

スーパーコンピュータを用いた

乱流モデルの検証

東大生研 堀内 潔 (Kiyosi Horiuti)

1. はじめに

スーパー・コンピュータの登場は、数値流体力学に、格段の進歩をもたらし、チャンネル流 (Plane Poiseuille 流) に関しても、低レイノルズ数に限っては、Full Turbulence Simulation (F T S) を可能にした。^[1] そこで、本研究では、 $128 \times 129 \times 256$ の格子点数まで拡張した F T S データ・ベースを用いて、従来 Large Eddy Simulation (L E S) で用いられてきた乱流モデルの直接的な検証を行った。なお、Fourier-Chebyshev 多項式展開を用いた Kim et al.^[1] の F T S データ・ベースを使った同様なテストは、Piomelli et al.^[2] によっても行われているが、本検証では、次の 2 点を強調したい。

(a) Leonard 項と Cross 項の相関

(b) F T S と L E S の並列計算による " 動的 " なテスト

2. 基礎方程式

ここでは、非圧縮の粘性流体を考えるので、基礎方程式は、ナビエ・ストークス方程式 (1) および連続の方程式 (2) である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

以下、 $i, j = 1, 2, 3$ は、各々、下流方向 (x)、壁に垂直な方向 (y)、横断方向 (z) を示し、 x, y, z の各々の方向の速度成分を u_1, u_2, u_3 、または、 u, v, w と書く。ここに、 Re は、壁面摩擦速度とチャンネル幅に基づいたレイノルズ数を表す。十分に乱流に発達した Plane Poiseuille 流では、下流方向 (x) および横断方向 (z) に流れは一様と考えられるので周期境界条件を課し、離散 Fourier 変換による Pseudospectral 法を用いている。ここでは、FTS、LES 何れの計算においても、 y 方向には、2 次の中心差分を用いた。したがって、厳密な意味では FTS とは呼べないが、FTS と LES を並列に走らせて両者の比較をする必要があったため、こちらのデータ・ペー

スを採用した。数値計算法の詳細については、Horiuti^[3]を参照されたい。F T S は、 $Re = 360$ とし、 $128 \times 129 \times 256$ の格子点を用いた。その詳細は Horiuti^[4]、^[5]を参照されたい。さて、このデータ・ベースを利用した L E S 乱流モデルの検証を行うわけであるが、これには、2通りの方法がある。1つは、A priori test と呼ばれるもので、F T S のデータにフィルターを施すことにより、モデル化のない厳密な値を算出し、L E S におけるモデル化による評価との比較を行い、同時により精度の高いモデルを導出する。これはいわばモデルの忠実度を計るテストで、特に、予測可能性を高めるために重要である。残りの一つは、A posteriori test と呼ばれ、A priori test で導出した忠実度の高いモデルを L E S 計算に実際に適用し、乱流強度、相関関数といったレベルでの改善を調べるテストである。もしも、この2つのテストの双方で、旧来のモデルにくらべ改善が見出せれば、それは優れたモデルであると考えられる。

L E S では通常、スケールの分離のために、次のように、全てのスケールをもつ変数 f に対し、フィルター関数 $G(x)$ との convolution

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x_1 - x_1') \int_{-\infty}^{\infty} G_3(x_3 - x_3') f(x_1', x_2, x_3') dx_1' dx_3' \quad (3)$$

により、Grid Scale (GS) 変数 $\bar{f}$ を定義する。ここでは、 G としてはガウシアン形

$$G_1(x) = (\pi/6)^{1/2} / \Delta \exp(-6x^2/\Delta^2) \quad (4)$$

を主として用いる。ただし、フィルターの特性幅を各方向の格子間隔の2倍としてある。

3. A priori test

このテストでは、上述の FTS データ (raw variable u_i, p) に対し、Gaussian 形のフィルターを、 x, z 2方向にかけ、Filtered variable ($\bar{u}_i, \bar{p}$) を生成する。ここでは、Sub Grid Scale (SGS) に十分なエネルギーを含ませるため、式(4)で、 Δ を $4\Delta_i$ としている。但し、 y 方向には陽的にはフィルターを施していない。 u_i, p が LES の Grid Scale を表す変数になる。次に SGS の変数 $u_i' = u_i - \bar{u}_i, p' = p - \bar{p}$ を算出し、これらの変数に対する LES のモデル値を厳密な値と比較する。この比較は、テンソル、ベクトル、スカラーのレベルで

可能であるが、ここでは、テンソル中でも、チャンネル流のような平均流が1次元になる流れでは特に重要な x 方向と y 方向の相関（例えば、レイノルズ・ストレス $\overline{u_i' u_j'}$ ）についての結果のみを紹介する。

(1) 式中の非線形項 $u_i u_j$ を書き下すと、Leonard (L_{ij})、Cross (C_{ij})、および SGS Reynolds stress (R_{ij})とよばれる次の3つのストレスが形成される。

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \\ C_{ij} &= \overline{\overline{u_i u_j'}} - \overline{\overline{u_i'}} \overline{\overline{u_j}} \\ R_{ij} &= \overline{u_i' u_j'} \end{aligned} \quad (5)$$

従来の LES (Moin and Kim^[6], Horiuti^[3])では、 L_{ij} は直接計算され、 R_{ij} は、Smagorinsky モデル

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_e' u_e'} = -\nu_e \left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right] \quad (6)$$

で近似、 $C_{ij} = 0$ と置く方法が採用されてきた。ここに、 ν_e は渦粘性率とよばれ、小さなスケールの運動は粘性的な作用しかしないという仮定のもとに導きだされている。また、Van Driest 型の damping function^{[3], [6]}が Δ に乗ぜられている。実はこれは、Speziale^[7]により指摘されたようにガリレイ不変性を失うという欠点を持ち合わせていた。これに対し、最近 Bardina^[8]により、 C_{ij} 、 R_{ij} を次

のように近似するモデル（以下、Bardina モデル）が提案された。

$$C_{ij} = (\bar{u}_i - \bar{u}_i) \bar{u}_j + \bar{u}_i (\bar{u}_j - \bar{u}_j) \quad (7)$$

$$R_{ij} = (\bar{u}_i - \bar{u}_i) (\bar{u}_j - \bar{u}_j)$$

これは、Scale - similarity モデルとも呼ばれるが、SGS の相関のうち最も GS に近い成分の相関のみを取り出している。したがって、必ずしも散逸が十分であるとは言えないため、これに Smagorinsky モデルを加えて、 $C_{ij} + R_{ij}$ を近似する。以下、近似の精度のテストは、 f と g の相関係数 ($C.C.(f, g) = \langle f'' g'' \rangle / \langle f''^2 \rangle \langle g''^2 \rangle$) rms 値の比 ($R.R.(f, g) = \langle f''^2 \rangle / \langle g''^2 \rangle$)、及び、平均値の比 ($R.M.(f, g) = \langle f \rangle / \langle g \rangle$) を用いて行う。ここに、 $\langle f \rangle$ は f の $x-z$ 平面内での平均値、 f'' は $f - \langle f \rangle$ を表す。

最初のテストは、 C_{12} の近似に対して行う。図 4 は C_{12} の厳密値 (C_{12}^E) と Bardina モデルによる近似値 (C_{12}^B) の $C.C.$ 、 $R.R.$ 、及び、 $R.M.$ の y 分布を示す。これより、壁のごく近くを除いては、モデルと厳密値の相関係数はきわめて高く、 rms 値の比もきわめて高いことが分かる。ただし、平均値の比が低い、平均値は、 rms 値に比べ、約 3 桁小さいので、大きな欠点ではないと思われる。図 2 は、 C_{12}^B と Leonard 項 L_{12} の $C.C.$ 、 $R.R.$ の y 分布を示す。両

者は非常に強い負の相関を持っており、 rms 値も非常に近い。ここで、 L_{12} と C_{12}^B の顕著な相違は、 $\langle L_{12} \rangle$ は零であるのに対し、 $\langle C_{12}^B \rangle$ は必ずしも零ではない点にある。しかし、 $\langle C_{12}^B \rangle$ の値はその rms 値に比べかなり小さく、 L_{12} と C_{12}^B はほとんど打ち消し合うことがわかる。

従来の LES では、 L_{12} は陽に計算されているにもかかわらず、 C_{12} に対するモデリングは全く行われておらず、この A priori のテストからは、精度が低いと言わざるを得ない。総和としての $L_{12} + C_{12}^B$ の大きさを見るために、図 2 には、 $L_{12} + C_{12}^B$ と L_{12} の rms 値の比も含めたが、 L_{12} あるいは C_{12}^B よりかなり小さいことを示している。しかしながら、同図からわかるように、 R_{12} の rms 値に比べるとけっして小さくない。この点については、次節で触れる。

次に、 R_{12} の近似の精度を調べる。図 3 は、 R_{12} の厳密値 (R_{12}^E) と Smagorinsky モデルによる近似値 (R_{12}^S) の C.C.、および、 R_{12}^E と Bardina モデルによる近似値 (R_{12}^B) の C.C. である。以前になされた検証^[8],^[9]と同様に、Smagorinsky モデルによる近似は、やや低い相関を示している。これに対し、Bardina モデルによる近似は、少なくとも、このレイノルズ数では高めの相関を持っている。まとめとして、図 4 に、 $L_{12} + C_{12}^B + R_{12}^B + R_{12}^S$ と

$L_{12} + C_{12}^E + R_{12}^E$ の C.C., R.R. および R.M. の y 分布を載せたが、相関係数はかなり高く良い近似になっているが、 rms 値は低い。この点には、より改善が望まれる。

4. A posteriori test

3 節の A priori test から Cross 項のモデル化の導入が必要な事がわかったので、ここでは、Bardina モデルを取り入れた LES を行い、その効果を見る。初期条件は、3 のテストでフィルターをかけたデータを与え、 $32 \times 129 \times 64$ の格子点を用いた。Re は同じく 360 とした。ここでは、FTS と LES の "dynamic" な比較、すなわち、LES の計算を進めたあるステップにおける流れ場と、対応する時刻における FTS のデータにフィルターをかけた流れ場の相関を調べた。図 5 は、無次元時間で 0.225 経過した後の下流方向速度変動成分の相関係数である。Bardina モデルを入れない場合の相関の減衰は著しく、特に予測可能性の見地から、Bardina モデルを入れた効果は顕著である。Leonard 項も Bardina 項も導入しない場合の相関係数が両方とも入れた場合よりも少し低い点は興味深いが、これは、Bardina 項が SGS エネルギーの back scattering を引き起こす為である。〔10〕勿論、フィルタリングを入れた関係上

、Bardina モデルを入れた場合でも、相関はやがては減衰していくが、その時点では、統計量に有意な差異が生じ、改善がなされているか否かが肝要となる。この点については、文献 [2], [5], [10] を参照されたい。

5. おわりに

F T S データ・ベースによる L E S モデルの検証を行い、さらに、その L E S への適用を試みた。その結果、Leonard 項のみの導入は精度を落とすこと、および、Bardina 項は SGS エネルギーの back scattering を起こすことがわかった。ここでは、F T S が低レイノルズ数で行われたという点に常に留意しなければならないが、こうした検証は、今後の数値流体力学の一つの方向になるのではないかとと思われる。

参考文献

- [1] Kim, J., Moin, P. and Moser, R.D. (1987) J. Fluid Mech., vol.177, p.133

[2] Piomelli, U., Moin P. and Ferziger, J.H. (1987) *Physics of Fluids*, vol.31, p.1884

[3] Horiuti, K. (1987) *J. Comp. Phys.*, vol.71, p.343

[4] Horiuti, K. (1988) in "Transport Phenomena in Turbulent Flows", ed. by M.Hirata and N.Kasagi, Hemisphere Pub. Corp., p.743.

[5] Horiuti, K. (1988) to be published.

[6] Moin, P. and Kim, J. (1982) *J. Fluid Mech.*, vol.118, p.341

[7] Speziale, C.G. (1985) *J. Fluid Mech.*, vol.156, p.55

[8] Bardina, J., Ferziger, J.H. and Reynolds, W.C. (1983) Report TF-19, Dept. of Mech. Engng., Stanford University

[9] Clark, R.A., Ferziger, J.H., and Reynolds, W.C. (1979) *J. Fluid Mech.*, vol.91, 1

[10] Horiuti, K. (1989) *Physics of Fluids A*, vol.32, no.2.

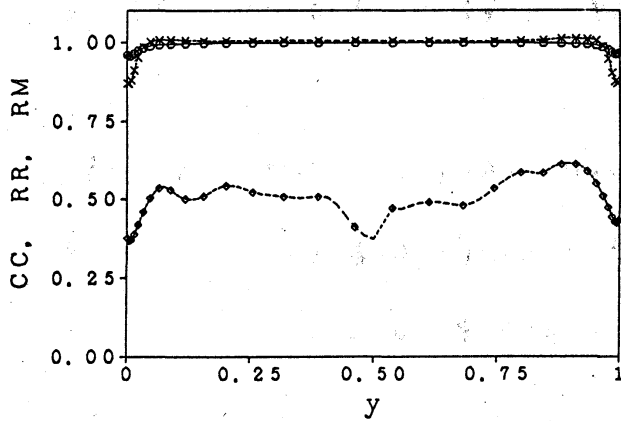


图1 C.C. (—○—), R.R. (—×—), R.M. (—◇—)
between C_{12}^B and C_{12}^E .

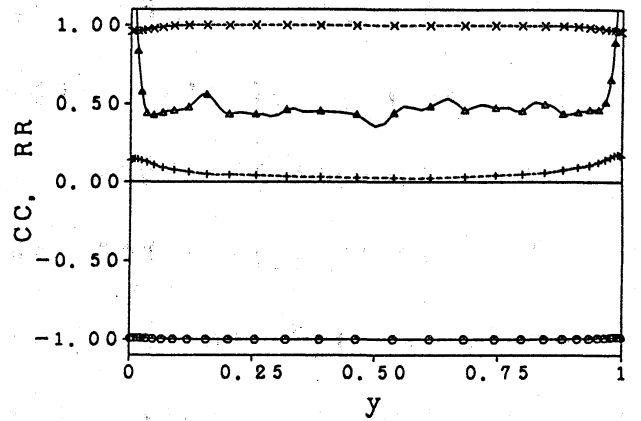


图2 C.C. (—○—), R.R. (—×—) between C_{12}^B and C_{12}^E ;
—+—, R.R. between $L_{12}+C_{12}^B$ and L_{12} ;
—△—, R.R. between $L_{12}+C_{12}^B$ and $R_{12}^B+R_{12}^E$.

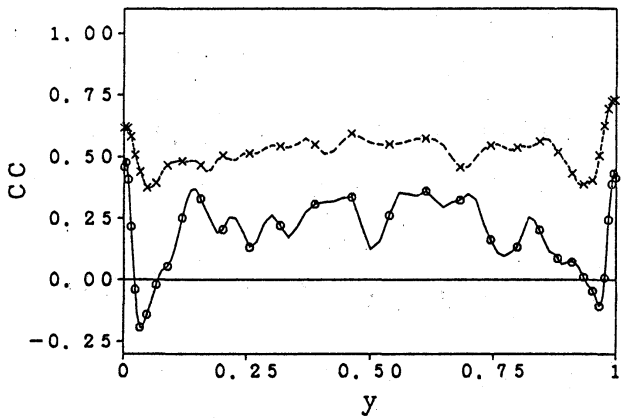


图3 C.C. between R_{12}^B and R_{12}^E (—○—),
C.C. between R_{12}^B and R_{12}^E (—×—).

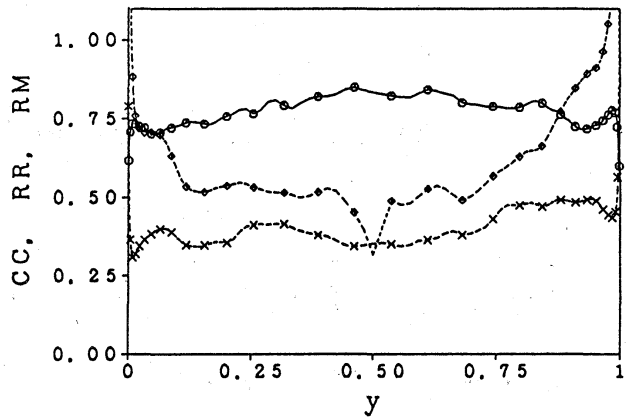


图4 C.C. (—○—), R.R. (—×—), R.M. (—◇—) between
 $L_{12}+C_{12}^B+R_{12}^B+R_{12}^E$ and $L_{12}+C_{12}^E+R_{12}$.

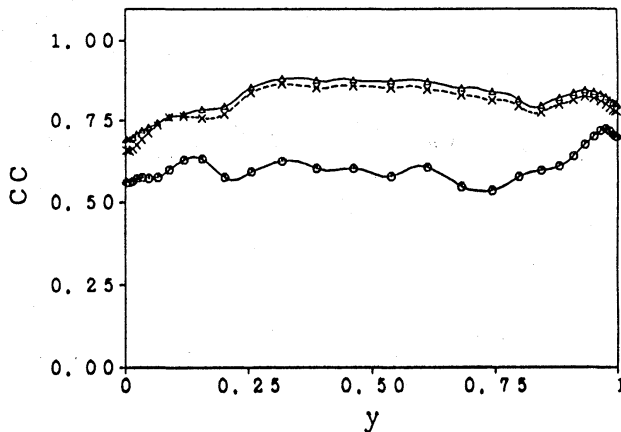


图5 C.C. between filtered PTS and LES:
Leonard term only (—○—),
With Leonard term and Bardina model (—△—)
without Leonard term or Bardina model (—×—)