数理解析研究所講究録
701巻 1989年 59-71



# Feynman経路積分の無限小解析による合理化

駿台予備学校　中村　徹 (Tooru Nakamura)

熱方程式の場合, 基本解の経路積分表現は経路空間上のWiener measureによる積分として合理化されることが知られている. (Kac [5]) 一方, Schrödinger方程式の場合はいろいろな方向からの合理化が試みられているが, 経路空間上の測度を探すという方向では成功していない. (Fujiwara [4], Nelson [7])

本稿では, 格子間隔が無限小である格子空間上のpath space上の*measureを用いた合理化について述べる. 従って議論は無限小解析の理論の中で展開される. 従来, 時間$t$や質量$m$に関する解析接続によって熱方程式の型に還元するという方向が採られてきたのに対し, ここではいわば確率を虚数化するという方法が採られる.

## §1. 序論

熱方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = H u(t,x), \quad H = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \ t>0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

の解は，$V(x)$ の適当な制限条件下で

$$(e^{tH}f)_{(x)} = \int f(x+\omega(t)) e^{\int_0^t V(x+\omega(s))ds} d\mu(\omega)$$

$d\mu(\omega)$ は Wiener measure

と表わされることがわかっている．(Simon [8])

一方，Wiener process は *random walk の standard part として実現されることが Loeb-Anderson によって明らかにされた．(Loeb [6], Anderson [1])

Loeb-Anderson の結果

$N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ を固定し，$\varepsilon = \frac{1}{N}$ とする．

$\mathbb{T} = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \cdots, N\varepsilon = 1\}$，$\mathbb{X} = \{z\sqrt{\varepsilon} \mid z \in {}^*\mathbb{Z}\}$，

$\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{T}}$，$\Sigma = \{\Omega$ の internal subsets$\}$

$\nu(A) = \frac{1}{2^N} \cdot {}^\# A \ (\forall A \in \Sigma)$，ただし ${}^\# A$ は $A$ の要素の個数

とし，internal な *有限加法的測度空間 $(\Omega, \Sigma, \nu)$ からつくられる Loeb 測度空間を $(\Omega, L(\Sigma), L(\nu))$ とする．

各 $\omega \in \Omega$ に対し，$X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{X}$ と $b : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を

$$X(n\varepsilon, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(k\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$$

$$b(t,\omega) = {}^\circ X(n\varepsilon, \omega), \quad n\varepsilon \leqq t < n\varepsilon + \varepsilon$$

によって定義すると，$b(t,\omega)$ は $(\Omega, L(\Sigma), L(\nu))$ を測度空間とする Wiener process となる．

KacとLoeb-Andersonの結果を結合させると，熱方程式の場合，経路積分の無限小解析による合理化が可能であろうと思われる．実際，次の命題1が成り立つ．ただし証明は省略する．そこでの$V$への制限はもっと緩くできると思われる．さらに解がstrong solutionである場合はさらに緩和できると思うが未検討である．

<u>定義1</u>

$n \in {}^*\mathbb{N}$に対し，$\mathbb{T}_n = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \cdots, n\varepsilon\}$，$\Omega_n = \{-1, 1\}^{\mathbb{T}_n}$とし各$\omega \in \Omega_n$に対して，

$$B(k\varepsilon, \omega) = \sum_{l=0}^{k-1} \sqrt{\varepsilon}\, \omega(l\varepsilon), \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

とする．ただし$B(0, \omega) = 0$とする．

$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$と$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$が与えられたとき，$0 < t < 1$，$t \in \mathbb{R}$と$x \in \mathbb{R}$に対して$\underline{t} \leqq t < \underline{t} + \varepsilon$，$\underline{x} \leqq x < \underline{x} + \sqrt{\varepsilon}$によって$(\underline{t}, \underline{x}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{X}$を定義し，$\underline{t} = \tau\varepsilon$とおく．このとき

$$U(\underline{t}, \underline{x}) = \sum_{\omega \in \Omega_\tau} {}^*f(\underline{x} + B(\tau\varepsilon, \omega)) \prod_{k=0}^{\tau-1} (1 + \varepsilon\, {}^*V(\underline{x} + B(k\varepsilon, \omega))) \cdot \frac{1}{2^\tau}$$

$$u(t, x) = {}^\circ U(\underline{t}, \underline{x})$$

で$U$と$u$を定義する．

<u>命題1</u>

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$（急減少関数），$V \in C^2(\mathbb{R})$かつ$V$，$\dfrac{dV}{dx}$，$\dfrac{d^2V}{dx^2}$が有界のとき，定義1の$u(t, x)$は熱方程式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \left(\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) u(t,x) \\
u(0,x) = f(x)
\end{cases}
$$

の classical solution となる．

以上の結果をふまえた上で，本題の Schrödinger 方程式を考察する．その基本解の経路積分表現を合理化するような経路空間上の測度が，熱方程式の場合の Wiener measure に対応する形では存在しないとしても，＊の世界における何らかの＊walks に関する＊有限和としてなら合理化できる可能性は残されている．

$$
\begin{tikzcd}
{}^{*}f(x) \arrow[r, "\text{*random walksに}", "\text{関する*有限和}"'] & U(\underline{t},\underline{x}) \arrow[d, "\circ"] \\
f(x) \arrow[u, "*"] \arrow[r, "\text{Wiener measure}", "\text{に関する積分}"'] & u(t,x)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{}^{*}f(x) \arrow[r, "\text{或る*walksに}", "\text{関する*有限和}"'] & U(\underline{t},\underline{x}) \arrow[d, "\circ"] \\
f(x) \arrow[u, "*"] & u(t,x)
\end{tikzcd}
$$

本稿ではそのような＊walk として＊complex random walk を定義し，少なくとも $V(x)=0$ の場合にはシュレディンガー方程式の classical and strong solution を与えることを証明する．

$V(x) \neq 0$ の場合については未解決であるが，§3 において若干の考察を行なう．

## §2. * complex random walk と Schrödinger 方程式の解

$N\in{}^*\mathbb{N}_\infty$ と $\varepsilon=\frac{1}{N}$ はこれまでと同じとし，$c\in\mathbb{R}$ を正の定数とする．

$$\mathbb{T}=\{k\varepsilon \mid k\in{}^*\mathbb{N}\cup\{0\}\},\quad \mathbb{X}=\{z\sqrt{c\varepsilon}\mid z\in{}^*\mathbb{Z}\}$$

によって＊時空の格子空間 $\mathbb{T}\times\mathbb{X}$ を定義し，この上の経路を考える．

定義 2（* complex random walk $X$）

$n\in{}^*\mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{T}_n=\{0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ \cdots,\ n\varepsilon\}$ とし

$$\Omega_n=\{-1,\ 0,\ 1\}^{\mathbb{T}_n}$$

の各要素 $\omega\in\Omega_n$ の weight $d\mu_n(\omega)$ を

$$d\mu_n(\omega)=\left(\frac{i}{2}\right)^\alpha(1-i)^\beta\left(\frac{i}{2}\right)^\gamma,\quad (i=\sqrt{-1})$$

$$\alpha={}^\#\{k\mid \omega(k\varepsilon)=1\},\quad \beta={}^\#\{k\mid\omega(k\varepsilon)=0\}$$

$$\gamma={}^\#\{k\mid\omega(k\varepsilon)=-1\}$$

で定義する．さらに $X:\mathbb{T}_n\times\Omega_n\to\mathbb{X}$ を

$$X(k\varepsilon,\omega)=\sum_{l=0}^{k-1}\sqrt{c\varepsilon}\,\omega(l\varepsilon),\quad X(0,\varepsilon)=0$$

で定義する．

定義 3

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が与えられたとき，$0\leqq t\leqq 1$，$t\in\mathbb{R}$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して，$\underline{t}\leqq t<\underline{t}+\varepsilon$，$\underline{x}\leqq x<\underline{x}+\sqrt{c\varepsilon}$ によって，$(\underline{t},\underline{x})\in\mathbb{T}\times\mathbb{X}$ を定義し，$\underline{t}=\tau\varepsilon$ とおく。このとき，$U$ と $u$ を次式で定義する．

$$U(\underline{t}, \underline{x}) = \sum_{\omega \in \Omega_\tau} {}^*f(\underline{x} + X(\tau\varepsilon, \omega))\, d\mu_\tau(\omega)$$
$$u(t, x) = {}^\circ U(\underline{t}, \underline{x})$$

<u>定理</u>

各 $c > 0$ 毎に $L^2(\mathbb{R})$ の稠密な部分空間 $\mathcal{F}_c$ が存在して，$f \in \mathcal{F}_c$ に対して定義3の $u(t, x)$ をつくると，これは free の Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i \dfrac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -\dfrac{c}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

の classical and strong solution $\exp(it\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2})f$ に一致する.

<u>注</u>　$0 \leqq t \leqq 1$ を $0 \leqq t \leqq T$（$T > 0$ は任意の定数）に変えることも容易であるが簡単のため $0 \leqq t \leqq 1$ で考える.

定理の証明のために standard な analysis における補題を2つ準備する.

<u>補題1</u>

定数 $c > 0$ と $p \in \mathbb{R}$ に対して，すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して不等式

$$\left(1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{p^4}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leqq e^{\frac{c}{4}p^2}$$

が成立する.

<u>証明</u>

左辺の対数を $g(n)$ とおく.

$$\frac{dg(n)}{dn}=\frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{p^4}{n^2}\right)-\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2p^4}{n^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2p^4}.$$

$\left(\frac{c}{2}\right)^2p^4=b$, $n^2=u$ を用いてこの右辺を表わすと(右辺 $=h(u)$)

$$h(u)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{b}{u}\right)-\frac{b}{u+b},\quad \frac{dh(u)}{du}=\frac{b(u-b)}{2u(u+b)^2}$$

これと $\lim_{u\to+0}h(u)=\infty$, $\lim_{u\to+\infty}h(u)=0$ より $h(u)$ は或る $u_0>0$ の前後で正から負にかわり, 従って $g(n)$ は $n=\sqrt{u_0}$ において最大となる. よって

$$g(n)\text{の最大値}=\frac{\sqrt{u_0}}{2}\log\left(1+\frac{b}{u_0}\right)=\frac{b\sqrt{u_0}}{u_0+b}\leqq\frac{\sqrt{b}}{2}=\frac{c}{4}p^2 \blacksquare$$

定義 4

(i) $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対し $D_n^2$ を次式で定義する.

$$D_n^2f(x)=\frac{1}{\frac{c}{n}}\left(f\left(x+\sqrt{\tfrac{c}{n}}\right)+f\left(x-\sqrt{\tfrac{c}{n}}\right)-2f(x)\right)$$

(ii) $L^2(\mathbb{R})$ の稠密な部分空間 $\mathcal{F}_c$ を

$$\mathcal{F}_c=\left\{P(x)e^{-\frac{1}{2c}x^2}\;\middle|\;P(x)\text{は多項式}\right\}$$

で定義する. $\mathcal{F}_c\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ となっている.

補題 2

区間 $[0,1]$ を $n$ 等分し, $t\in[0,1]$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$j=[nt],\qquad k=\left[\sqrt{\frac{n}{c}}x\right]$$

とおく. $[u]$ は $u$ 以下の最大整数を表わす.

$\mathcal{F}_c$ の関数列 $\{f_n\}$ を

$$f_0(x) = f(x) \in \mathcal{F}_c$$

$$f_n(x) = \left(1 + i\frac{c}{2n}D_n{}^2\right)^j f(x)$$

で定義したとき，各 $x$ 毎に

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(k\sqrt{\frac{c}{n}}\right) = \exp\left(it\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

が成り立つ。

<u>証明</u>

$f_n(x)$ のフーリエ変換は

$$\hat{f}_n(p) = \left(1 - i\left(1 - \cos p\sqrt{\frac{c}{n}}\right)\right)^j \hat{f}(p)$$

であり，$\exp\left(it\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)f(x) = u(x)$ とおくとき，このフーリエ変換は

$$\hat{u}(p) = e^{-it\frac{c}{2}p^2}\hat{f}(p)$$

である。

$$\left|f_n\left(k\sqrt{\frac{c}{n}}\right) - u(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{f}_n(p)e^{ipk\sqrt{\frac{c}{n}}} - \hat{u}(p)e^{ipx}\right)dp\right|$$

において，右辺の被積分項は各 $p$ 毎に $0$ に収束している。

一方，

$$\begin{aligned}
&\left|\hat{f}_n(p)e^{ipk\sqrt{\frac{c}{n}}} - \hat{u}(p)e^{ipx}\right| \\
&\leqq \left|\hat{f}_n(p) - \hat{u}(p)\right|\left|e^{ipk\sqrt{\frac{c}{n}}}\right| + \left|\hat{u}(p)\right|\left|e^{ipk\sqrt{\frac{c}{n}}} - e^{ipx}\right| \\
&\leqq \left|\hat{f}_n(p)\right| + 3\left|\hat{u}(p)\right| \\
&= \left(\left|1 - i\left(1 - \cos p\sqrt{\frac{c}{n}}\right)\right|^j + 3\right)\left|\hat{f}(p)\right| \\
&\leqq \left(\left|1 - i\left(1 - \cos p\sqrt{\frac{c}{n}}\right)\right|^n + 3\right)\left|\hat{f}(p)\right|
\end{aligned}$$

$$\leqq \left( \left(1+\left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{p^4}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}+3\right)|\hat{f}(p)|$$

に補題1の結果を用いて

$$\left|\hat{f}_n(p)e^{ipk\sqrt{\frac{c}{n}}}-\hat{u}(p)e^{ipx}\right|\leqq\left(e^{\frac{c}{4}p^2}+3\right)|\hat{f}(p)|$$

となる. $f\in\mathcal{F}_c$ より $\hat{f}(p)=$ (多項式) $\cdot e^{-\frac{c}{2}p^2}$ となるから上式

の右辺は $n$ に無関係な可積分関数となる. 従ってLebesgue

の収束定理より, 各 $x$ 毎に

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(k\sqrt{\frac{c}{n}}\right)=\exp\left(it\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)f(x)$$

が成り立つ. これの右辺が $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に入ることはよく知られた事実である. ▨

<u>定理の証明</u>

$t\in\mathbb{R}$, $0\leqq t\leqq 1$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して $(\underline{t},\underline{x})\in\mathbb{T}\times\mathbb{X}$ が

$$\underline{t}=[Nt]\frac{1}{N}\ ,\quad \underline{x}=\left[\sqrt{\frac{N}{c}}x\right]\sqrt{\frac{c}{N}}$$

として定められていたので, 補題2と無限小解析の基本性質によって

$$\left(1+i\frac{c}{2N}D_N{}^2\right)^{[Nt]}*f(\underline{x})\ \cong\ \exp\left(it\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)f(x)$$

が成り立つ. 一方 $U(\underline{t},\underline{x})$ の定義より

$$\begin{aligned}U(\underline{t},\underline{x})&=\frac{i}{2}U(\underline{t}-\varepsilon,\underline{x}+\sqrt{c\varepsilon})+\frac{i}{2}U(\underline{t}-\varepsilon,\underline{x}-\sqrt{c\varepsilon})\\&\quad+(1-i)U(\underline{t}-\varepsilon,\underline{x})\\&=\left(1+i\frac{c}{2}\varepsilon D_N{}^2\right)U(\underline{t}-\varepsilon,\underline{x}).\end{aligned}$$

従って

$$U(\underline{t},\ \underline{x}) = \left(1 + i\frac{c}{2N}D_N{}^2\right)^{[Nt]} {}^*f(\underline{x}).$$

以上より, $u(t,x) = {}^\circ U(\underline{t},\underline{x}) = \exp\left(it\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)f(x)$ ▨

## §3. $V(x) \neq 0$ の場合の考察

$V(x) \neq 0$ の場合のSchrödinger方程式

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,\ x) = \left(-\dfrac{c}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)u(t,x) \\ \qquad u(0,\ x) = f(x) \end{cases}$$

に対する同じ問題については, 以下にのべるような結果を予想しているがまだ未解決である.

### 定義 5

$X(k\varepsilon,\ \omega)$, $d\mu_\tau(\omega)$ を定義2の * complex random walk とする. $V: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が与えられたとき, 定義3の $t$, $\underline{t}$, $x$, $\underline{x}$ に対して

$$U(\underline{t},\ \underline{x}) = \sum_{\omega \in \Omega_\tau} {}^*f(\underline{x} + X(\tau\varepsilon,\ \omega)) \prod_{k=0}^{\tau-1}\left(1 - i\varepsilon\,{}^*V(\underline{x} + X(k\varepsilon,\ \omega))\right) d\mu_\tau(\omega)$$

$$u(t,x) = {}^\circ U(\underline{t},\ \underline{x})$$

で $u(t,\ x)$ を定義する.

### 予想

$V(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が与えられたとき, $c > 0$ に対して, $L^2(\mathbb{R})$ で稠密な部分空間 $\mathcal{F}_{c,V}$ が存在して, 任意の $f \in \mathcal{F}_{c,V}$ に対して定義5の $u(t,\ x)$ は Schrödinger 方程式の classical and strong solution を与える.

$V=0$ の場合とちがって作用素 $-\frac{c}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$ のフーリエ変換が non local な作用素となるため, $V=0$ のときのようにフーリエ変換を用いた簡潔な証明をつくることは難しい. 1つの方法として以下の方法が考えられる.

定義5より

$$U(\underline{t},\underline{x})=\left\{\left(1-i\frac{1}{N}V(x)\right)\left(1+i\frac{c}{2}\frac{1}{N}D_N{}^2\right)\right\}^{[Nt]}{}^{*}f(\underline{x})$$

となるので, standard analysis における次の命題が証明されればよい:

各 $x$ 毎に

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-i\frac{1}{n}V(x)\right)\left(1+i\frac{c}{2}\frac{1}{n}D_n{}^2\right)\right\}^{[nt]}f\left(\sqrt{\frac{c}{n}}\left[\sqrt{\frac{n}{c}}x\right]\right)=\left(e^{-itH}f\right)(x)$$

$A_n=1-i\frac{1}{n}V(x)$, $B_n=1+i\frac{c}{2}\frac{1}{n}D_n^2$ とおくとき,

$$A_n{}^{[nt]}\longrightarrow e^{-itV}(=A),\quad B_n{}^{[nt]}\longrightarrow e^{it\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}}(=B)$$

であるから, Trotter 型の formula

$$(A_nB_n)^{[nt]}\longrightarrow AB$$

を証明すればよいことになる. 従来の Trotter formula は自己共役な $P$, $Q$ に対して $A_n=e^{i\frac{1}{n}P}$, $B_n=e^{i\frac{1}{n}Q}$ とった場合であるからこれをそのまま適用するわけにいかない. また, $x$ と $\sqrt{\frac{c}{n}}\left[\sqrt{\frac{n}{c}}x\right]$ のずれの影響の考察のために, 上の収

束が$L^2$ノルムのみならず連続関数の空間上の例えば$\| \ \|_\infty$ノルムに関するものであれば好都合である。

もちろん全く異なった観点からのアプローチもありうるのでこうでなければならないわけではない。

最後に，*complex random walk の定義2における虚数単位$i$を形式的に1におきかえるとLoeb-Andersonの*random walk (§1) になることを付記しておく。

## REFERENCES


1. R.M. Anderson, A nonstandard representation for Brownian motion and Ito integration, Israel J. Math. 25(1976), 15-46.
2. R. Cameron, The Ilstow and Feynman integrals, J. Anal. Math. 10 (1962/63) 287-361.
3. R. P. Feynman & A. R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, Macgraw Hills, 1965.
4. D. Fujiwara, A construction of the fundamental solution for Schrödinger equation, Preprint, 1978.
5. M. Kac, On some connections between probability theory and differential integral equations, Proc-2nd Berk. Symp. Math. Statist. Probability (1950), 189-215.
6. P.A. Loeb, Conversion from nonstandard to standard

measure spaces and applications in probability theory, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975) 113-122.

7. E. Nelson, Feynman integrals and the Schrödinger equations, J. Math. Phys. 5, 1964, 332-343.

8. B. Simon, Functional integration and Quantum mechanics, Acad. Press, 1979.