

Sum of Infinitesimal Random Variables

大阪市大・理 釜江哲朗 (Teturo KAMAE)

無限分解可能な確率変数は、無限小確率変数列の独立和として表現される。このことを利用して、無限分解可能な確率変数の特性関数に対する Lévy の標準形を導く。以下、可算飽和なノンスタンダードモデルを考える。

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ は内的確率空間とし、これに対応するローブ確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) が nonatomic であるとある。無限の超自然数 M をとり、 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上の *独立同一分布に従う) 内的確率変数列 $(X_n, n=1, \dots, M)$ を考える。このとき、

$$\circ \sum_{n=1}^M X_n$$

は (Ω, \mathcal{B}, P) 上の $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 値確率変数となる。 $X = X_1$ とおき、 \mathcal{F}_X を X の *特性関数とする。

基本補題

$$P\left(\circ \sum_{n=1}^M X_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

が成立するための必要十分条件は, $t \in {}^*\mathbb{R}$ の関数

$$M(1 - \varphi_X(t))$$

が S 連続かつ S 有限となることである。ただし, $t \in {}^*\mathbb{R}$ の関数 $f(t)$ が S 連続であるとは, ${}^\circ a = {}^\circ b \in \mathbb{R}$ を満たす任意の $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ に対して, $f(a) \approx f(b)$ が成立することとせらる。また, S 有限であるとは, この f ならば $a \in {}^*\mathbb{R}$ に対して, ${}^\circ |f(a)| < \infty$ となることとせらる。

(証明) (十分性) $M(\varphi_X(t) - 1)$ が S 連続かつ S 有限とする。このとき, ${}^\circ t \in \mathbb{R}$ となる t に対して, $\varphi_X(t) - 1 \approx 0$ だから

$$\begin{aligned} \varphi_{\sum_{n=1}^M X_n}(t) &= \varphi_X(t)^M \\ &= (1 + \varphi_X(t) - 1)^M \\ &\approx e^{M(\varphi_X(t) - 1)} \end{aligned}$$

とせらる, $\varphi_{\sum_{n=1}^M X_n}$ は S 連続となる。このことは, 特性関数に関する基本性質から

$$P\left({}^\circ \sum_{n=1}^M X_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

を意味する。

(必要性)

$$P\left(\sum_{n=1}^M X_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

が成立するとする。R値確率変数 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ の特性関数を φ と書くと、 $t \in \mathbb{R}$ とする任意の t に対して

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_{\sum_{n=1}^M X_n}(t) \\ &= (\varphi_X(t))^M \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

が成立する。 φ は特性関数だから、 \mathbb{R} 上の連続関数で $\varphi(0) = 1$ となる。 $\varphi(t) = 0$ となる実数 t の絶対値の下限を T とする ($T = \infty$ を含めて)。明らかに、 $T > 0$ である。 $t \in (-T, T)$ とする勝手な t に対して $\varphi_X(t) \approx 1$ となることを示す。

内関数 φ_X は *連続で、かつ、 $*[0, t]$ で 0 にならないから、 $\log \varphi_X$ も $*[0, t]$ で *連続となる。ここで、 $\varphi_X(t) \neq 1$ だとすれば、

$$a = \min\{|u-v|, u, v \in *[0, t], |\log \varphi_X(u) - \log \varphi_X(v)| = \frac{1}{M}\}$$

とおくとき、中間値の定理より、 $|u-v| < a$ とする任意の $u, v \in *[0, t]$ に対して

$$|\log \varphi_X(u) - \log \varphi_X(v)| < \frac{1}{M}$$

となる。故に、 a が無限小でないとすれば、 $\log \varphi_X(t)$ が無限小となり、仮定 $\varphi_X(t) \approx 1$ に反す。これより、 a は無限小となり、 $u \approx v$ となる $u, v \in {}^* [0, t]$ で

$$|\log \varphi_X(u) - \log \varphi_X(v)| = \frac{1}{M}$$

となる t の δ と出来る。このとき、

$$\xi = M(\log \varphi_X(v) - \log \varphi_X(u))$$

とおくと

$$\varphi_X(u)^M - \varphi_X(v)^M = \varphi_X(u)^M (1 - e^\xi)$$

が成立し、また、 $|\xi| = |t|$ から $1 - e^\xi \neq 0$ となる。また、仮定より

$${}^\circ(\varphi_X(u)^M) = \varphi({}^\circ u) \neq 0$$

だから、 $\varphi_X(u)^M \neq 0$ となり、結局

$$\varphi_X(u)^M - \varphi_X(v)^M \neq 0$$

となり、 $\varphi_X^M = \varphi \sum_{n=1}^M X_n$ の S 連続性と矛盾する。以上より、 ${}^\circ t \in (-T, T)$ を満たす任意の t に対して、 $\varphi_X(t) \approx 1$ が結論される。

さらに、 ${}^\circ t \in (-T, T)$ を満たす任意の t に対して、 $\varphi_X(t)^M$

は有限でかつ無限小でないから

$$\begin{aligned} \varphi_X(t)^M &= e^{M \log \varphi_X(t)} \\ &= e^{M(\varphi_X(t)-1)(1+O(\varphi_X(t)-1))} \\ &\approx e^{M(\varphi_X(t)-1)} \end{aligned}$$

が成立し、 $M(\varphi_X(t)-1)$ は $t \in (-T, T)$ を満す t の上で S 連続かつ S 有限となる。故に、必要性の証明のためには、 $T = \infty$ となることを示せばよい。

$T < \infty$ と仮定する。このとき、 $\varphi(T) = 0$ となる。 $(\tilde{X}_n; n=1, \dots, M)$ と $(X_n; n=1, \dots, M)$ と同分布をもつ*独立な内的確率変数列とし、

$$Y_n = X_n - \tilde{X}_n \quad (n=1, \dots, M)$$

とおく。仮定より

$$P\left(\sum_{n=1}^M Y_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

が成立している。また、 $Y = Y_1$ とおき、確率変数 $\sum_{r=1}^M Y_r$ の特性関数を ψ とするとき、

$$\varphi_Y(t) = |\varphi_X(t)|^2 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$\psi(t) = |\varphi(t)|^2 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成立する。故に, $\psi(T) = 0$ となる。また, 前段の議論を $(Y_n, n=1, \dots, M)$ に対して適用すると, $M(1 - \varphi_Y(\frac{T}{2}))$ は有限となる。他方

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - \varphi_Y(T) \\ &= \int (1 - \cos TY(\omega)) d\mu(\omega) \\ &\leq 4 \int (1 - \cos \frac{T}{2} Y(\omega)) d\mu(\omega) \\ &= 4(1 - \varphi_Y(\frac{T}{2})) \end{aligned}$$

だから, $M(1 - \varphi_Y(T))$ も有限となる。これより

$$\begin{aligned} 0 = \psi(T) &= {}^\circ(\varphi_Y(T)^M) \\ &= {}^\circ(e^{M(\varphi_Y(T)-1)}) \\ &= e^{\circ M(\varphi_Y(T)-1)} > 0 \end{aligned}$$

となり矛盾する。以上より, $T = \infty$ となり証明が完了する。

\mathbb{R} 値確率変数 Z が無限分解可能であることと,

$$Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{n=1}^M X_n$$

となる $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上の $*$ 独立同一分布に従う内的確率変数
 数列 $(X_n; n=1, \dots, M)$ が存在することは同値であり、ま
 た、この f が $(X_n; n=1, \dots, M)$ は基本補題の条件を満
 している。故に、以下が成立する。

系 確率変数 Z が無限分解可能であることと、 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$
) 上の内的確率変数 X が存在して、特性関数 φ_Z に関して

$$\varphi_Z(\cdot t) = e^{\circ M(\varphi_X(t) - 1)}$$

が $\circ t \in \mathbb{R}$ を満たす任意の $t \in * \mathbb{R}$ に対して成立することは同
 値となる。

この系から、Lévy の標準形を導くためには、基本補題の
 条件を満たすような内的確率変数 $X = X_1$ に対する $\circ M(\varphi_X(t) - 1)$
 を詳細に調べればよい。この結果、以下に到達する。

定理 (Lévy の標準形) 確率変数 Z が無限分解可能であ
 るための必要十分条件は、 $b \in \mathbb{R}$ と

$$\int \frac{dG(x)}{1+x^2} < \infty$$

を満たす \mathbb{R} 上の有限分布 G が存在して

ク

$$\varphi_Z(t) = \exp\left(\int \frac{e^{itx} - 1 - it \sin x}{x^2} d\mathbb{Q}(x) + ibt\right)$$

が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成立することである。

[文献]

釜江哲朗：「超準手法にもとづく確率解析入門」，すうがくぶっくす 9，朝倉書店（近刊）