v_i, f_j, \text{properly-behind})$ の形のものに対しては

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j < 0, \quad (3.2)$$

$(v_i, f_j, \text{properly-front})$ の形のものに対しては

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0 \quad (3.3)$$

を生成する. (3.1) ~ (3.3) の形のすべての線形不等式を集めたものを

$$Bw > 0 \quad (4)$$

と書く. ただし, w は式 (2) におけるものと同じ未知数ベクトルである.

3.2. 正しい線画の理論的判定法

線画が正しく多面体を表すためには, 式 (2), (4) を同時に満たす解が存在しなければならない. 逆に, 式 (2), (4) を満たす解が与えられれば, それをもとにして多面体を構成できることが証明される [4]. したがって, 次の定理が得られる.

[定理 1] (線画の代数構造) ラベルのついた線画が正しく多面体を表すための必要十分条件は、式 (2), (4) を同時に満たす解が存在することである。

式 (2) と式 (4) を満たす解は、線形計画問題の実行可能解とみなすことができる (ただし、線形計画問題の標準形では不等号に等号も許すので、上の問題を線形計画問題に帰着させるためには少し工夫がいる [4])。そして、実行可能解の存在を確かめる手法は単体法として確立されている [9]。したがって、線画が正しく多面体を表しているか否かの判定問題は、“原理的”にはこの定理で解決されたことになる。

しかし、“実用的”にはまだ次の二つの問題が残っている。

第一に、単体法を計算機で実行するためには、式 (2) が線形独立な方程式集合でなければならない。式 (2) の係数行列 A の中にほかに線形従属な行ベクトルが含まれていると、数値計算のわずかな誤差によっても A の階数が正しくない値になってしまうため、解の存在が正しく判定できない。したがって、単体法を適用するためには、あらかじめ式 (2) の中からほかに線形従属な方程式を除いておかなければならない。

第二に、いっそう重大な問題であるが、定理 1 は数学的に厳密であるために線画が少しでも誤りを含むと正しくないと判定されてしまう。たとえば、人間なら図 6(a) の線画から三角錐台という立体構造を読み取ることができるが、定理 1 に従って判定すると、この線画は誤っているという判定結果が得られてしまう。なぜなら、三角錐台の 3 個の側面は延長すると 3 次元空間の 1 点で交わるはずであるから、この線画においては側面の 3 本の稜線は延長すると 1 点で交わらなければならない。しかし、(b) に示すように、3 本の稜線を延長しても 1 点では交わらない。すなわち、この線画は三角錐台の投影図にはなっていないのである。このことが、定理 1 を使った判定の結果には厳密に反映されてしまう。この点において、定理 1 と人間の視覚には大きな隔りがある。

たとえ人間が、図 6(a) の線画を描くときは側面の 3 本の稜線が 1 点で交わるように描かなければならないと気がついても、電子ペンで計算機に向かって描くときにはデジタル化の誤差が入り込むから、正しく描こうという努力そのものが意味をなさない。したがって、線画を使って計算機に立体形状情報を入力するためには、定理 1 のもっている過剰な厳密さをなんとかして取り除かなければならない。だからといって、前章のラベルづけだけで処理を止めてしまうわけにはいかない。ラベルづけだけでは、図 3 のような誤った線画をふるい落とせないことは、すでに見てきたとおりで

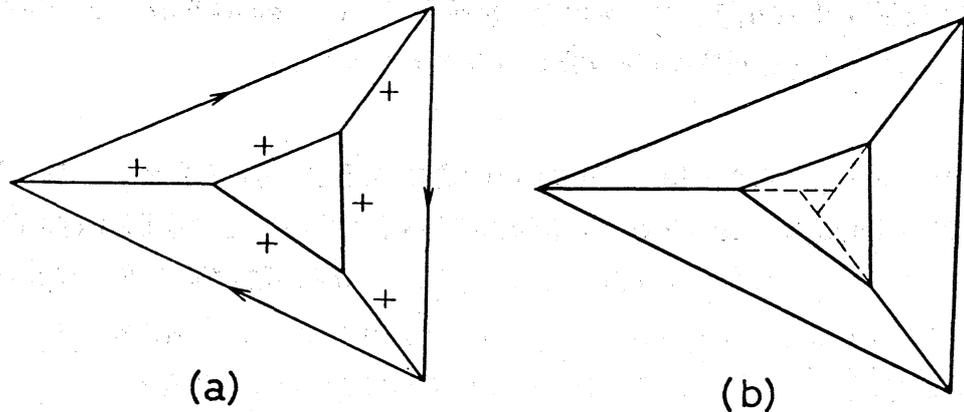


図 6. 頂点のずれに敏感な線画

ある。

4. 過剰な厳密さの克服

前節においては、線画が正しく多面体を表すための必要十分条件を導いた。ところが、それが数学的に厳密であったために、少々のは誤りは許すという人間の寛容な視覚からはかけ離れたものとなってしまった。本節では、数理的な処理をさらに押し進めることによって、人間と同様に寛容な視覚機能が機械でも実現できることを示す。

4.1. 頂点位置誤差に敏感な線画と鈍感な線画

図 6(a) の線画は、頂点の位置が少しでもずれると正しく多面体を表さなくなることはすでに見た。一方、図 7 の線画では、頂点の位置が少しくらい変動してもそれが正しく多面体を表しているという性質は乱されない。そこで、まずこの 2 種類の線画の違いを明確にしよう。

四つ組 $S = (V, F, R, T)$ の最初の 3 個の集合からなる三つ組 $I = (V, F, R)$ を隣接構造と呼び、 R の要素を隣接対と呼ぶ。頂点の線画平面上での座標値 $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ を互いに異なる不定元とみなしたとき、頂点は一般の位置にあるという。頂点が一般の位置にあるときには、 $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ の間に何ら特別の代数的関係はなく、したがって、行列 A の各小行列の階数は、頂点の位置を動かしたときとり得る値の中で最大となる。直観的には、頂点が一般の位置にあるとは、線画平面上で 3 個の頂点が一直線上に並んだり 3 個の稜線が 1 点を共有したりというような特殊な位置関係には

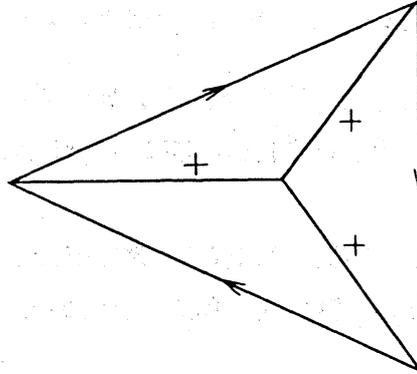


図 7. 頂点のずれに鈍感な線画

ない，という程度の意味である．頂点が一般の位置にあれば，行列 A およびその小行列の階数は I のみによって決まる．一方，式 (2) はすべての面が同一の平面に載るといふ解を常にもつ．そこで，頂点が一般の位置にあるとき式 (2) が面は互いに異なる平面に載っているという性質を満たす解をもつならば， I は（頂点位置誤差に）鈍感であるといふ，そのような解をもたないならば，（頂点位置誤差に）敏感であるといふことにする．

定義から明らかのように，鈍感な隣接構造をもった正しい線画（たとえば図 7 の線画）は，頂点位置を線画平面上で勝手に微少変化させてもやはり正しい線画である．すなわち，頂点の座標値（したがって行列 A の要素）がデジタル化の影響などで変動しても，式 (2)，(4) を満たす解が存在するという性質は変わらない．一方，敏感な隣接構造をもった線画（たとえば図 6(a) の線画）は，頂点を勝手に動かすと正しく多面体を表さなくなる．したがって，デジタル化の誤差が不可避な現実のデータ表現では，こういう線画は必然的に誤った線画になってしまう．そこでこの場合は，線画が正しいか否かではなく，正しい線画からのずれが許容範囲内か否かという観点から解析を行わなければならない．

4.2. 正しい線画の実用的判定法

前節で定義した敏感・鈍感という概念は次の定理 2, 3 に述べる性質をもち [4]，これを利用すると，線画が正しく多面体を表しているか否かを判定するための“実用的な”手続きを構成することができる．

[定理 2] (敏感・鈍感の識別) 隣接構造 $I = (V, F, R)$ が鈍感であるための必要十分条件は, $|X| \geq 2$ を満たすすべての $X \subseteq F$ に対して

$$|V(X)| + 3|X| \geq |R(X)| + 4 \quad (5)$$

が成り立つことである。ただし, $V(X)$ は X に属するいずれかの面に載っている頂点の集合, $R(X)$ は X に属するいずれかの面を含む隣接対の集合である。

[定理 3] (式 (2) が線形独立であるための条件) 隣接構造 I が鈍感でかつ頂点が一般の位置にあるならば, 式 (2) は線形独立な方程式集合である。

定理 2 の重要性は, 隣接構造が鈍感であるか否かを組合せ論的計算 (実数値の計算ではなく整数値の計算) のみによって判定できるという“実用性”にある。もっとも, このままでは不等式 (5) を 2^m 回 (m は面の数) 確かめなければならないから, 計算量の観点からは実用的ではないように見えるが, この手間は $O(m^2)$ にまで減らせる [10, 11].

一方, 定理 3 は, 鈍感な隣接構造をもつ線画に対して, 単体法が安心して使えることを保証する。

定理 1, 2, 3 を組合せると, 入力線画 D を正しいと“みなすべきか否か”の判定を次のように実行できる。

まず, D の隣接構造 $I = (V, F, R)$ が鈍感か否かを定理 2 を利用して調べる。鈍感なら, 単体法の手法を使って式 (2), (4) を満たす解を探し, 解が存在すれば D は正しく, 存在しなければ D は誤りであると判定する。 I が鈍感でない場合は, I からいくつかの隣接対を除いて鈍感で極大な仮想的隣接構造 $I^* = (V, F, R^*)$ (ただし $R^* \subseteq R$) を作り, $R - R^*$ の要素に対応する方程式を式 (2) から除いた方程式集合

$$A^*w = 0 \quad (6)$$

と不等式 (4) を組合せて, 解の存在を調べる。このとき, 行列 A^* の行ベクトル集合は線形独立であることが定理 3 によって保証されているから, デジタル化の誤差によって階数が増える心配は無い。さて, 解が存在しなければ D は誤りであると判定する (図 3 の線画はこの段階で誤りであると判定される)。解が存在する場合には, その解の一つを選んで 3 次元空間での頂点と平面の配置を作る。この配置の $x-y$ 平面への垂直投影図は, 先ほど除いた隣接対 ($R - R^*$ の要素) にかかわる頂点以外で

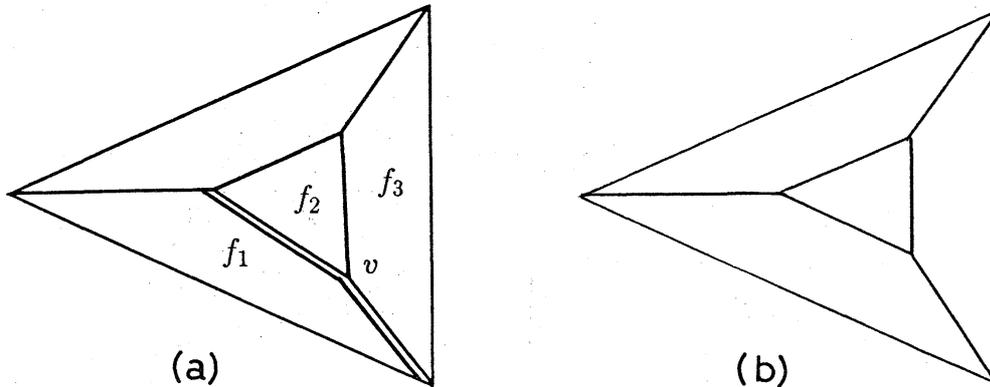


図 8. 線画の修正

は、与えられた線画と一致する。一致しない頂点の正しい3次元位置は、上で配置された平面同士の交点として求められ、それを $x-y$ 平面へ投影することによって線画平面上での正しい位置を求めることができる。このようにして頂点位置を修正した線画ともとの線画を比較し、何らかの基準で誤差が許容範囲のうちであれば（たとえば修正に要した頂点移動距離がある値以下であれば） D は正しいと判定し、そうでなければ誤りであると判定する。

たとえば図6(a)の線画では $|V| = 6$, $|F| = 4$ であり、またここには3角形面が1個と4角形面が3個あるから $|R| = 3 \times 1 + 4 \times 3 = 15$ である。 $|V| + 3|F| = 18 < |R| + 4 = 19$ であるから、定理2よりこの線画の隣接構造は敏感であることがわかる。今、図8(a)に示すように、3個の面を f_1, f_2, f_3 と名付けることにする。そして、頂点 v が面 f_1 の上になければいけないという条件を仮想的に取り除き $R^* = R - \{(v, f_1)\}$ とおくと、 $I^* = (V, F, R^*)$ は図6(a)の線画の鈍感で極大な部分隣接構造となる（図8(a)における二重線はこの線の両側の奥行きにギャップがあってもよいことを表す）。 I^* に関する方程式(6)と不等式(4)を組合せた系は解を持ち、その解の一つを使って面と頂点の配置を3次元空間に実際に構成することができる。この配置の $x-y$ 平面への垂直投影図は、頂点 v の位置を除いてもとの線画と一致する。また、 v の正しい位置は、上で構成した空間配置における3面 f_1, f_2, f_3 の交点として求めることができる。それを線画平面へ投影すれば、図8(b)のように正しい線画に修正することができる。

敏感な隣接構造から鈍感で極大な部分隣接構造を取り出す方法は一般にはいくとお

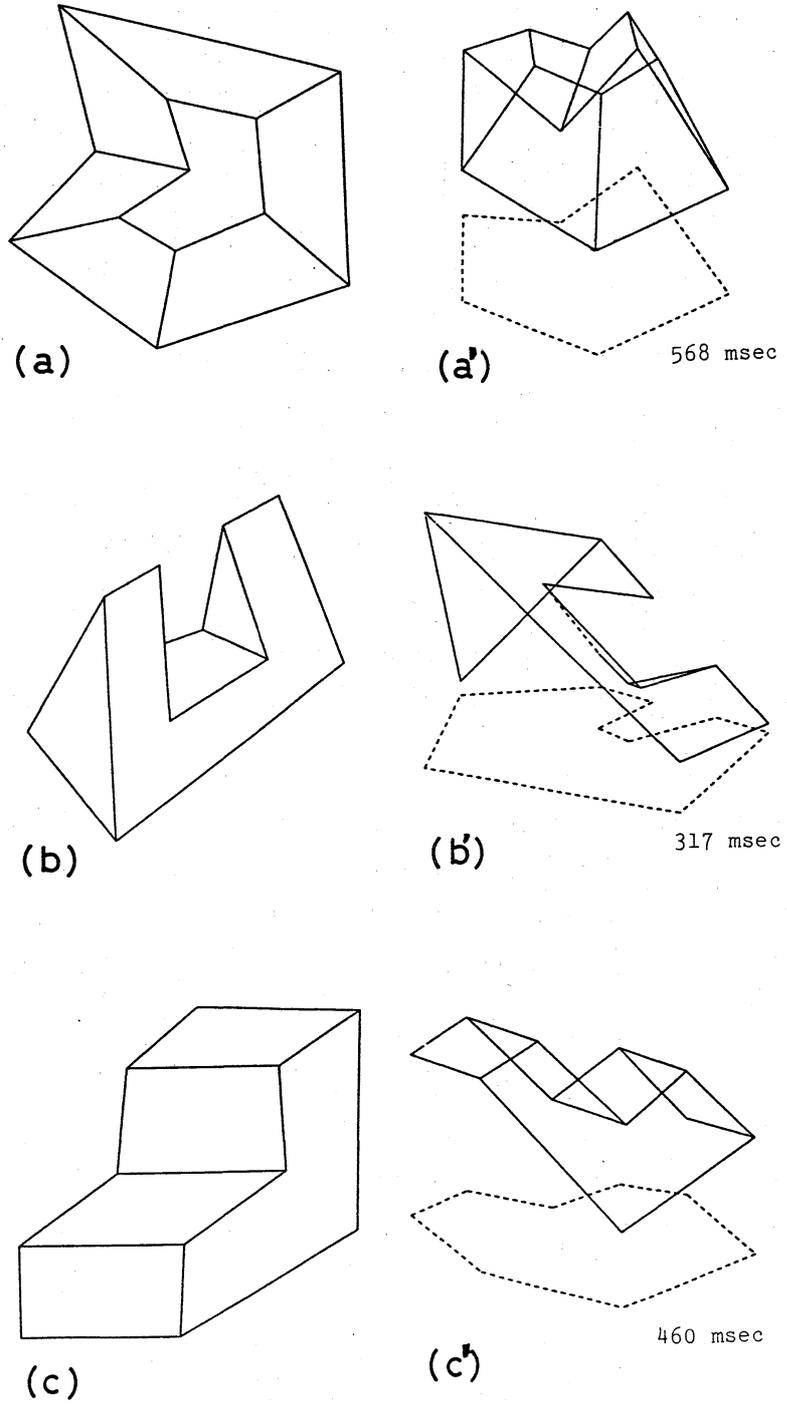


図 9. 実験システムの振舞いの例

りもある。そして、そのどれを採用したかによって線画の修正結果も変わってくるため、上の手続きには大きな任意性がある。しかし、実用上は、長い稜線（ただし長さは線画平面の上で測る）ほどその位置に誤差は少ないと思われるから、長い稜線に隣接した頂点はなるべく動かさない（すなわち、そのような頂点にかかわる隣接対はなるべく残す）という方針で鈍感な部分隣接構造を作れば十分であろう。

図9には、本手法を計算機プログラムとして実現したシステムの入力と出力の対の例を示した。(a), (b), (c)の入力線画に対してシステムが抽出した立体構造を別の角度から眺めて描いた図がそれぞれ(a'), (b'), (c')である。図に記した時間は処理に要したCPU時間である。

以上で、人間と同様に寛容な視覚機能を機械で実現するための手続きが構成でき、目標が達成できたわけである。

さらに、本稿の結果から、無限に多くの平面幾何定理の生成法や、ある種の作図問題の解の一意性の判定法など、いくつかのおもしろい副産物も得られている[4, 12]。

5. おわりに

線画から、そこに描かれている多面体の構造を抽出するための手法を見てきた。これによって、多面体を表す線画と表さない線画を正しく区別できるだけでなく、少しくらいの線画の誤りは自動的に修正することによってその線画を描いた人が伝えたかった立体情報を抽出するという柔軟な処理までできるようになった。

一般に、“柔軟な処理”というものは、数学的に厳密な処理とは無縁のもののように思われがちである。しかし、多面体の線画に対しては、数学的な厳密さを避けたからではなく、あくまでも数学的に厳密な処理を追求したからこそ、このような柔軟な処理が達成できたのである。

線画に限らず、一般に人間同士の情報伝達手段は冗長である。そして、冗長性があるからこそ信頼性の高い情報伝達が可能になっているとはよく言われることである。しかし、冗長な情報表現は、少しでも誤差が入ると情報同士が互いに矛盾する危険性をもっている。人間の場合はなぜかこの矛盾に対して寛容なため、冗長な情報表現が有効に働いているようにみえる。一方、計算機で（すなわち数学的に）処理する場合には、この矛盾が大きな障害となる。したがって、計量的な処理を施す前に、“多過ぎる情報の中から独立なものを選び出す”という非計量的な前処理が必要になる。線画の場合には、定理2によってこれが可能になった。

最近、計量の入り込む以前の原始的な構造の重要性が、制御理論 [13]、数値解析 [14, 15]、建築設計 [16]、機構学 [17] など工学の各方面で協調されつつある。人間と機械との柔軟な対話を実現する研究においても、このような非計量的構造に着目するという観点を積極的に取り入れ、人間の用いる冗長なそしてその結果矛盾を含む情報表現の中から独立なものだけを取り出し矛盾を解消する、という努力をもっともっとうるべきであろう。

参考文献

- [1] D. A. Huffman: Impossible objects as nonsense sentences. in B. Meltzer and D. Michie (eds.): *Machine Intelligence 6*, Edinburgh University Press, 1971, pp. 295–323.
- [2] R. Shapira and H. Freeman: The cyclic order property of vertices as an aid in scene analysis. *Communications of ACM*, vol. 22 (1979), pp. 368–375.
- [3] M. A. Wesley and G. Markowsky: Fleshing out projections. *IBM Journal of Research and Development*, vol. 25 (1981), pp. 934–954.
- [4] K. Sugihara: *Machine Interpretation of Line Drawings*, MIT Press, Cambridge, 1986.
- [5] M. B. Clowes: On seeing things. *Artificial Intelligence*, vol. 2 (1971), pp. 79–116.
- [6] D. Waltz: Understanding line drawings of scenes with shadows. in P. H. Winston (ed.): *The Psychology of Computer Vision*, McGraw-Hill, New York, 1975, pp. 19–91.
- [7] K. Sugihara: Picture language for skeletal polyhedra. *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 8 (1978), pp. 382–405.
- [8] T. Kanade: A theory of Origami world. *Artificial Intelligence*, vol. 13 (1980), pp. 279–311.
- [9] 伊理：線形計画法。共立出版，東京，1986。
- [10] H. Imai: On combinatorial structures of line drawings of polyhedra. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 10 (1985), pp. 79–92.
- [11] K. Sugihara: Detection of structural inconsistency in systems of equations with degrees of freedom and its applications. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 10 (1985), pp. 297–312.

- [12] 杉原：作図問題の解の一意性判定について. 図学研究, vol. 30 (1982), pp. 1-6.
- [13] 伊藤, 他：小特集—構造に着目したシステム・制御理論. 計測と制御, vol. 20 (1981), pp. 641-728.
- [14] 伊理, 恒川, 室田：グラフ論的手法による大規模連立方程式の構造的可解性判定とブロック三角化. 情報処理学会論文誌, vol. 23 (1982), pp. 88-95.
- [15] 杉原, 伊理：組合せ構造の優先によるポロノイ図構成算法の数値的安定化. 1988年度応用数学合同研究集会報告集, 1988. pp. 183-192.
- [16] G. Laman: On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 4 (1970), pp. 331-340.
- [17] F. Freudenstein and E. R. Maki: The creation of mechanisms according to kinematic structure and function. *Environment and Planning, B*, vol. 6 (1979), pp. 375-391.