

可解格子模型

について

山田 裕二
(Yuji Yamada)

目次

	頁
序言	3
§1 Introduction	4
§2 おもてあひの face-vertex 対応	16
§3 Quantum R matrix	24
§4 $X_m^{(1) \# 1}$ Face model	29
§5 STR の証明	33
§6 Restriction	40
§7 Fusion procedure	47
§8 Corner transfer matrix	64
§9 Local state probabilities in terms of 1-D sums. vertex model in face formulation	75
§10 1D sums for finite m	88
§11 1D sums in terms of modular forms	98
References.	111

はしがき

本稿のもとは、平成元年の二月に京都の関西セミナーハウスで行われた、尾角正人氏と国場敦夫氏による可解格子模型についての15時間弱にわたった講義であります。この時に、前半の1から5を尾角氏が、後半の6から11を国場氏が担当されました。

もとの講義はOHPなども多用して説得力に富むものでありましたが、このノートを書くに当たっては、筆者の勝手な判断に切り削る部分があり加えた部分があるために、原講義の流暢さが失われていることを恐れます。

また当然ながらノートの責任は筆者にあります。

最後に、筆者の納得のいくまで辛抱強く議論に応じて下さった尾角氏、国場氏には心から深く感謝させて頂きます。それらはこのノートによって不可欠なものでありました。

平成元年 八月 小田裕二

Part 1, § 1 Introduction

格子模型、特に可解な (分配函数及 ψ 、
1点相関函数が厳密に計算可能な) 格子模型
として Ising model がよく知られている。

2次元の Ising model と 1次元の Ising model
である。正方格子の各頂点上に $+1$ または -1
なる値をとる変数 (spin) があり、これらの各
頂点の隣り合うもの同士のみ相互作用する
ものとする。つまり、 $N \times M$ なる大きさの格子を
考え、各頂点上の値を σ_{ij} で表せば、系
の Hamiltonian H は

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} (K \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} + L' \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1})$$

で与えられる。ここで K, L' はそれぞれ格子の
横、縦方向の相互作用の係数である。

統計力学における Boltzmann の原理より、
ある定子 T の値の組 $\sigma = (\sigma_{ij})$: configuration
が実際に現象として起る相対確率は

$$\exp \left\{ -\frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\} = \prod_{i,j} \exp \left\{ -\frac{K}{k_B T} \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} - \frac{L'}{k_B T} \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1} \right\}$$

4

k_B : Boltzmann constant

T : 絶対温度

であり、統計力学において中心的な量である
分配関数 Z は

$$Z_{NM} = \sum_{\sigma} \exp \left\{ -\frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\}$$

configuration

に M と N である。この Z に N 系の自由エネルギー F は

$$F = -k_B T \log Z$$

で与えられるのである。さらに興味深い量として点
関数 (Local State Probability) P_a

$$P_a = \frac{1}{Z} \sum_{\text{conf}} \delta(\sigma_i, a) \exp \left\{ -\frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\}$$

a : local state

σ_i : 定まった頂点 (site)

である。

Ising model において分配関数および点
関数 P_a を求めた。L. Onsager (1944) と
C. N. Yang (1952) において求められた。その結果
は、熱力学的極限 \rightarrow 格子 size 無限大
の極限において、

$$\lim_{\substack{N, M \rightarrow \infty \\ M/N: \text{fixed}}} \frac{1}{NM} \log Z_{NM} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta$$

$$F(\theta) := \log \left\{ 2 \left(\cosh 2K \cosh 2L + k^{-1} (1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{1/2} \right) \right\}$$

$$K = -\frac{K'}{k_B T}, \quad L = -\frac{L'}{k_B T}$$

$$k = 2 \sinh 2K \sinh 2L$$

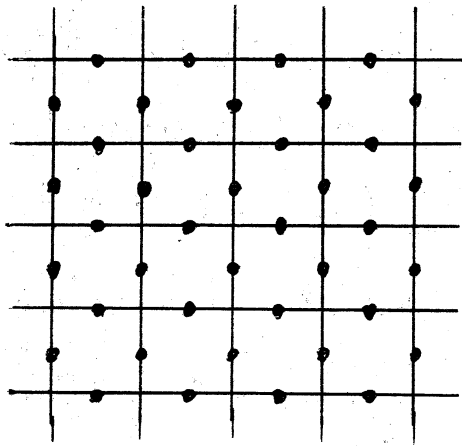
$$P = (1 - k^2)^{1/8} \quad ; \quad \text{1点函数}$$

であった。このとき 1点函数 P が系の詳細に依らず k のみに依存する、と訂正目に通ずる。

我々が対象として考察する model は次の通り Type の model — vertex model 及び face model であるが、当然それらだけ先の 2-D Ising model なるものをその特殊な場合として含む。そして当面の目標となる問題はそれらの分配函数と一点相関函数を求めよ、とである。

まず vertex model, face model といふのは、それぞれ σ の σ の σ を定めておく。いずれの model も 2次元の正方格子上で考える。

vertex model として正格子の各 edge の上に自由度があり、それらに定数 \mathcal{J} に集合 \mathcal{J} (Ising model の場合の $\{\pm 1\}$ に対応) に値をとり。



$$R(u)_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{array}{c} \alpha \\ \bullet \\ \mu \text{---} \bullet \text{---} \beta \\ \bullet \\ \nu \end{array}$$

$\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathcal{J}$

そして一つの頂点の周りの4つの edge が与えられたとき、その周りの頂点の周りの状態の生じる相対確率 $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ ($u \in \mathcal{J}$; parameter) を与えることに \mathcal{M} model を定数とする。Ising model では頂点の上に local state $\{\pm 1\}$ があり、隣り合う2状態 σ, σ' の生じる相対確率 (Boltzmann weight) が

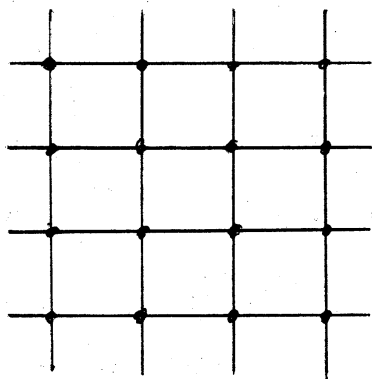
$$\exp(K\sigma\sigma') \quad \text{for } \mathcal{J} = \pm 1 \quad \exp(L\sigma\sigma')$$

であり、これは Boltzmann の原理 \mathcal{M} を与えられた \mathcal{J} のである。 $\rightarrow \mathcal{M}$ $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ を与えることは Ising

model として K, L を与える. β に相当し. parameter u として 先の Ising model の導入の際に β として β にか

$\sinh 2K = \sinh(u)$, $\sinh 2L = (k \sinh(u))^k$, $0 < k < 1$ なる K, L の parametrization に現れる変数 u に対応する. u は model の homogeneity を表わす parameter である. β を与える. β である.

face model (IRF-model; Interaction-round-a-face model) として. 正方格子の各頂点 (site) の上に local state の集合 \mathcal{S} に属する自由度がある.



$$w \left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u \right) = \text{square with vertices } a, b, c, d$$

$a, b, c, d \in \mathcal{S}$

今度 β 一つの面 (face) の周りの頂点の 4 状態の全 \mathcal{S} の相対確率 (Boltzmann weight) $w \left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u \right)$ を与える. β として IRF model が定まるのである.

Boltzmann weight $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$, $w \left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u \right)$ を与える. β (Ising model での K, L を与える. β) に

この model が定まるのであろう。 model が可解であるためには、これらの Boltzmann weight が Yang-Baxter equation (Star-Triangle relation) を満たしていることが肝要である。特に 1 点函数 (LSP) を求めることに用いる。 Corner Transfer Matrix の方法では Boltzmann weight が YBE (STR) を満たすことがその前提となっている (§ 8)。従って、この model を設定する際には、常に Boltzmann weight が YBE (STR) を満たすようにしなければならない。

本文の構成の概略は次の通りである。

§ 2, § 3 では Lie algebra A_1 の vector 表現に対する quantum R-matrix の YBE (STR) を満たす Boltzmann weight を与える。 § 4 ではこの拡張として一般の A_n の vector 表現に対する Boltzmann weight の結果を記す。この section において weak-admissibility - local state の配置に課される条件 τ_i を述べる。 § 5 ではこの Boltzmann weight が STR を満たすことを証明する。この § 7 では unrestricted picture (local state が h^* の generic τ 値を取るという picture)

と呼ばれる状況についての話であるが、§6に
 おいて restricted picture (local state の h^* の
 dominant integral weight のみに制限した T -model)
 を定め、この場合においても Boltzmann weight
 が STR を満たすことを示す。 unrestricted model
 restricted model の Local State Probability の
 ことである affine Lie algebra の string function
 branching coefficient については §9, §10, §11
 での話題である。(正確な statement は該当
 部分を参照のこと) §7 では A_n の vector 表現
 以外の次数の高い表現に対応する model を与え
 る。このときの Boltzmann weight は vector 表現の
 Boltzmann weight を利用して構成されることであ
 るが、この手続のことを fusion と呼ぶのである。
 このことは主に restricted model について論
 じる。以上 §2 から §7 までが model の設
 定であり、以降 §8 から §11 において A_n
 の vector 表現に対する model について 1 点函数
 (LSP) を求めるための議論を行う。 Baxter
 の Corner Transfer Matrix の方法についての概説
 は §8 にあるが、これは現在までのところ

数学的に rigorous な方法で行ないので、種々の仮定が設けられていることに注意を要する。
 §9で CTM の方法により 2次元格子上的の和が 1次元格子の上の和に書き換えられる。この1次元格子上の和の表示を格子 size 無限大の極限での状況が分かりやすい形に §10において表示を取り直し、§11で格子 size を無限大としたときに LSP が Lie algebra の表現に関連した modular function となることを示す。

Yang-Baxter equation (YBE) と
Star triangle relation (STR)

YBE 及び STR の後に Corner Transfer Matrix の方法により一点函数を求めらるるに必要である。Baxter の主張 (§8) はこのことと関連して述べられている話である。

YBE とは $R(u) \in \text{End}_d(V \otimes V)$ に対して

$$(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) \\ = (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u))$$

なる $V^{\otimes 3}$ 上の方程式のことである。

STR とは

$$\sum_g W \begin{pmatrix} ab \\ fg \\ |u+v \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} bc \\ gd \\ |v \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} fg \\ ed \\ |u \end{pmatrix} \\ = \sum_g W \begin{pmatrix} ab \\ gc \\ |u \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} ag \\ fe \\ |v \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} gc \\ ed \\ |u+v \end{pmatrix}$$

$$W \begin{pmatrix} ab \\ dc \\ |u \end{pmatrix} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \square \\ d \quad c \end{array} \quad \text{と } \frac{F}{E} \text{ と } 1 \text{ と}$$

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ f \quad g \quad v \\ \diagdown \quad \diagup \\ e \quad d \end{array} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ f \quad g \quad v \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad d \end{array} \quad , \quad \text{• 1 と 和 } E \text{ と } 3$$

is graphical 1: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ or $\sqrt{2}$.

Notations

\mathfrak{g} : Lie algebra

$U(\mathfrak{g})$: \mathfrak{g} 's universal enveloping algebra

$U_q(\mathfrak{g})$: $U(\mathfrak{g})$'s q -analogue.

X_n : classical simple Lie algebra of rank n

$X_n^{(1)}$: X_n 1: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ or $\sqrt{2}$ affine Lie algebra

\mathfrak{h} : Cartan subalgebra of $X_n^{(1)}$

\mathfrak{h}^* : dual of \mathfrak{h}

$$\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}\delta$$

$\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$: fundamental root

δ : null root

$$\rho := \sum_i \Lambda_i$$

特異 1: $X_n^{(1)} = A_n^{(1)}$ or e_7

$\Lambda_{\mu+n+1} = \Lambda_\mu$ or 17 添字 $\in \mathbb{Z}$ で拡張する

$$\bar{\Lambda}_\mu := \Lambda_\mu - \Lambda_0 \quad (\text{classical part})$$

$\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}^*$ orthonormal vector or 17

$$\bar{\Lambda}_\mu = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{\mu-1} - \mu\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{n+1} \sum_i \varepsilon_i$$

である。

内積は

$$\langle \Lambda_0, \varepsilon_\mu \rangle = \langle \delta, \varepsilon_\mu \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \delta \rangle = 1$$

$i = 1, \dots, n$ とする。

$$\hat{D} := \Lambda_{\nu+1} - \Lambda_\nu \quad (\because \sum_{\nu=0}^m \hat{D} = 0)$$

$$\begin{aligned} A &:= \{ X_m \text{ の vector 表現の weight の集合} \\ &= \{ \hat{D} \mid \nu = 0, \dots, m \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{J} := \mathfrak{h}^*$$

$$\mathcal{J}_1 := \{ \text{dominant integral weights of level 1} \}$$

$$\mathcal{J}_x := \mathcal{J} \text{ or } \mathcal{J}_1$$

$$a \in \mathfrak{h}^* \quad i = \overline{1, n} \quad \bar{a} : a \text{ の classical part}$$

$$a_\mu := \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} := a_\mu - a_\nu$$

$$\sigma : \text{Dynkin diagram automorphism} \in \text{End}(\mathfrak{h}^*)$$

$$V_0 : X_m^{(1)} (X_m) \text{ の vector 表現}$$

$$V(\alpha) : X_m \text{ の highest weight } \alpha \text{ の 既約表現}$$

$$L(\omega), V_a : X_m^{(1)} \text{ の highest weight } a \text{ の 既約表現}$$

$$V_{ab}^{(N)} := \left\{ \mathbb{C} | a^{(0)} \dots a^{(N)} \rangle \mid \begin{array}{l} a^{(0)} = a, \quad a^{(N)} = b \\ a^{(i)} \in \mathcal{J}, \quad a^{(i+1)} - a^{(i)} \in A \end{array} \right\}$$

$Y = (f_1, \dots, f_m)$: Young diagram

m 段目 n box の数 or f_m 個

$\deg Y := f_1 + \dots + f_m$: Y n box の数

$$[a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} : a \text{ の } q\text{-analogue}$$

$$[u] := \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right), \quad p = e^{2i\pi\tau}, \quad \text{Im } \tau > 0$$

$$\theta_1(u, p) := 2p^{\frac{1}{8}} \sin u \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^{2k} \cos u + p^{2k})(1 - p^{2k})$$

$$E(z, q) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - zq^{k-1})(1 - z^{-1}q^k)(1 - q^k)$$

$$(q)_k := \prod_{j=1}^k (1 - q^j)$$

$$(q)_0 := 1$$

$$[r_0, \dots, r_m] := \begin{cases} \frac{(q)_m}{(q)_{r_0} \dots (q)_{r_m}}, & \text{if } \sum r_\mu = m \\ & r_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

\mathcal{G}_m : m 次対称群

§ 2 おける vertex-face 対応.

McGuire - Yang の解

vertex model に対する YBE の解の例を挙げる.

V_0 : $sl(2, \mathbb{C})$ の vector 表現空間 $= \mathbb{C}\langle e_1, e_{-1} \rangle$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\pm 1\}$$

とす.

$$R(u) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_0 \otimes V_0)$$

と

$$R(u) := \begin{pmatrix} 1+u & & & \\ & 1 & u & \\ & u & 1 & \\ & & & 1+u \end{pmatrix}$$

足

$$e_1 \otimes e_1$$

$$e_1 \otimes e_{-1}$$

$$e_{-1} \otimes e_1$$

$$e_{-1} \otimes e_{-1}$$

とす. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\pm 1\}$. $\therefore R(u) \in$

$$R(u) = \sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu} R(u)_{\alpha\beta\mu\nu} E_{\alpha\mu} \otimes E_{\beta\nu}$$

$$\therefore E_{\alpha\mu} e_{\nu} = \delta_{\mu\nu} e_{\alpha}$$

と展開して $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ は YBE の解となる.

YBE に $R(u)$ 自身を用いて書き直せば.

それより $\text{End}_{\mathbb{C}}(V_R \otimes V_R \otimes V_R)$ 中の方程式を
 17.

$$\begin{aligned} & (1 \otimes R(u))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(v)) \\ &= (R(v) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(u) \otimes 1) \end{aligned}$$

を解く。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

解 P 、すなわち

$$P(u \otimes v) = v \otimes u$$

解 P を用いて $R(u)$ は

$$R(u) = 1 + uP$$

と表わすことができる。すなわち $RT = 1 \otimes R(u) = 1 + uP_{23}$

すなわち (P_{ij}) は $V_R^{\otimes 3}$ の i, j 成分の交換

YBE を書く。

$$(1 + uP_{23})(1 + (u+v)P_{12})(1 + vP_{33})$$

$$= (1 + vP_{12})(1 + (u+v)P_{23})(1 + uP_{23})$$

を解く。この式は $\mathbb{C}[S_3]$ 中で明らかになる

成立するから、先の式に定め $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ は

YBE の解を解く。

McGuire-Yang の解法 / Face model の解法

以下の様に notation を定めておく

V_a : $sl(2, \mathbb{C})$ の $a+1$ 次元の既約表現空間

$$= \mathbb{C} \langle e_m \mid m = a, a-2, \dots, -a+2, -a \rangle$$

$\{e_m\}$: orthonormal basis in V_a

$V_a \otimes V_b \otimes V_c$ の既約表現空間への分解

$$V_a \otimes V_b \otimes V_c = \sum_c \Omega_{abc} \otimes V_c$$

\therefore

$$\dim \Omega_{a, a+2} = 1$$

$$\dim \Omega_{a, a} = 2 \quad (= 1 \text{ if } a=0)$$

$$\dim \Omega_{a, c} = 0 \quad (c; \text{その他})$$

である。

すなわち具体的に Ω_{abc} の basis を構成する Ω_{abc} を考えよう。

$a \neq 0$ "より"。

$$|(a)_m\rangle = e_m \in V_a$$

$$\text{と } \langle \cdot | \cdot \rangle = 1 \text{ として } |(ab)_m\rangle, |(abc)_m\rangle \text{ 等を}$$

inductive に

$$|(ab)_m\rangle := \sum_{m', j} C(b_m | a_{m'-1} j) |(a)_{m'}\rangle \otimes e_j$$

$$|(abc)_m\rangle := \sum_{m', j} C(c_m | b_{m'-1} j) |(ab)_{m'}\rangle \otimes e_j$$

と定める。 $\therefore \exists l_j \in V_{\mu}$ である。

$C(\ast \ast | \ast \ast \ast \ast)$: Clebsch-Gordan 係数

(1) 既約表現の Tensor 積 $V_{j_1} \otimes V_{j_2} \in$

$$V_{j_1} \otimes V_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_j$$

と既約表現に分解 (1) となる。右辺の V_j の weight m の base vector $l_m \in V_{j_1}, V_{j_2}$ の固定基底 (1) : weight vector から成る basis (1) により

$$l_m = \sum_{m=m_1+m_2} C(j, m | j_1, m_1, j_2, m_2) l_{m_1} \otimes l_{m_2}$$

と表わす (1) となる係数を C として定めらる。

さらに $\|abc\rangle \in$

$$\|abc\rangle := |(abc)_c\rangle$$

と定める。

可及 Ω_{ac} の basis (1)

$$\Omega_{a, a+2} = \mathbb{C} \{ \|a, a+1, a+2\rangle, \|a, a-1, a-2\rangle \}$$

$$\Omega_{a, a} = \mathbb{C} \{ \|a, a+1, a\rangle, \|a, a-1, a\rangle \}$$

Clebsch-Gordan 係数を用いて表わせば

$$\|a, a+1, a+2\rangle = l_a \otimes l_1 \otimes l_1$$

$$\|a, a+1, a\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a+1}{a+2}} \varrho_a \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_1 - \frac{1}{\sqrt{(a+1)(a+2)}} \varrho_a \otimes \varrho_{-1} \otimes \varrho_1 \\ - \sqrt{\frac{a}{(a+1)(a+2)}} \varrho_{a-2} \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_1$$

$$\|a, a-1, a\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \varrho_a \otimes \varrho_{-1} \otimes \varrho_1 - \sqrt{\frac{1}{a+1}} \varrho_{a-2} \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_1$$

$$\|a, a-1, a-2\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \varrho_a \otimes \varrho_{-1} \otimes \varrho_{-1} - \sqrt{\frac{a-1}{a(a+1)}} \left(\varrho_{a-2} \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_{-1} \right. \\ \left. + \varrho_{a-2} \otimes \varrho_{-1} \otimes \varrho_1 \right) \\ + \sqrt{\frac{2}{a(a+1)}} \varrho_{a-4} \otimes \varrho_1 \otimes \varrho_1$$

$R(u)$ に \mathbb{Z} 表 \mathcal{A} の \mathbb{Z} 表 $(T = YBE)$ の $V_a \otimes V_b \otimes V_c$ 上の方程式であるから、 $1 \otimes R(u)$ の様子 $\in \sum_c \Omega_{ac} \otimes V_c$ の上で見てみる。

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

$U_{\mathfrak{g}}$: \mathfrak{g} の普遍展開環

$$\Delta: U_{\mathfrak{g}} \longrightarrow U_{\mathfrak{g}} \otimes U_{\mathfrak{g}}$$

ψ

$$X \longmapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X$$

217

$$[R(u), \Delta(U_q)] = 0$$

$\therefore [R(u), X \otimes X] = [1 + uP, X \otimes X]$ と
 $v_1 \otimes v_2$ に 施し 計算す (1) 行

す)

$$[1 \otimes R(u), \Delta^{(3)}(U_q)] = 0$$

す) 施す. Schur の 補題 により $1 \otimes R(u)$ は
 $\Omega_{a,c}$ に 作用して いる こと が わかる。その 作
 用 は 先の $\Omega_{a,c}$ の basis への $R(u)$ の 作用
 を 確かめて

$$R(u) = (1+u) \text{id} \quad \text{on } \Omega_{a, a+2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{A-u}{A} & u \sqrt{\frac{(A+1)(A-1)}{A^2}} \\ u \sqrt{\frac{(A+1)(A-1)}{A^2}} & \frac{A+u}{A} \end{pmatrix}$$

$$\text{on } \Omega_{a, a}$$

$$\therefore A = a+1$$

である こと が 通ち になる。

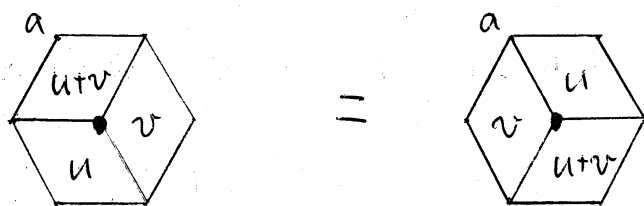
\therefore face model の Boltzmann weight E 上
 に 得られ (1) $R(u)$ の 行列要素 あり

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \\ \\ a \pm 2 \end{array} = 1 + u, \quad \begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \\ \\ a \end{array} = \frac{A \mp u}{A}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \\ \\ a \end{array} = u \sqrt{\frac{(A-1)(A+1)}{A^2}}, \quad (a: \text{generic})$$

とすると、これは Boltzmann weight の STR (star-triangle relation) を満たすのである。

実際に満足する u を確かめるには、



に代入して直接計算すればよい。

本節では YBE の McGuire-Yang の解 (vertex model の Boltzmann weight) より STR を満たすような face model の Boltzmann weight を構成した。(おもしろい vertex-face 対応)

1. 得られた face model の Boltzmann weight は u に関して rational である。以下では、この対応を vertex-face 対応 と trigonometric

に拡張することについても議論する。本来は \mathbb{R} に elliptic に于て拡張したいのだが、その点についてはここで触れない。文献を参照してほしい。

§ 3 Quantum R-matrix

Quantum R-matrix is non-exceptional for Lie rings of vector representation for all q is shown.

記号を少し決めておく

\mathfrak{g} : classical Lie algebra

$U_q(\mathfrak{g})$: \mathfrak{g} の普遍 enveloping ring $U(\mathfrak{g})$ の q -deformation.

特に、 $U_q(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$ is generator $E, H_i, X_i^\pm (i=1, \dots, n)$ として次の様に定められる。

$$q^{H_i} X_i^\pm q^{-H_i} = q^\pm X_i^\pm$$

$$q^{H_i} X_j^\pm q^{-H_i} = q^{\pm \frac{1}{2}} X_j^\pm \quad |i-j|=1$$

$$q^{H_i} X_j^\pm q^{-H_i} = X_j^\pm \quad |i-j| \geq 2$$

$$[X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} \frac{q^{2H_i} - q^{-2H_i}}{q - q^{-1}}$$

$$(X_i^\pm)^2 X_j^\pm - \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} X_i^\pm X_j^\pm X_i^\pm + X_j^\pm (X_i^\pm)^2 = 0 \quad |i-j|=1$$

$$X_i^\pm X_j^\pm = X_j^\pm X_i^\pm \quad \text{otherwise}$$

また

$$\Delta: U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$$

(comultiplication)

$$\Delta(H_i) = 1 \otimes H_i + H_i \otimes 1$$

$$\Delta(X_i^\pm) = q^{H_i} \otimes X_i^\pm + X_i^\pm \otimes q^{-H_i}$$

とする。

上の $U_q(\mathfrak{g})$ は $q \rightarrow 1$ のとき通常の \mathfrak{g} の普遍展開環となるが、“generic な q ” に対して次のことが知られている。

命題 q が generic なとき algebra $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現は \mathfrak{g} のそれ (に \mathbb{C}) parametrize される。

このとき quantum R-matrix とは \mathfrak{g} のその既約表現 V に対し $R(u) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$ で

$$(1) [R(u), \Delta(U_q(\mathfrak{g}))] = 0$$

$$(2) R(u) (\omega q^{H_\theta} \otimes X_\theta^+ + X_\theta^+ \otimes q^{-H_\theta}) \\ = (q^{H_\theta} \otimes X_\theta^+ + \omega X_\theta^+ \otimes q^{-H_\theta}) R(u)$$

θ : highest root, $\omega = e^u$

を満たすようなものを u として定義される。

また、このように (1), (2) を満たす $R(u)$ は YBE

$$(1 \otimes R(u))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(v)) \\ = (R(v) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(u) \otimes 1)$$

を満たす。

現在予ての $X_n = A_n, B_n, C_n, D_n$ の vector 表現に対して YBE の trigonometric solution が見つかっている。

例 $A_n^{(1)}$

$V_0 = \mathbb{C} \langle \varrho_1, \varrho_{-1} \rangle$: vector 表現

$$R(u) = \begin{pmatrix} [1+u]_q & & & \\ & q^u & [u]_q & \\ & [u]_q & q^u & \\ & & & [1+u]_q \end{pmatrix}$$

$$\therefore [a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} = \frac{\sin \pi a/L}{\sin \pi/L} \quad (q = e^{i\pi/L})$$

上の例での $[a]_q$ は $\lim_{q \rightarrow 1} [a]_q = a$ である。意味では a の q -analogue である。

例の $R(u)$ を用いて Jacobi model を与える。前節と同様に R matrix の定義 (1) による。

さらに Schur の補題を用いて、今度は Wigner calculus の q -analogue を実行し $R(u)$ の

$V_a \otimes V_a \otimes V_a$ への action を計算する。結果の λ を記す。

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \pm 2 \end{array} = [1+u]_q$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \end{array} = \frac{[A \mp u]_q}{[A]_q}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \mp 1 \end{array} = [u]_q \sqrt{\frac{[A+1]_q [A-1]_q}{[A]_q^2}} \quad (\text{複号同順})$$

であるが、これは § 2 で得た Boltzmann weight の q -analogue であり、 $q \rightarrow 1$ である。当然 § 2 の結果となる。

上の Boltzmann weight の u について Trigonometric ($\because [u]_q = \sin \frac{\pi u}{L} / \sin \frac{\pi}{L}$) であるが、これは elliptic に昇格して拡張されるべきである。

$$[u] = \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right), \quad p = e^{2\pi i \tau}, \quad \text{Im} \tau > 0$$

$$\theta_1(u, p) = 2p^{1/8} \sin u \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2p^k \cos 2u + p^{2k})(1 - p^k)$$

$$\text{であるが } p \rightarrow 0 \text{ である } \frac{[u]}{[1]} \rightarrow [u]_q \text{ である}$$

Boltzmann weight は

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \pm 2 \end{array} = \frac{[1+u]}{[1]}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ a \end{array} = \frac{[A \mp u]}{[A]}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a_{\pm 1} \end{array} \begin{array}{c} a_{\pm 1} \\ u \\ a \end{array} = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[A+1][A-1]}{[A]^2}}$$

とす。このとき、これは elliptic への拡張となっている。STR を満たすように § 5 において証明する。とす。

§ 2 から、これは vertex model から face model へとくりかえして来たこと。face model から vertex model への対応は、trigonometric の段階で

$$\lim_{\substack{|A| \rightarrow \infty \\ |q| < 1}} \begin{array}{c} a \\ \square \\ a_{\pm 1} \end{array} \begin{array}{c} a_{\pm 1} \\ u \\ a \end{array} = \begin{array}{c} \pm \\ | \\ u \\ | \\ \mp \end{array} \quad (A = a+1)$$

として得ることができる。しかし、elliptic の段階での face から vertex への対応は、まだ知られていない。

§ 4 $X_n^{(1)}$ Jacobi model
(unrestricted model)

1.2.5

$X_n^{(1)}$: affine Lie algebra $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$
 $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$: fundamental weight
 ($A_n^{(1)}$ のときは $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n$ とする)

$$\rho := \sum_i \Lambda_i$$

δ : null root

$$\bar{\Lambda}_\mu := \Lambda_\mu - \Lambda_0$$

$$\mathfrak{h}^* := \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}\delta$$

$X_n^{(1)} = A_n^{(1)}$ のときは \mathfrak{h}^* の内積は $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$

ε \mathfrak{h}^* の orthonormal basis として

$$\bar{\Lambda}_\mu = \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{\mu-1} - \mu\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{n+1} \sum_i \varepsilon_i$$

として

$$\langle \Lambda_0, \varepsilon_\mu \rangle = \langle \delta, \varepsilon_\mu \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \delta \rangle = 1$$

Λ_0 は δ と ε から成る。 $T: A_n^{(1)}$ の vector 表現
 の weight は

$$\hat{D} := \Lambda_{v+1} - \Lambda_v = \varepsilon_v - \varepsilon$$

$$\text{と書く} \quad \left(\sum_{\nu=0}^n \widehat{D} = 0 \right)$$

$A := \{ X_m \text{ の vector 表現の weight の集合} \}$

であるとする。

$X_m^{(1)}$ -型 face model

次のように model を設定する。

local state (自由度の取り得る値) の集合 \mathcal{A} は

$\mathcal{A} = \mathfrak{h}^*$: \mathfrak{h} は $X_m^{(1)}$ の Cartan subalgebra
 であり、 \mathcal{A} の 2 元に対して weak admissibility を
 いう事である。

$a, b \in \mathcal{A}$ に対して

(a, b) が (weakly) admissible



$$b - a \in A$$

により定められる。 (a, b) が admissible であっても (b, a) が admissible であるとは限りません。これを注意しておく。

$\beta T =$ Boltzmann weight についての (性質 N) である。

性質 N. $(a, b), (b, c), (a, d), (d, c)$ が
 すべて admissible τ の $(1, 1)$ 型

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\quad} & b \\ \downarrow & u & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & c \end{array} = 0$$

とする。 $\left(\begin{array}{c} a \xrightarrow{\quad} b \\ \text{みずと"は"} \end{array} \right) (a, b) \text{ が admissible かつ } (a, b) \in \mathcal{E}$

このとき 次の τ が知られている。

定理 $X_n - \text{型}$ Lie algebra に対し

(性質 N) \mathcal{E} 満 $T=1$ かつ STR \mathcal{E} も
 満 $T=1$ ならば τ u について elliptic τ
 face model の Boltzmann weight

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\quad} & b \\ \downarrow & u & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & c \end{array}$$

$$a, b, c, d \in \mathcal{A}$$

がある。

ここで A_n の vector 表現 について その τ
 Boltzmann weight を挙げる。

$a \in \mathcal{A}$, $\hat{\mu}, \hat{\nu} \in \mathcal{A}$ に対し

$$a_{\mu} := \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} := a_{\mu} - a_{\nu}$$

17

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\mu} \\ u \\ a+2\hat{\mu} \end{array} = \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ u \\ \mu \end{array} = \frac{[1+u]}{[1]} \\
 & \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\mu} \\ u \\ a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{array} = \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \nu \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ u \\ \nu \end{array} = \frac{[a_{\mu\nu}-u]}{[a_{\mu\nu}]} \\
 & \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\nu} \\ u \\ a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{array} = \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ u \\ \mu \end{array} = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[a_{\mu\nu}+1][a_{\mu\nu}-1]}{[a_{\mu\nu}]^2}}
 \end{aligned}$$

上記の Boltzmann weight は Lie algebra の classical r 部分にしか本質的に関係してはいないことに注意する。

$A_n - \frac{\mathbb{Z}}{2}$ の vector 表現に関する Boltzmann weight は u について 1 次であるが、 $B_n, C_n, D_n - \frac{\mathbb{Z}}{2}$ の vector 表現に関する Boltzmann weight は u について 2 次である。(§8 の Appendix 参照)

§5 STR の証明の例

ここで §4 の A_n -型 の Lie algebra の vector 表現 に関する Boltzmann weight が STR を満たすことを証明しておく。

まず、いくつかの補題を用意する。

補題 1

(1) Initial condition.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \square & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} = \delta_{bd}.$$

(2) First inversion relation

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \square & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} := \sum_g W \left(\begin{array}{c} a \ g \\ d \ c \end{array} \middle| u \right) W \left(\begin{array}{c} a \ b \\ g \ c \end{array} \middle| -u \right) \\ = \rho(u) \delta_{bd}, \quad \rho(u) = \frac{[1+u][1-u]}{[1]^2}$$

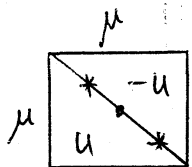
(補題 1 の証明)

(1) A_n の vector 表現 の Boltzmann weight の表式 (1) 明らか。

(2) 次の 3 つの μ 場合に分ける。

(i) $\begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \\ \hline \square & \\ \hline \mu & \mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} = \rho(u)$ IT 明らか。

(ii)



$$= \frac{[a-u][a+u]}{[a]^2} + \frac{[u][-u][a+1][a-1]}{[1]^2 [1]^2}$$

($a = a_{\mu\nu}$)

∴ Boltzmann weight 中の * , * 印の $\epsilon = 3$ に $\langle \epsilon \rangle$ weight 17 (性質 N) 37 $(\mu, \nu), (\nu, \mu)$ の組み合わせのみで、それ以外右辺の第一項, 第二項に対応して $\epsilon = 3$ のみである。

∴ θ 函数 $[\]$ についての等式

$$\begin{aligned} & [x+z][x-z][y+w][y-w] \\ & \quad - [x+w][x-w][y+z][y-z] \\ & = [x+y][x-y][z+w][z-w] \end{aligned}$$

を利用す $\theta(17)$

(上式の右辺)

$$= \frac{-1}{[1]^2 [a]^2} \left\{ \begin{array}{l} [1][-1][a+u][a-u] \\ - [u][-u][a+1][a-1] \end{array} \right\}$$

$$= \frac{-1}{[1]^2 [a]^2} \cdot [a][-a][1+u][1-u]$$

$$= \frac{[1+u][1-u]}{[1]^2} = \rho(u)$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \mu \begin{array}{c} \square \\ \begin{array}{c} \text{top-left} \text{ corner} \\ \text{bottom-left} \text{ corner} \end{array} \end{array} \mu &= \frac{[a-u][u]}{[a][1]} A + \frac{[u][1]}{[1][1]} A \frac{[1-u]}{[1-a]} \\
 &= 0 \\
 \therefore A &= \sqrt{\frac{[a+1][a-1]}{[a]^2}} \quad \square
 \end{aligned}$$

補題 2 $f(u)$ が entire function であり

Γ : 恒等的に $\Gamma \neq 0$ であるとする。このとき

$$\begin{aligned}
 f(u+L) &= e^{-2\pi i B} f(u) \\
 f(u+L\tau) &= e^{-2\pi i (A_1 + A_2 \tau/L)} f(u)
 \end{aligned}$$

とする $\text{Im} \tau > 0$, $L \in \mathbb{R}$, $A_1, B_1, A_2 \in \mathbb{C}$

があるとする。 $f(u)$ は $\text{mod } \Omega$, $\Omega = \mathbb{Z}L + \mathbb{Z}L\tau$

で A_2 個の零点を持つ

$$\sum (\text{零点}) \equiv L (B\tau + \frac{A_2}{2} - A_1) \pmod{\Omega}$$

(補題 2 の証明)

略



STR を満たすことの証明

$$f(u) = \sum_g \left(\begin{array}{c} \text{hexagon 1} \\ \text{top-left} \text{ corner} \\ \text{bottom-left} \text{ corner} \end{array} \right) - \sum_g \left(\begin{array}{c} \text{hexagon 2} \\ \text{top-right} \text{ corner} \\ \text{bottom-right} \text{ corner} \end{array} \right)$$

とおく。 $f(u)$ は 外点 a, b, c, d, e, f と v を固定して u の函数と考えるのである。

目標は $f(u) \equiv 0$ を示すことである。

initial condition v

$$f(0) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline v & v & \\ \hline f & e & d \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline v & v & \\ \hline f & e & d \\ \hline \end{array} = 0$$

ゆえに $u=0$ は $f(u)$ の零点。 $\bar{T} =$

$$\begin{aligned} &= \delta_{bf} \begin{array}{|c|c|} \hline b & c \\ \hline -v & v \\ \hline e & d \\ \hline \end{array} - \delta_{ce} \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline v & -v \\ \hline f & c \\ \hline \end{array} \\ &= \delta_{bf} \delta_{ce} \rho(-v) - \delta_{ce} \delta_{bf} \rho(v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

($\because \rho(u)$ は 偶函数)

ゆえに $u=-v$ も $f(u)$ の零点

よって $[u]$ の period は $L, L\tau$ ($\rho = e^{2\pi i u}$) であり

$$\left. \begin{aligned} [u+L] &= -[u] \\ [u+L\tau] &= e^{-\pi i \tau - \frac{2\pi i u}{L}} \cdot [u] \end{aligned} \right\} (*)$$

である。

$$f(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \kappa \quad u+v \quad \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mu \quad u \quad \gamma \\ \nu \end{array} \\ - \\ \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \kappa \quad u \quad \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mu \quad v \quad \gamma \\ \nu \end{array} \end{array}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \kappa \in A$ を用いて書かれてある
 1717". (\bullet は和を意味する)

$f(u) \neq 0$ "から17"

$$f(u+L) = f(u)$$

$$f(u+L\tau) = \exp\left\{-2\pi i\tau - 2\pi i\left(\frac{2u+v+\delta_{\kappa\nu}+\delta_{\mu\nu}}{L} - \frac{a_{\kappa\beta}-a_{\mu\gamma}}{L}\right)\right\} f(u)$$

である。この1717"前へ $-v$ の (*) 式を

Boltzmann weight の表式を直接 f に代入して
 計算すれば示される。

よって $f(u)$ に対し補題 2 を用いて $f(u)$
 $\text{mod } \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}L + \mathbb{Z}L\tau$ で $f(u)$ の零点
 は 2 個であることがわかる。つまり v と $-v$
 0 と $-v$ である。よって補題 2 の後半より

$$\sum(\text{零点}) = 0 - v$$

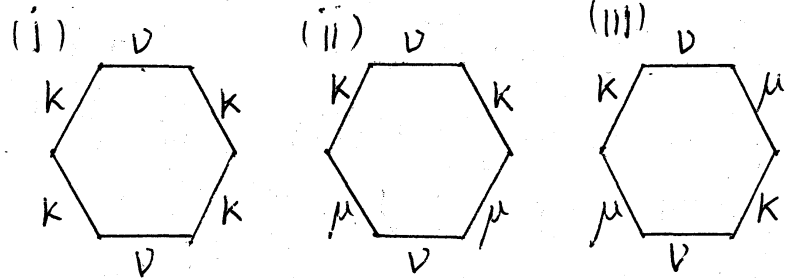
$$\equiv L\left(0 + 1 - \frac{v + \delta_{\kappa\nu} + \delta_{\mu\nu} - a_{\kappa\beta} - a_{\mu\gamma}}{L}\right) \text{mod } \mathcal{Q}$$

$$\therefore \delta_{\kappa\nu} + \delta_{\mu\nu} - a_{\kappa\beta} - a_{\mu\gamma} \equiv 0 \text{ mod } \mathcal{Q}$$

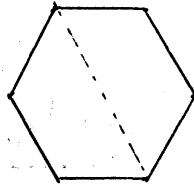
である。これが合かるが、この式が成立するのは、

$k \neq \nu, \mu \neq \nu$ から $\{k, \mu\} = \{\beta, \gamma\}$...
 なる場合のみである。再び補題2を用い、 ν 以外に $f(u) \equiv 0$ となる STR は満たすことがわかる。よって後述上の場合にも STR が成立するといふことが示せられる。

次の3つの場合に合ける



(ii), (iii) の場合 u のかわりに v の函数を見て先と同様にすべしができる。→ u と v を入れ換えるといふことを考えてみると



なる破線て折り返すといふことであるが (i) (ii) (iii) を折り返したものは (i), (ii), (iii) のいすべし

と示してあるので、既に示した場合には含
 于い STR が成立するよか分かる。

(iii) の場合について、六角形内部の
 edge に対応する weight がすべて定列

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \\
 &= \frac{[u+v]}{[1]} A_{kv} \cdot \frac{[v]}{[1]} A_{k\mu} \cdot \frac{[u]}{[1]} A_{\mu v} \\
 &\quad - \frac{[u]}{[1]} A_{\mu v} \cdot \frac{[v]}{[1]} A_{k\mu} \cdot \frac{[u+v]}{[1]} A_{kv} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore A_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{[a_{\alpha\beta}+1][a_{\alpha\beta}-1]}{[a_{\alpha\beta}]^2}}$$

と Boltzmann weight が STR を 証明 するよか
 示すよか

§6 Restriction

restricted model は Lie algebra X_m とその表現
 及び l "level" を定められ決まる。unrestricted
 model では local state は無限個あるが、この
 restriction を行ったら、 l による local state は
 有限個となる。今までの物理の方から知られて
 いる model は当然この restriction を行った後の
 model である。

l は 2 以上の整数として restricted model の
 local state の集合 \mathcal{J}_l は

$\mathcal{J}_l := \{ X_m \text{ の level } l \text{ の dominant integral weight} \}$
 である ($\#\mathcal{J}_l < +\infty$) \mathcal{J}_l の 2 元に対して "strong"
 admissibility がある。

「 $a, b \in \mathcal{J}_l$ について (a, b) が admissible」



「任意の Dynkin diagram automorphism σ に対して

$$V(\overline{\sigma(a)}) \otimes V_{\square} > V(\overline{\sigma(b)})$$

すなわち、 $V_{\square} : X_m$ の vector 表現, $\bar{a}; a$ の classical part

$V(a) : X_m$ の highest weight a の 既約表現」

定義する。

§4 の unrestricted model 1 において Boltzmann weight Φ の $[u] = \theta(\frac{\pi u}{L}, p)$ の L 上の Φ に restrict する。

$$L = t(l + g)$$

g : dual Coxeter number of $X_n^{(1)}$

l : level

$\therefore t, g$ は 実際には以下の数である

	$A_n^{(1)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$
g	$n+1$	$2n-1$	$n+1$	$2n-2$
t	1	1	2	1

このとき

定理

unrestricted model 1 において L 上の Φ に specialize すると $\frac{L}{t}$ の "strong" admissibility のとき STR が成立する。

例) $\hat{A}_n^{(1)}$ の場合

$\hat{A}_n^{(1)}$ の場合 $L = l + n + 1$

$$\mu \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline u \\ \hline \beta \\ \hline \end{array} = W \left(\begin{array}{cc} a & a + \hat{\alpha} \\ a + \hat{\mu} & a + \hat{\alpha} + \hat{\beta} \end{array} \middle| u \right), \quad \Gamma = \Gamma' = 1, \quad \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$$

$$a_\mu = \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} = a_\mu - a_\nu$$

これらから

$$a = (L + a_n - a_0 - 1) \Lambda_0 + \sum_{\mu=1}^n (a_{\mu-1} - a_{\mu-2}) \Lambda_\mu$$

よって (strong) admissibility は

$$a \in \mathcal{A}_1, \quad a_{\mu\nu} \in \mathbb{Z}, \quad \sum a_\mu = 0$$

$$L + a_n > a_0 > a_1 > \dots > a_n$$

と同様に「よ」は admissibility の成立

に「よ」は $0 < |a_{\mu\nu}| < L$ の $[a_{\mu\nu}] \neq 0$

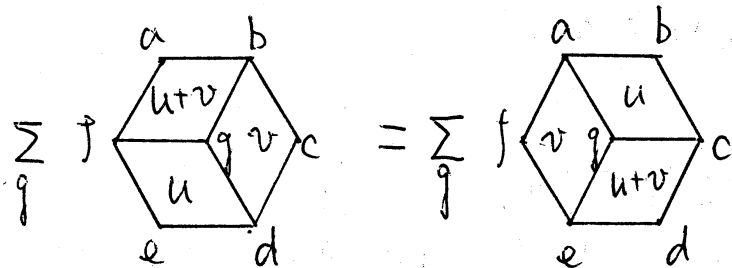
より Boltzmann weight は $\frac{1}{L}$ 散らばる。

STR の証明

$A_n^{(1)}$ の restricted model

に「よ」は Boltzmann weight の STR を証明す

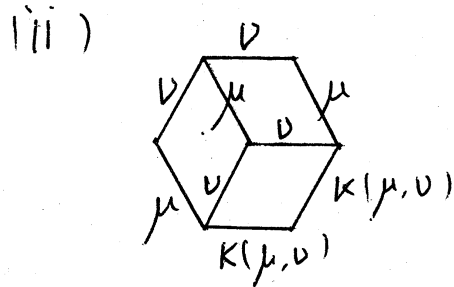
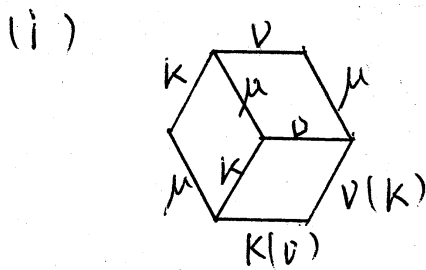
ることを証明する。これは「よ」は



に「よ」は外点 a, b, c, d, e, g がすべて \mathcal{A}_1 の元であることも g が \mathcal{A}_1 の元であることを保証

2.1.1. Boltzmann weight \square において
 + の位置にくる weight の dominant integral
 で示す危険の恐れがあるが、その危険
 については示しておく

STR の右辺で (外点) $e \in \mathcal{D}_1$ でありかつ
 g の dominant integral で示す恐れがある
 のは、 $k, \nu, \mu \in \mathbb{Z}$ に異なりを示す。



示す場合の e であり、これは e には

g の部分の Boltzmann weight が有限
 であることを示す。

$$(a + \hat{\mu})_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\mu} - \delta_{\beta\mu}$$

示す式を用いる

(i)

$$= \frac{[1+u]}{[u]} \quad \text{if } 0, k$$

$$= \frac{[u]}{[1]_N} \sqrt{\frac{[q_{k\nu}+1][q_{k\nu}-1]}{[q_{k\nu}]^2}}$$

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

と仮定する

$$g = a + \hat{\mu}$$

$$= (a_0, \dots, a_{\mu+1}, \dots, a_n) - \frac{1}{n+1} (1, 1, \dots, 1)$$

g は dominant integral weight $\tau^T \rho \in \Gamma$.

$$L + a_n > a_0 > \dots > a_{\mu-1} > a_{\mu+1} > a_{\mu+1} > \dots > a_n$$

τ の条件を満足する $\tau \in \Gamma$, $\rightarrow \exists$

$$a_{\mu-1} = a_{\mu+1}$$

と \exists $\tau \in \Gamma$ があるから $\nu = \mu - 1$ とする $\tau \in \Gamma$ とする

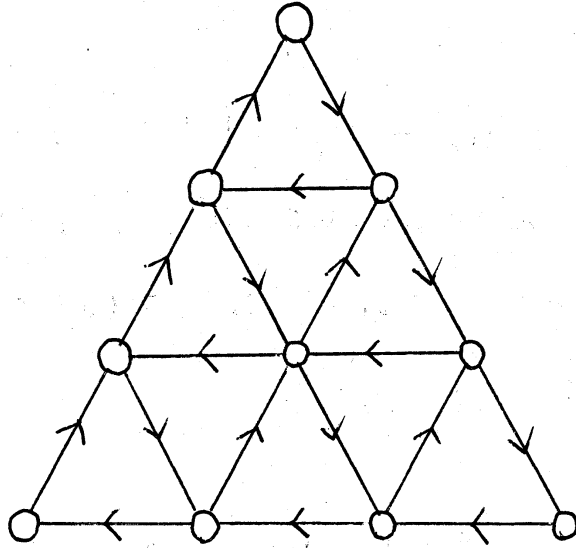
$$a_{\mu\nu} + 1 = 0$$

と \exists $\tau \in \Gamma$ があるから $\nu = \mu$ とする

$$\mu \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \nu \end{array} \mu = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[a_{\mu\nu} + 1][a_{\mu\nu} - 1]}{[a_{\mu\nu}]^2}} = 0$$

$\rightarrow \exists$ unrestricted model の STR \mathcal{M} 上を用いて local state を ν に制限して STR が成立する。(左辺についても同様の議論をする。)

$n=3, l=3$ の \mathbb{Z}_3 の local state \mathcal{S}_1



$b \leftarrow a$ if (a, b) is admissible
あり $\in \mathbb{Z}_3$ だけ。

$\therefore \mathbb{Z}_3$ # $\mathcal{S}_1 = 10$

§7 Fusion Procedure

Fusion procedure とは、基本表現に対する Boltzmann weight から 高い表現に対する Boltzmann weight を構成する手続きである。現在までのところ、この手続きは A 型の model に対してのみ完成している。以下では主に restricted model について述べる。

Boltzmann weight の modification.

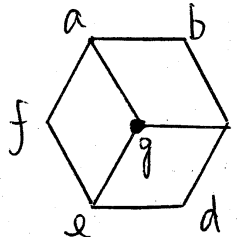
本節では次のように Boltzmann weight を modify する。

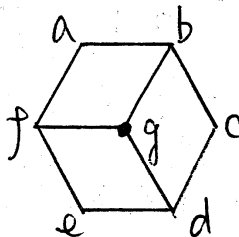
$$\tilde{w}\left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u\right) = w\left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u\right) \left\{ \frac{s(a,d)s(d,c)}{s(a,b)s(b,c)} \right\}^{1/2}$$

$$s(a,b) := \prod_{\lambda \neq \mu} \left\{ [a_{\mu\lambda}] [a_{\mu\lambda} + 1] \right\}^{1/2}$$

$$\hat{\mu} = b - a$$

$w\left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u\right)$ が STR を満たすこと $\tilde{w}\left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u\right)$ も STR を満たすこと $W = \square$ を示す。



$$= \left\{ \frac{S(a,b)S(b,c)S(c,d)}{S(a,f)S(f,e)S(e,d)} \right\}^{-1/2}$$


$$= \left\{ \frac{S(a,b)S(b,c)S(c,d)}{S(a,f)S(f,e)S(e,d)} \right\}^{-1/2}$$

かゝる \tilde{w} についての STR を与えていることから明らかである。 $\tilde{w} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u \right)$ を実際に計算すると

$$\tilde{w} \left(\begin{smallmatrix} a & a+\hat{\mu} \\ a+\hat{\mu} & a+2\hat{\mu} \end{smallmatrix} \middle| u \right) = \frac{[1+u]}{[1]}$$

$$\tilde{w} \left(\begin{smallmatrix} a & a+\hat{\mu} \\ a+\hat{\mu} & a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{smallmatrix} \middle| u \right) = \frac{[a_{\mu\nu}-u]}{[a_{\mu\nu}]}$$

$$\tilde{w} \left(\begin{smallmatrix} a & a+\hat{\nu} \\ a+\hat{\mu} & a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{smallmatrix} \middle| u \right) = \frac{[u][a_{\mu\nu}+1]}{[1][a_{\mu\nu}]}$$

以降本節で \tilde{w} の $\tilde{w} \in W$ を \mathbb{Z} 上の表示の Boltzmann weight を用いることになる。

Symmetric Tensor 表現

後述する一般の表現に対する議論から 然る symmetric tensor 表現についての結果が得られることができるが、この場合について片端的に結果

に致るので別に求めておくことにする。

まず次の補題を用意する。

補題

$$h_N(a, b | u) = \sum_P \begin{array}{c} a \quad a^{(1)} \quad \dots \quad a^{(N-1)} \quad b \\ \mu \quad u \quad u+1 \quad \dots \quad u+N-1 \quad \nu \\ d \quad d^{(1)} \quad \dots \quad d^{(N-1)} \quad c \end{array}$$

$$= \prod_{j=1}^{N-1} \frac{[u+j]}{[1]} \frac{[u+b\nu-a_\mu] \prod_{\lambda=\mu}^{\mu+j} [b\nu-a_\lambda+1]}{\prod_{\lambda} [c\nu+\delta_{\nu\lambda}]}$$

$$v_N(a, b | u) = \sum_{P'} \begin{array}{c} a \quad \nu \quad b \\ a^{(1)} \quad u+N-1 \quad b^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(N-1)} \quad u \quad b^{(N-1)} \\ d \quad \mu \quad c \end{array}$$

$$= \prod_{j=1}^{N-1} \frac{[u+j]}{[1]} \frac{[u+c\mu-b\nu] \prod_{\lambda=\mu}^{\mu+j} [c\nu-b\nu+1]}{\prod_{\lambda} [c\nu+\delta_{\nu\lambda}]}$$

$\therefore P = (a^{(0)}, \dots, a^{(N)}), a^{(0)} = a, a^{(N)} = b$
 $P' = (b^{(0)}, \dots, b^{(N)}), b^{(0)} = b, b^{(N)} = c$

$\tau \sum_P$ は $a^{(i)} \in \mathcal{A}_1, (a^{(i)}, a^{(i+1)})$ が weakly-admissible である τ path の \sum_P である。 $\sum_{P'}$ も同様である。

したがって $g = (d=d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(N)}=c), g' = (a=a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(N)}=d)$ すべて $a^{(i)} \in \mathcal{A}_1, (d^{(i)}, d^{(i+1)})$ が weakly-admissible τ $d^{(i)} \in \mathcal{A}_1$ かつ $d^{(i)}$ の τ 方がある $h_N = 0$ かつ h_N は g の τ 方に τ によって定まる。 v_N についても同様

(証明)

補題の前半の数学的帰納法により

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \\
 \\
 + \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} a+\hat{\mu} \\ \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u+1 & \dots \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} a+\hat{\nu} \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u+1 & \dots \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} a+\hat{\nu} \\ \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u+1 & \dots \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

を計算すれば直ちに分かる。後半の q に依らずに成り立つ表式 γ 。 q が定理中に述べた T であるならば T であるならば $h_N = 0$ である。 $\exists \alpha \in \mathfrak{g}$ $\mu \neq \nu - 1$ ならば ν で $a_{\nu-1} - b_{\nu} \equiv 1 \pmod{L}$ である ν があるから表式中の因子が 0 である。 ν_N についても同様。

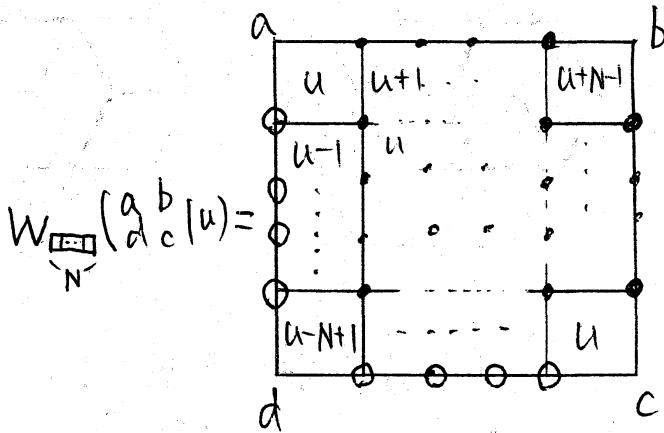
補題中の $h_N \neq 0$ である T への q の条件は

$$V(\sigma(d)) \otimes V[\square] \supset V(\sigma(c)) \quad \text{for } \forall \sigma$$

σ : Dynkin diagram automorphism

と同値である。 vector 表現の \mathfrak{g} の strong

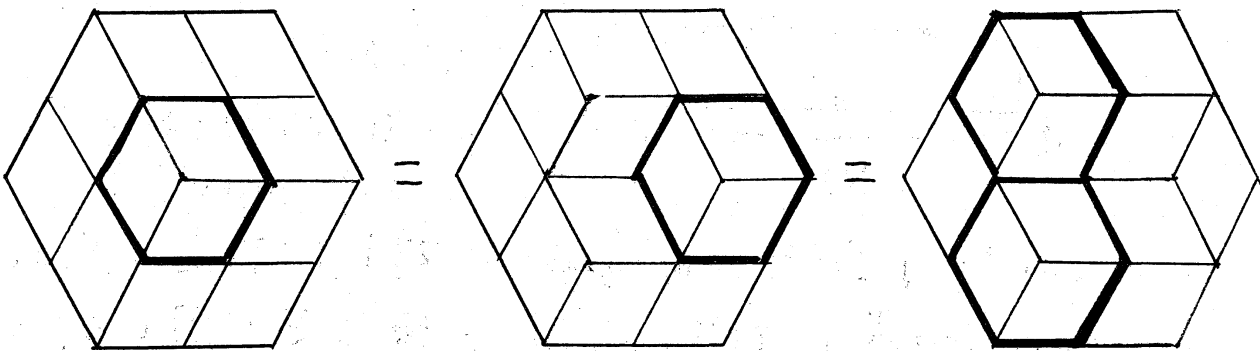
admissibility と同じであることに注意する。



• の site は可能
↑ weight について
全和をとる。

と $W_{\square}^{(a,b|d,c)}(u)$ を定めれば 補題 の h_N, v_N の path q, q' に対する非依存性 $\forall W_N \neq 0$ 印の site の切り方に依らずに定まること。先の注意より a, b, c, d による “strong admissibility w.r.t V_{\square} ” を満たす u のみ $W_N \neq 0$ となる。これは u による symmetric tensor 表現に対する Boltzmann weight である。

$N=2$ の場合には $W^{(2)}$ による STR を満足する u を示しておく。



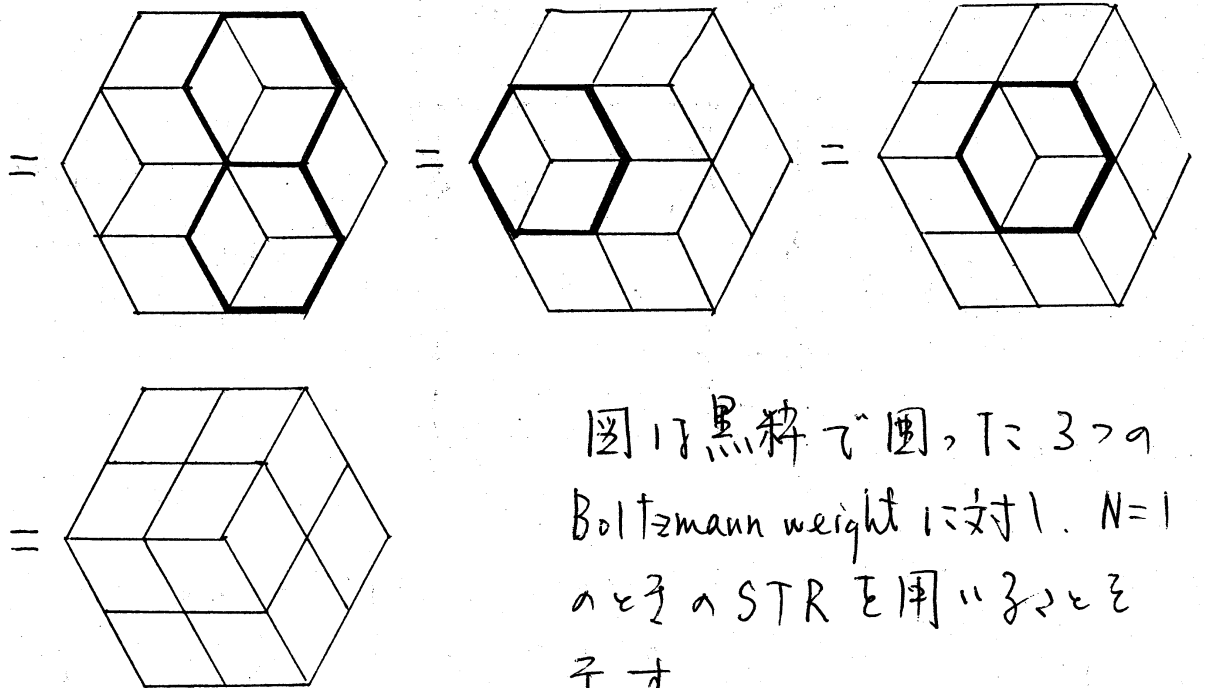
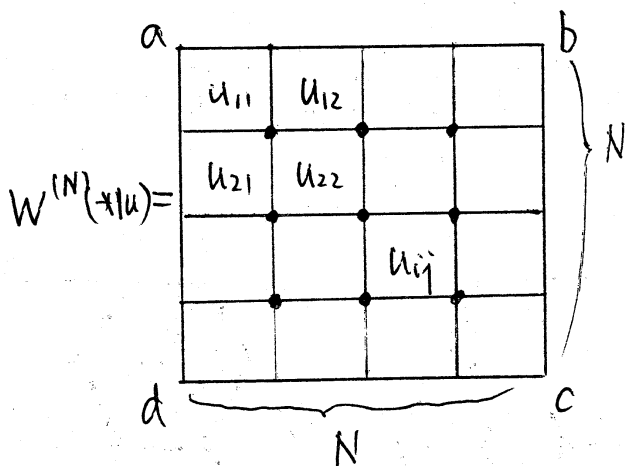


図1は黒線で図1に3つの Boltzmann weight に対し、 $N=1$ のときの STR を用いて示す。

一般の表現

まず次の $N \times N$ Boltzmann weight を考える。



$a, b, c, d \in \mathcal{J}_1$

内点のみすべて和をとる (symmetric tensor の場合 と異なる)

$u_{ij} = u + \alpha_i(0) - \alpha_j(0)$
(cf Appendix)

この $N \times N$ Boltzmann weight に対して上の N に vector 表現 に対する STR を繰り返して用いて

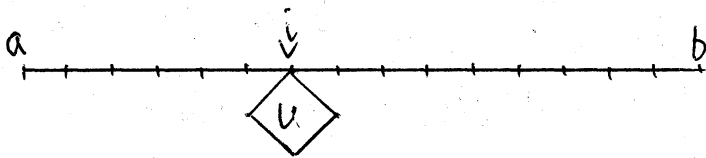
1 = N) や 1 = 1) STR が成立する := 場合のみ。

$$V_{ab}^{(N)} := \left\{ \bigoplus_{\mathbb{C}} |a^{(0)}, \dots, a^{(N)}\rangle \mid \begin{array}{l} a^{(0)} = a, a^{(N)} = b \\ a^{(i)} \in \mathcal{A}, a^{(i+1)} - a^{(i)} \in \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

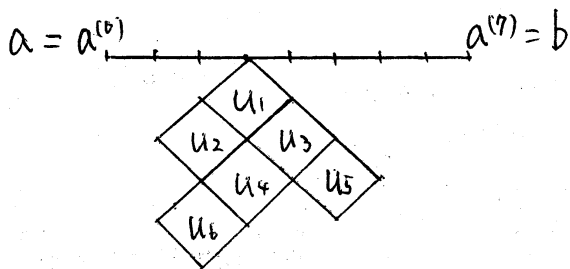
と 1 次の 3 行 operator を定める。

$$W_i(u) |a^{(0)} \dots a^{(N)}\rangle := \sum_{a^{(i)}, a^{(i+1)}} W(a^{(i)}, a^{(i+1)} | u) |a^{(0)} \dots a^{(i)} a^{(i+1)} \dots a^{(N)}\rangle$$

この operator $W_i \in$ face operator と呼ぶ。この operator の matrix element は vector 表現の Boltzmann weight から成っている := に注意する。 W_i から $V_{ab}^{(N)}$ に作用して := 。



このように表わす。 := して $a \longrightarrow b \in V_{ab}^{(N)}$ と見て operator $\diamond u$ が i 番目の位置に下から作用して := 状態 := である。例として



17.

$$W_2(u_6)W_5(u_5)W_3(u_4)W_4(u_3)W_2(u_2)W_3(u_1)$$

が $V_{ab}^{(7)}$ に作用してこれを読むのである。

Young diagram Y ($\deg Y = N$) に対する Young symmetrizer の deformation $F_Y: \mathcal{M}$ (F_Y の定義は本書の最後の Appendix 参照, F_Y は Jacobi operator の合成に $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, Boltzmann weight の rational limit で F_Y は通常の Young symmetrizer である。)

$$\tilde{V}_{ab, Y}^{(N)} := F_Y(V_{ab}^{(N)})$$

$\tilde{V}_{ab, Y}^{(N)}$ を定める。このとき $a, b \in \mathcal{A}$, かつ表現 Y に属して admissible であるとき $\dim \tilde{V}_{ab, Y}^{(N)} \geq 1$ となる。

$$(a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(N)}), \quad a^{(0)} = a, \quad a^{(N)} = b \\ a^{(i+1)} - a^{(i)} \in \mathcal{A}$$

なる path が $\tilde{V}_{ab, Y}^{(N)}$ 中にあると定める。

注意

(1) Y が symmetric tensor であるとき

$$\dim \tilde{V}_{ab, Y}^{(N)} \leq 1$$

Y が一般のとき \mathcal{M} Boltzmann weight の通路上 edge 上の variable を指定して \mathcal{M} を定める。

ら「 σ 」か(後述). symmetric tensor の場合
 その必要が「 σ 」か「 τ 」かの「 σ 」の事情に「 σ 」.

(2) L が + 命大子「 σ 」に「 σ 」次の「 σ 」が知ら
 ている.

$$\begin{aligned} \dim \widetilde{V}_{ab, \gamma}^{(N)} &= \text{multiplicity of } V_{\bar{b}} \text{ in } V_{\bar{a}} \otimes V_{\gamma} \\ &= [\rho_{\bar{a}} \otimes \rho_{\gamma}, \rho_{\bar{b}}] \\ &= \min_{\sigma} [\rho_{\sigma(\bar{a})} \otimes \rho_{\gamma}, \rho_{\sigma(\bar{b})}] \end{aligned}$$

σ : Dynkin diagram automorphism of $A_n^{(1)}$

$(\rho_{\bar{a}}, V_{\bar{a}})$: highest weight \bar{a} の A_n の既約表現

\bar{a} : a の classical part

ゆえに: L が + 命大子「 σ 」に「 σ 」, (a, b) が
 表現 γ に「 σ 」admissible である.

$$V_{\sigma(\bar{a})} \otimes V_{\gamma} \supset V_{\sigma(\bar{b})} \text{ for } \forall \sigma$$

と「 σ 」同値であり, γ が vector 表現, symmetric
 tensor 表現の「 σ 」の自然な拡張「 σ 」, である.

Boltzmann weight $W^{(N)} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | u$ は matrix element
 である operator $W^{(N)}(u)$ は $\mathcal{V} := \bigoplus_{a, b \in I} V_{ab}^{(N)}$ へ
 作用する. $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ に作用する. $\mathcal{V}_{\gamma} := \bigoplus_{a, b \in I} \widetilde{V}_{ab, \gamma}^{(N)}$
 へ「 σ 」作用する. 結果の「 σ 」引用する次の定理は重要で
 ある.

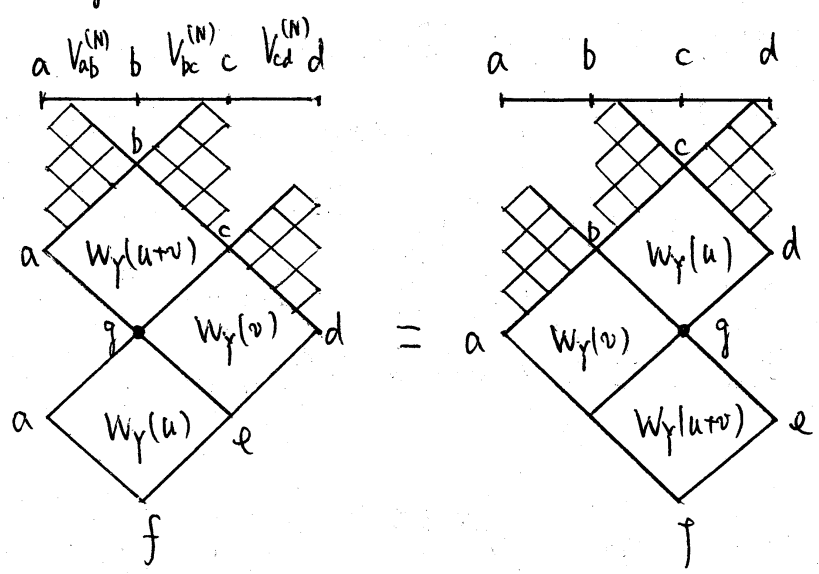
定理

$$W_Y \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} (u) \left(\widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} \otimes \widetilde{V}_{bc,Y}^{(N)} \right) \subset \widetilde{V}_{ad,Y}^{(N)} \otimes \widetilde{V}_{dc,Y}^{(N)}$$

$W^{(N)}(u)$ が $\mathcal{R}^{\otimes 3}$ 上 STR を満たす $\forall u$. 定理より $W_Y(u) = 0$ on $\mathcal{R}^{\otimes 3} / \mathcal{R}_Y^{\otimes 3}$ であるから容易に次を得る

系 $W_Y(u)$ は $\mathcal{R}_Y^{\otimes 3}$ 上 STR を満たす.

$\therefore \forall u \in \widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} = F_Y V_{ab}^{(N)}$ に u をついで \square を用いて表わせば



とす (本節の Appendix 参照)

先 a admissibility の定義の site 上の dominant integral weight a, b, c, d を定めても Boltzmann weight にす.

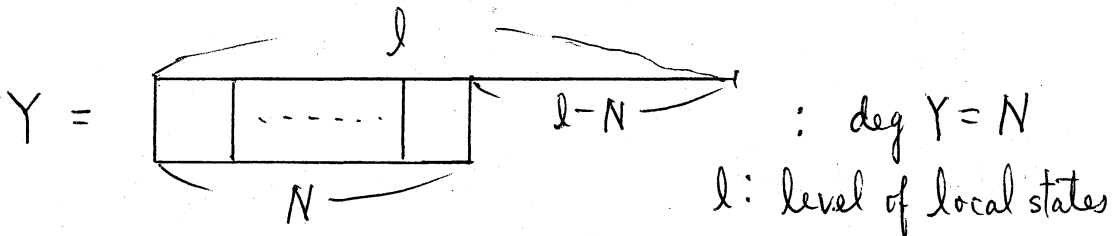
$$(\dim \tilde{V}_{ab,Y}^{(N)} \times \dim \tilde{V}_{bc,Y}^{(N)}) \times (\dim \tilde{V}_{ad,Y}^{(N)} \times \dim \tilde{V}_{dc,Y}^{(N)})$$

だけの種類がある。従って Boltzmann weight の通付 site 上の local state $a, b, c, d \in \mathcal{J}_1$ の他に $\tilde{V}_{ab,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{bc,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{ad,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{dc,Y}^{(N)}$ の base を定める。これに $W_Y(u)$ の matrix element w として現れるのである。指定した $\tilde{V}_{xx,Y}^{(N)}$ の base に対応する edge の上にあると考える。

一点函数の予想

以上の形に定められた一般の表現に対する Boltzmann weight に \mathcal{Y} LSP を加える次の形になる予想される。branching coefficient については §11 に若干の説明がある。

例 1 symmetric tensor

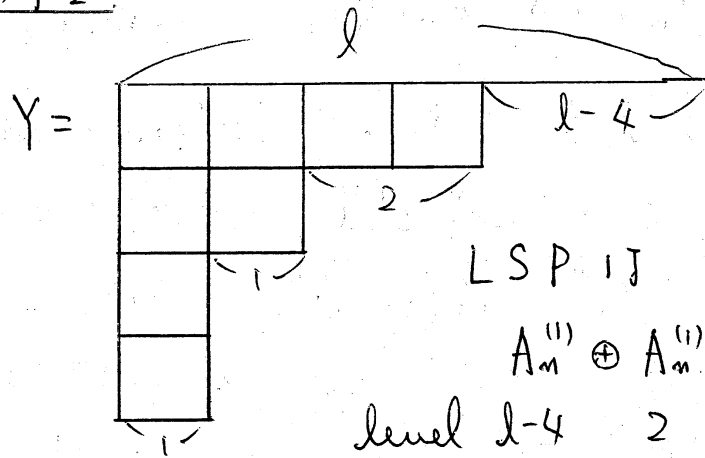


$$\text{LSP } \mathcal{Y} \quad A_n^{(l)} \oplus A_n^{(N)} \supset A_n^{(l)}$$

level $l-N$ N l

の branching coefficient

例 2



LSP IT

$$A_m^{(1)} \oplus A_m^{(2)} \oplus A_m^{(3)} \oplus A_m^{(4)} \supset A_m^{(5)}$$

$$\text{level } l-4 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad l$$

の branching coefficient

一般の Young diagram $Y = (f_1, \dots, f_m)$

$f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_m > 0$ に対する予想以上の例から容易に推察できることと思う。

例 1 のとき local state $a \in \mathcal{J}_1$ についての LSP IT boundary condition (f9 参照) を

a_1 : dominant integral weight, level = $l-N$

a_2 : dominant integral weight, level = N

取)

$$p1 = a_1 + \sigma^{l-1}(a_2)$$

と決定 IT をとるに

$$V_{a_1} \otimes V_{a_2} \supset V_a$$

の branching coefficient をとるのである。

例 2 の場合も同様に $a \in \mathcal{J}_1$ についての LSP

—MEMO—

Appendix of § 7

Young symmetrizer a deformation F_Y Young symmetrizer a deformation F_Y の τ (τ の $\frac{1}{2}$ を
示す) である。Young diagram $Y = (f_1, \dots, f_m)$, $f_1 \geq \dots \geq f_m > 0$
 $N = f_1 + \dots + f_m$ に次の β に数を書き込む。

0	1	2	3	4	...
$z-1$	z	$z+1$	$z+2$	$z+3$...
$2z-2$	$2z-1$	$2z$	$2z+1$		
$3z-3$	$3z-2$	$3z-1$	$3z$		

, $Y = (4, 3, 1)$

 τ に対して $\alpha_1(z), \dots, \alpha_N(z)$ をこの書き込みから従
って次の β にする。

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 3$$

$$\alpha_5 = z-1, \alpha_6 = z, \alpha_7 = z+1$$

$$\alpha_8 = 2z-2$$

 τ に対して一般の $Y = (f_1, \dots, f_m)$ に対して

$$\sum_{j=1}^k f_j < i \leq \sum_{j=1}^{k+1} f_j \quad \tau \text{ の } i \text{ に対して}$$

$$\alpha_i(z) = kz - k + (i-1 - \sum_{j=1}^k f_j)$$

とす。 $\alpha_{ij}(z)$ は

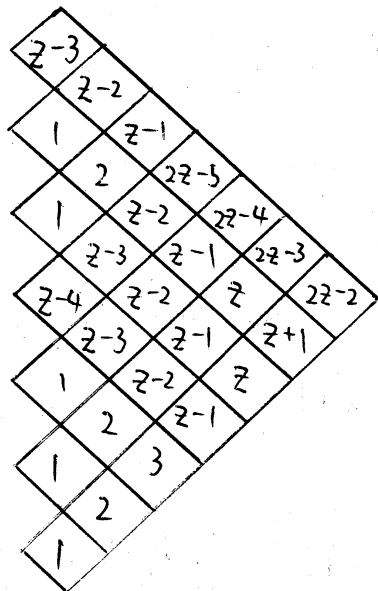
$$\alpha_{ij}(z) = \alpha_i(z) - \alpha_j(z)$$

とす。

$F_Y(z)$ は

$$\begin{aligned}
 F_Y(z) := & W_1(\alpha_{21}) \\
 & \times W_2(\alpha_{31}) W_1(\alpha_{32}) \\
 & \times W_3(\alpha_{41}) W_2(\alpha_{42}) W_1(\alpha_{43}) \\
 & \times \dots \\
 & \times W_{N-1}(\alpha_{N,1}) W_{N-2}(\alpha_{N,2}) \dots W_1(\alpha_{N,N-1})
 \end{aligned}$$

とす。 $Y = (4, 3, 1)$ のときは $F_Y(z)$ は \mathbb{Z} で $\frac{z^4}{z^3}$ とす。



おおよそ $F_Y(z)$ は $z \rightarrow 0$ と 1 にも F_Y の T による $F_Y(z)$ の零点をもつので $z=0$ と $z=1$ を除いておく。
 そのために

$$\beta_{ij}(z) = \prod_{r=2}^{f_j} \prod_{s=1}^{f_i} [(j-i)(z-1) + r-s], \quad i < j$$

$$\text{もし } i < j, f_j = 1 \text{ のとき } \beta_{ij}(z) = 1$$

と 17

$$F_Y := \lim_{z \rightarrow 0} F_Y(z) \prod_{i < j} \beta_{ij}(z)^{-1}$$

と F_Y を定義する。

$Y = (4, 3, 1)$ のとき定数 τ と $\beta_{12}(z)$ のみで

以下

$$\beta_{12}(z) = [z-3][z-2]^2[z-1]^2[z]^2[z+1]$$

がある。 ($[x] = \theta_1(\frac{\pi x}{L}, p)$)

F_Y は Young symmetrizer の deformation であるといふのは、rational limit における

$$W_i(u) = 1 + P_{i, i+1}$$

$P_{ij} : (i \leftrightarrow j)$ の permutation.

であるといふ。

Part 2 Local State Probability (LSP) の計算

restricted face model (vector 表現) と vertex model の双方について LSP を計算する。

§8 Corner Transfer Matrix (CTM)

CTM は face model の 1 点函数を求める方法であるが、これについて rigorous かつ数学的証明は与えられていない。

\mathcal{X}_* : local state の集合

$$P_a := \text{Prob}(p^{(i)} = a), \quad a \in \mathcal{X}_*$$

$$= \frac{1}{Z_{\text{conf}}} \sum_{\text{faces}} \delta(p^{(i)}, a) \prod_{\text{faces}} W \begin{pmatrix} p^{(i)} & p^{(j)} \\ p^{(k)} & p^{(l)} \end{pmatrix}$$

$p^{(i)}$: ある fixed site

すなわち P_a はある fixed site $p^{(i)}$ が a という状態をとりうる確率、1 点函数 (LSP) である。定義より

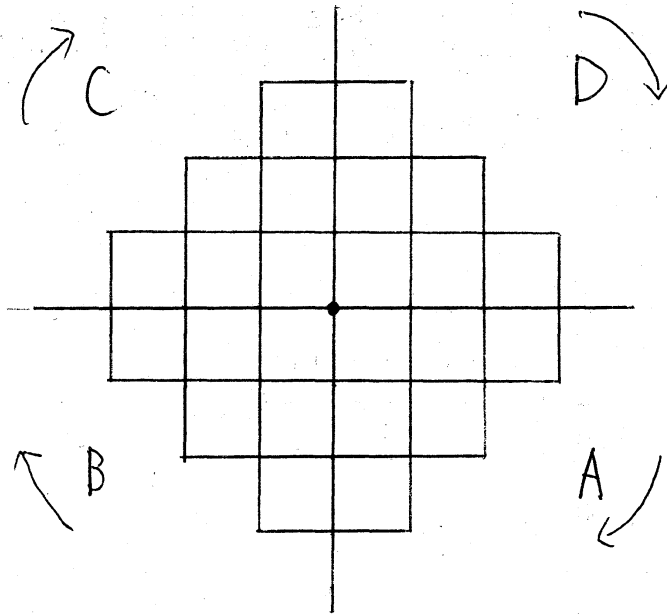
$$\sum_{a \in \mathcal{X}_*} P_a = 1$$

は明らかである。

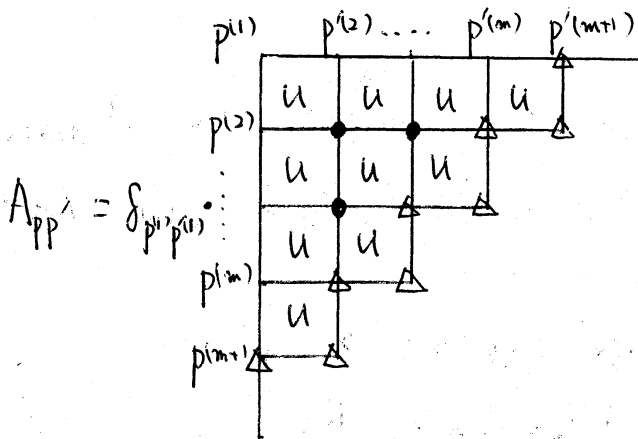
これから P_a を求める際には格子の boundary condition を指定して求めなければならない。

を注意しておく。

Corner Transfer Matrix A, B, C, D と 1 次元の格子とみなす。まず固定した 1 つの site $p^{(1)}$ のまわりに次の格子を考える。



例えば CTMA 上の格子の第 4 象限の部分を取り出して



$$P = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$$

$$P' = (p^{(1)'}, \dots, p^{(m)'})$$

$$p^{(i)}, p^{(i)'} \in \mathcal{J}_+$$

の \prod Boltzmann weight の積 Z となる。 Δ 印の site は指定した boundary condition に従って固定。

• Δ 印の site 1 site local state \mathcal{J} に対して和 Z となるものとする。 したがって得られる $Z = \text{Trace } A_{pp'}$ 要素として得られる matrix が CTM A である。 \rightarrow 列行列 A は $p = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$ $p' = (p'^{(1)}, \dots, p'^{(m)})$ に m index したる要素 Z も $(\#\mathcal{J})^m \times (\#\mathcal{J})^m$ size の matrix である。 残りの B, C, D も対応する象限列同様に定義される。

CTM を用いる z については LSP は

$$P_a = \frac{\text{Trace} (S_a A(u) B(u) C(u) D(u))}{\text{Trace} (A(u) B(u) C(u) D(u))}$$

$$(S_a)_{pp'} = \delta(p^{(1)}, a) \delta_{pp'}$$

と表示される。

以後 Boltzmann weight 中の theta 函数の nome p は $0 < p < 1$ 変数 u は $-\frac{1}{2}(m+1) < u < 0$ であるとする。 一般にこの範囲を Regime III と呼ぶ。

STR 及び u いくつかの付帯条件を仮定して (Baxter の本を参照のこと) CTM についての Baxter の仮説 \rightarrow 次の \prod ものである。

Baxter の仮説 格子 size $m \rightarrow \infty$ で

$$A(u) = \theta_1 M_1 \exp(uH) \theta_2^{-1}$$

$$B(u) = \theta_2 M_2 \exp(-uH) \theta_3^{-1}$$

$$C(u) = Q_3 M_3 \exp(uH) Q_4^{-1}$$

$$D(u) = Q_4 M_4 \exp(-uH) Q_1^{-1}$$

∴ H, Q_i, M_i ($i=1, 2, 3, 4$) は
 u に依存せず S_a と可換. H は M_i
 は diagonal である.

∴ Baxter の主張を認めると

$$P_a = \frac{\text{Trace}(S_a M_1 M_2 M_3 M_4)}{\text{Trace}(M_1 M_2 M_3 M_4)}$$

∴ H diagonal matrix M_i ($i=1, 2, 3, 4$) の性質を調べる ∴ H P_a と可換 ∴ H の性質を調べる. そのために H の Boltzmann weight の性質をもう少し調べておく.

Boltzmann weight の性質

$$(i) \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline u=0 & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} = \delta_{bd} \quad (\text{initial condition})$$

$$\therefore \text{よって} \quad A(0) = C(0) = \text{id}$$

$$\text{id} = A(0) = Q_1 M_1 Q_2^{-1} \quad \text{よ} \quad Q_2 = Q_1 M_1$$

$$\therefore A(u) = Q_2 \exp(uH) Q_2^{-1}$$

(iii) 2nd inversion relation

記号の簡単なT:の \therefore である

$$\overline{W} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{G_a G_c}{G_b G_d}} W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

 G_a : 以下参照

とあり、以下の本節では \square は \overline{W} を表すものとする。

$$\textcircled{1} \quad \sum_g \begin{array}{c} a \quad b \\ \square \\ c \quad g \\ b \quad g \end{array} = \rho_2(u) \delta_{ac}$$

$\lambda = -\frac{tg}{2}$ (t, g は δ (参照))

$$\textcircled{2} \quad M_1 M_2 M_3 M_4 = \exp(2\lambda \mathcal{H}) G \times \left(\begin{array}{c} P^{(1)} \\ \vdots \\ P^{(n)} \end{array} \right) \text{ (独立項)}$$

 \therefore G は matrix T

$$G_{pp'} = G_{p^{(u)}} \cdot \delta_{pp'}$$

$$G_a := \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n+1} [a_\mu - a_\nu] \quad \text{for } A_n^{(1)}$$

$$\varepsilon(a) \prod_{\mu=1}^n h(a_\mu) \prod_{1 \leq k < \nu \leq n} [a_k - a_\nu] [a_k + a_\nu]$$

for $B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$

$$\varepsilon(a) \text{ は } \frac{\varepsilon(a+\hat{\mu})}{\varepsilon(a)} = \sigma \quad \{ \sigma \} \text{ sign factor}$$

$\sigma \in h(a)$ は $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ の $\mathbb{Z} \cup \{0\}$ である

7次の方角である。

	$A_n^{(1)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$
$k(a)$	1	$[a]$	$[2a]$	1
σ	1	1	-1	1

$\rho_2(u)$ の具形形

$$\rho_2(u) = \frac{[\lambda+u][\lambda-u]}{[1]^2} \quad \text{for } A_n^{(1)}$$

$$\frac{[\lambda+u][\lambda-u][1+u][1-u]}{[\lambda]^2[1]^2} \quad \text{for } B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$$

(証明)

(i) 略

(ii) ① A型の場合に Boltzmann weight の表式を直接計算して示す。B, C, D型の $\rho_2(u)$ については (B, C, D型の Boltzmann weight は本節の Appendix E 参照) Boltzmann weight の

crossing symmetry

$$W \left(\begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & c & \end{array} \right) = \sqrt{\frac{GbGd}{GaGc}} W \left(\begin{array}{cc|c} d & a & \lambda-u \\ c & b & \end{array} \right)$$

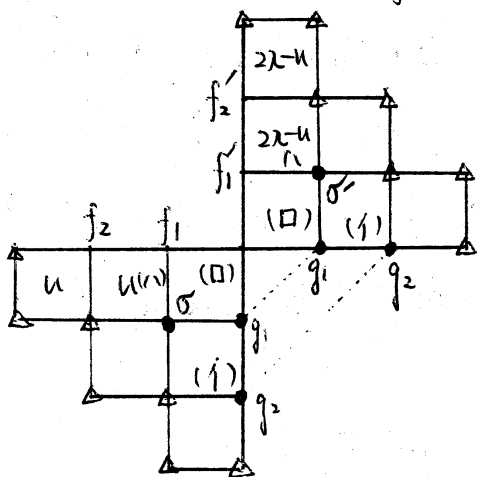
に請ければ 1-st inversion (§5) に帰着。

① → ②

CTM A, B, C, D の定義中の Boltzmann weight W を先の \bar{W} に置きかえて得られる matrix を $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ に \mathcal{T} 表わす: ϵ_1 に注意.

$$\begin{aligned}
 & C(0) D(u) A(0) B(2\lambda - u) \\
 &= Q_3 M_1 M_2 M_3 M_4 \exp(2\lambda H) Q_3^{-1} \\
 &= D(u) B(2\lambda - u) \quad (\because A(0) = B(0) = \text{id}) \\
 &= G \bar{D}(u) \bar{B}(2\lambda - u) \times (\text{p}^{(1)}\text{-independent term}) \\
 &= G \times (\text{p}^{(1)}\text{-independent term})
 \end{aligned}$$

上式の最後の等号は次のように説明される。



Δ 印の site は boundary condition に \mathcal{T} fix
 • 印の site は和 ϵ である
 して結ぶ Δ は site は常に同じ値である。
 $\therefore \epsilon$ である。 \therefore の Boltzmann

weight の積が f_1, f_2, f_1', f_2' に依存 ($\mathcal{T} u$ に ϵ を示せばいい)。 σ の face に注目して 2nd inversion を用いて $\sum g_2$ を行なうと $\sigma = \sigma'$ なる項しか残らない。 次に $\sigma = \sigma'$ なる $\mathcal{T} = 0$ による

Appendix of § 8

B, C, D $\hat{\mu}$ or Boltzmann weight

$\hat{\mu}$ orthonormal vector $\in \Gamma$, $\bar{\lambda}_i = \sum_{\mu \in \Gamma} \mu_i \frac{e^{\beta \mu_i}}{\sum_{\mu \in \Gamma} e^{\beta \mu_i}}$ $\epsilon_i \in \mathbb{Z}$

$$B_n \quad \mathcal{A} = \{ \pm \epsilon_1, \dots, \pm \epsilon_n, 0 \}$$

$$\bar{\lambda}_i = \begin{cases} \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i & (1 \leq i \leq n-1) \\ \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n) & (i=n) \end{cases}$$

$$C_n \quad \mathcal{A} = \{ \pm \epsilon_1, \dots, \pm \epsilon_n \}$$

$$\bar{\lambda}_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$D_n \quad \mathcal{A} = \{ \pm \epsilon_1, \dots, \pm \epsilon_n \}$$

$$\bar{\lambda}_i = \begin{cases} \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i & (1 \leq i \leq n-2) \\ \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-2} + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n) & (i=n-1) \\ \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-2} + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n) & (i=n) \end{cases}$$

$\in \Gamma \quad \hat{\mu} \in \mathbb{Z}$

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \pm \epsilon_i \text{ or } 0 & (\mu = \pm i, 1 \leq i \leq n, \text{ or } \mu = 0) \\ & \text{for } B_n \\ \pm \epsilon_i & (\mu = \pm i, 1 \leq i \leq n) \\ & \text{for } C_n, D_n \end{cases}$$

また $a \in \mathfrak{h}^*$ $i = \pm 1$

$$a_\mu := \begin{cases} \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle & (\mu \neq 0) \\ -\frac{1}{2} & (\mu = 0) \end{cases}$$

$$\bar{a} + \bar{\rho} = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$$

$$a_{\mu\nu} = a_\mu - a_\nu$$

と定まる。したがって $G_{a\mu}$ は

$$G_{a\mu} = \frac{G_{a+\hat{\mu}}}{G_a}, \quad G_{a0} = 1$$

とある。

よって Boltzmann weight は

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ \mu \end{array} = \frac{[\lambda - u][1 + u]}{[\lambda][1]} \quad (\mu \neq 0)$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ \nu \end{array} = \frac{[\lambda - u][a_{\mu\nu} - u]}{[\lambda][a_{\mu\nu}]} \quad (\mu \neq \pm \nu)$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \nu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ \mu \end{array} = \frac{[\lambda - u][u]}{[\lambda][1]} \left(\frac{[a_{\mu\nu} + 1][a_{\mu\nu} - 1]}{[a_{\mu\nu}]^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\mu \neq \pm \nu)$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ -\mu \end{array} \begin{array}{c} -\nu \\ \end{array} = \frac{[u][a_\mu + a_\nu + 1 + \lambda - u]}{[\lambda][a_\mu + a_\nu + 1]} (G_{a_\mu} G_{a_\nu})^{1/2}, (\mu \neq \nu) \\
 \\
 \begin{array}{c} \mu \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ -\mu \end{array} \begin{array}{c} -\mu \\ \end{array} = \frac{[\lambda + u][2a_\mu + 1 + 2\lambda - u]}{[\lambda][2a_\mu + 1 + 2\lambda]} \\
 \\
 - \frac{[u][2a_\mu + 1 + \lambda - u]}{[\lambda][2a_\mu + 1 + 2\lambda]} \sum_{k(\neq \mu)} \frac{[a_\mu + a_k + 1 + 2\lambda]}{[a_\mu + a_k + 1]} G_{a_k}
 \end{array}$$

である。 T は u の Boltzmann weight T の性質をもち。

Initial condition

$$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | 0 = \delta_{bd}$$

Reflection symmetry

$$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | u = W \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} | u$$

Crossing symmetry ($A \stackrel{u}{\parallel} \tau \parallel B \stackrel{\lambda}{\perp} | \tau, u$)

$$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | u = \left(\frac{G_b G_d}{G_a G_c} \right)^{1/2} W \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} | \lambda - u$$

§9 Local State Probabilities

in terms of 1D sums

(face models and vertex models in face formulation)

以下で「 $A_n^{(l)}$ 」の vector 表現で level $l \geq 2$ の場合に LSP を求める議論をする。

Boltzmann weight の性質 (続)(iii) diagonal nature at $x=0$

Boltzmann weight は 2 変数 u, p (p : modular 変数) の函数であらう。Theta 函数 $[u]$ は Jacobi の虚変換を行なった後に

$$(u, p) \longmapsto (w, x)$$

$p = e^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), $x = \exp\left(-\frac{4\pi^2}{L\varepsilon}\right)$, $w = x^u$ なる変数変換をする。

$$[u] = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} x^{\left\{\frac{L}{8} + \frac{u(u-L)}{2L}\right\}} E(x^u, x^L)$$

\therefore 1:

$$\begin{aligned} E(z, q) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - zq^{k-1})(1 - z^{-1}q^k)(1 - q^k) \\ &= -z E(z^{-1}, q) \end{aligned}$$

である。

2.5.12

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ d \quad c \end{array} = w \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \cdot F \cdot w^{(f_b + f_d - f_a - f_c)}$$

$$F = x^{-u(u+L + \frac{2}{n+2})/2L}$$

$$f_a = \frac{1}{2} |a + \rho|^2$$

modify (T = Boltzmann weight) $w, x \in \mathbb{C}$
 (□) modified Boltzmann weight

$$\begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \mu \end{array} = w^{-1} \frac{E(xw, x^L)}{E(x, x^L)}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \nu \end{array} = \frac{E(x^{q\nu} w^{-1}, x^L)}{E(x^{q\nu}, x^L)}$$

$$\begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \nu \end{array} = x^{\frac{1}{2}} w^{-1} \sqrt{\frac{E(x^{q\nu+1}, x^L) E(x^{q\nu-1}, x^L)}{E(x^{q\nu}, x^L)^2}}$$

if $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ or $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. \therefore $w \in \text{fix}$ (7 $x \rightarrow 0$ or $\frac{1}{2}$)

$$\begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \mu \end{array} \longrightarrow w^{-1}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \nu \end{array} \longrightarrow \begin{cases} w^0 = 1 & (\mu < \nu) \\ w^{-1} & (\nu < \mu) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \mu \boxed{} \mu \\ \downarrow \end{array} \longrightarrow 0$$

∴ 此ら ϵ 子である。

$$\lim_{\substack{\omega: \text{fix} \\ x \rightarrow 0}} \begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{} \\ d \quad c \end{array} = \delta_{bd} \omega^{-H(a,b,c)} \quad \dots (*)$$

∴ H は H -function と呼ばれる。

$$\begin{aligned} H(a, a+\hat{\mu}, a+\hat{\mu}+\hat{\nu}) &= H(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \\ &= \theta(\mu \geq \nu) = \begin{cases} 1 & \mu \geq \nu \\ 0 & \mu < \nu \end{cases} \end{aligned}$$

↑ なる函数である。(*) の式が “diagonal nature at $x=0$ ” と呼ばれるものである。

∴ β に Boltzmann weight ϵ modify して CTM は boundary の local state に関する J_* と原点の site の J_a から (か影響を受け) なる。|か| J_{ix} として boundary の J_* と F は LSP から CTM/CTM なる形で示すことから LSP に変化する。おて LSP なる J の J 以下で ϵ 子ら ϵ 適宜無視して計算する。 J T : modify T : Boltzmann weight ϵ STR ϵ 満 T する。

diagonal nature ϵ 用いて CTM $A(u)$ ϵ 調べる。

命題 $A(u)$ は w の整中のみを含む

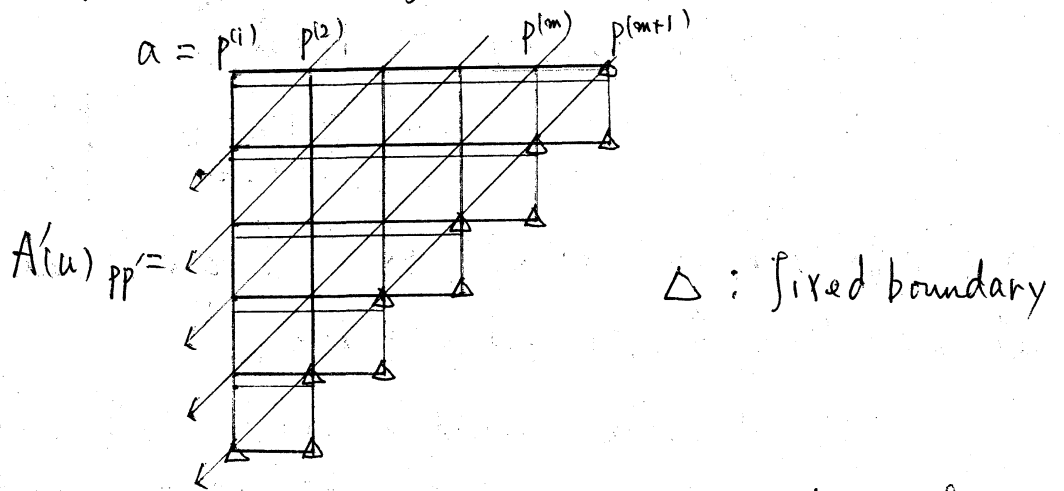
従って $w^{\text{fa}} A(u)$ は

$$u \quad u + \frac{L\varepsilon}{2\pi} \sqrt{-1} \quad \text{で「不変」}$$

(iii) 命題 I'

$$\lim_{w: \text{fix}, x \rightarrow 0} A(u)_{pp'} = w^{-\text{fa} - m_p} \delta_{pp'}, \quad m_p \in \mathbb{Z}$$

と示さなければならない。



において $w: \text{fix}$ から $x \rightarrow 0$ へと \mathbb{Z} の diagonal nature

上の図の斜めの矢線上の weight がすべて等しいと示さなければならない。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \square & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \square & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} \cdot F^{-1} \cdot w^{(\text{fa} + \text{fc} - \text{fb} - \text{fd})}$$

に気をつけて計算すれば

$$A(u)_{pp'} = \delta_{pp'} \cdot w^{\text{fa} - \sum_{i=1}^m j_i H(p^{(i)}, p^{(i+1)}, p^{(i+2)})}$$

であることがわかる。

ゆえに

$$\eta_p = \sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})$$

$\delta \delta$ の P_a の \mathbb{F} 表示式は: $A_m^{(1)}$ の $\sqrt{\frac{B}{A}}$ の $\lambda = -\frac{1}{2}(m+1)$
 に対して

$$P_a = \frac{\text{trace}(S_a G A^{(-n-1)})}{\text{trace}(G A^{(-n-1)})}$$

$\therefore \tau$

$$G = (G_{pp'}) \quad , \quad G_{pp'} = \delta_{pp'} G_p^{(1)}$$

$$G_a = \prod_{\mu < \nu} [a_{\mu\nu}] \propto x^{(m+1)a - \langle a^T p, p \rangle} \prod_{\mu < \nu} E(x^{a_{\mu\nu}}, x^L)$$

$$S_a = (S_{a, pp'}) \quad , \quad S_{a, pp'} = \delta(p^{(1)}, a) \delta_{pp'}$$

τ あり、 τ から

$$P_a = \frac{\sum_{p, p^{(1)}=a} G_p A^{(-n-1)}_{pp}}{\sum_p G_p A^{(-n-1)}_{pp}}$$

$\therefore \tau$

$$u_a = x^{-\langle a^T p, p \rangle} \prod_{\mu < \nu} E(x^{a_{\mu\nu}}, x^L)$$

$$X_m(a, b, c; q) = \sum_x q^{\sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})}$$

$$\left(\begin{array}{l} \sum_x \text{1 path } p = (p^{(1)}, \dots, p^{(m+2)}) \quad \tau^n \\ p^{(1)} = a, p^{(m+1)} = b, p^{(m+2)} = c, p^{(2)}, \dots, p^{(m)} \in \mathcal{J}_1 \\ (p^{(j)}, p^{(j+1)}) : \text{admissible for } j=1, \dots, m+1 \\ \mathcal{J}_1 \text{ は } \mathbb{F} \text{ の } \mathbb{E} \text{ の } \tau \text{ である。} \end{array} \right)$$

ε 定の LSP

$$P_\epsilon = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+2)})$$

$$P_m(a, b, c) = \frac{u_a X_m(a, b, c; x^{n+1})}{\sum_{a \in \mathcal{A}} u_a X_m(a, b, c; x^{n+1})}$$

ε 定の LSP は ε が 0 になる。

∴ ε 定の $P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+2)}$ は boundary condition としてあり、LSP P_ϵ は ε の boundary の ε の方に依存する。ε に注意する。 $P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(i)}$ は次のように定められる。

ξ ; $A_m^{(i)}$ の level $i-1$ の dominant integral weight

Λ_ν ; fundamental weight, $0 \leq \nu \leq n$

但し、 $\Lambda_{\nu+m+1} = \Lambda_\nu + 1$ の添字を \mathbb{Z} にして拡張してある。

$$P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(i)} := \xi + \sigma^{i-1}(\Lambda_\nu)$$

$$\therefore \sigma(\Lambda_\nu) = \Lambda_{\nu+1}$$

当然 ∴ P_ϵ の boundary condition は $\xi + \Lambda_\nu$ の ε の方の数に依存する。"最低エネルギー"を持つ path を特徴付けられる。すなわち $\omega > 1$ (Regime III である) であるから $\sum_j j H_j$ を "minimize" する path を ε 定である。

以上で「 $(A_n^{(l)}, \text{vector 表現, level } l)$ 」なる model を扱ったが、 $(A_n^{(l)}, N \text{ 次対称表現, level } l > N)$ なる model に対しても平行に議論を進めることができる。この場合については 1D sum の表示における H-Junction は以下の様に「予想」されている。

$$H(a, b, c) = H(b-a, c-b) \\ = \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{i=1}^N \theta(\mu_i \geq \nu_{\sigma(i)})$$

∴

$$b-a = \hat{\mu}_1 + \dots + \hat{\mu}_N$$

$$c-b = \hat{\nu}_1 + \dots + \hat{\nu}_N$$

\mathfrak{S}_N : N 次対称群

boundary condition 17

ξ : level $l-N$ の dominant integral weight

η : level N の dominant integral weight

17

$$P_{\xi, \eta}^{(j)} = \xi + \sigma^{j-1}(\eta)$$

vertex model in face formulation

∴ 717. Trigonometric T quantum R-matrix
に付随する vertex model $\in \frac{F}{\lambda}$ である。

$A_n^{(1)}$ の vector 表現に付随する quantum R-matrix R

$$R(\omega) \in \text{End}(V_{\square} \otimes V_{\square}) \quad \omega = x^{-u}$$

$$R(\omega) = (\omega - x) \sum_{\mu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\mu\mu} + \sqrt{x}(\omega - 1) \sum_{\mu \neq \nu} E_{\mu\nu} \otimes E_{\nu\mu} \\ + (1 - x) \left(\sum_{\mu < \nu} + \omega \sum_{\mu > \nu} \right) E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu}$$

T の τ の T であり、∴ 717 YBE

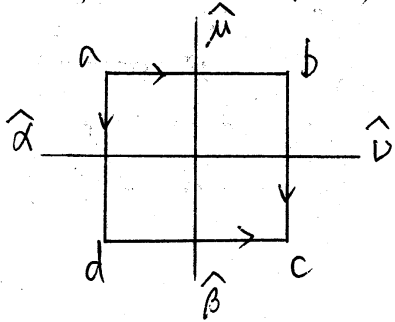
$$(R(\omega) \otimes 1)(1 \otimes R(\omega\omega'))(R(\omega') \otimes 1) \\ = (1 \otimes R(\omega'))(R(\omega\omega') \otimes 1)(1 \otimes R(\omega))$$

を証明する。∴ 717 CTM の $\frac{F}{\lambda}$ に付随 LSP \in
があるために、この vertex model \in face model
 $\in \tau$ $\in \lambda$ である、 $\in \tau$ $\in \lambda$ である。

vertex model \in face model $\in \tau$ $\in \lambda$ のみか、 $\in \tau$ $\in \lambda$ に付
随する τ $\in \lambda$ である。また vertex model \in lattice L
の site 上に τ の元がある τ $\in \lambda$ 。対応する
face model \in dual lattice の site 上に
local state τ $\in \lambda$ がある τ $\in \lambda$ $\in \tau$ $\in \lambda$ 。∴ 717
local state \in

$$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} := \begin{cases} R(w)_{\alpha\beta\mu\nu} & , \text{ if } \begin{matrix} b-a = \hat{\mu} & , & c-b = \hat{\nu} \\ d-a = \hat{\alpha} & , & c-d = \hat{\beta} \end{matrix} \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

である。vertex $\hat{\alpha} \xrightarrow{\hat{\mu}} \hat{\nu}$ \in face $\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix}$ には $\hat{\alpha}$ の下 $\hat{\nu}$ の上 $\hat{\mu}$ の左 $\hat{\beta}$ の右 である。図 1 に $\frac{F}{E}$ のように理解しなさい。



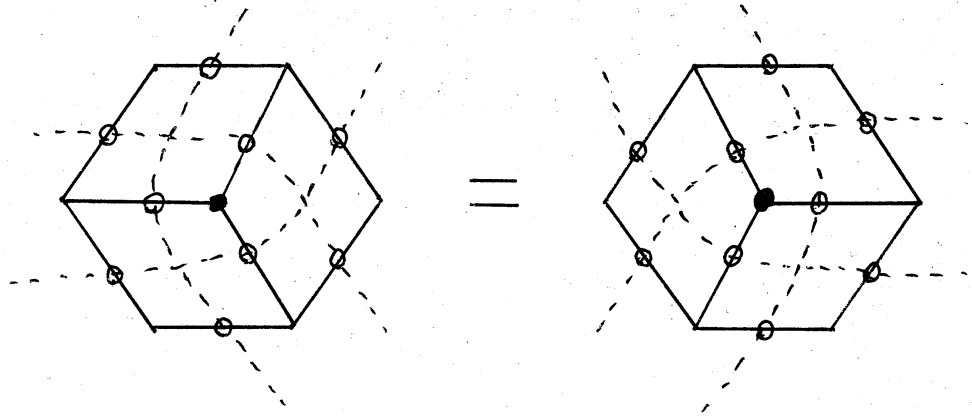
$$\begin{aligned} b-a &= \hat{\mu} \\ c-b &= \hat{\nu} \\ d-a &= \hat{\alpha} \\ c-d &= \hat{\beta} \end{aligned}$$

すなわち、vertex model の local state は face model の Boltzmann weight の edge の上にあるかのように読むのである。vertex model の Boltzmann weight は a, b, c, d に対する $\frac{F}{E}$ のように a, b, c, d の $P = \sum \Lambda_0 \oplus \dots \oplus \sum \Lambda_n \oplus \mathbb{C}$ には E と F の対をなす。

対 応 表

	vertex model	face formulation
lattice	L	L の dual
local state	V_v の weight	$P = \sum \Lambda_0 \oplus \dots \oplus \sum \Lambda_n \oplus \mathbb{C}$
Boltzmann weight	$R(w)_{\alpha\beta\mu\nu}$	$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} a+r & b+r \\ d+r & c+r \end{pmatrix}$ for r

新しく作られたこのFace model が (17) STR
を満たすことを示す。



の形に 先の読みかえを STR において直接
行なえば YBE が明らかである。

上の図は破線が vertex model での YBE を
表す。この部分の和は

$$\alpha \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \square \\ \hline \beta \\ \hline \end{array} \nu = 0 \quad \text{if } \hat{\mu} + \hat{\nu} \neq \hat{\alpha} + \hat{\beta}$$

の部分の和に置き変えることに
注意する。

いくつか R-matrix の性質を挙げておこう。

R-matrix の性質

(i) h -invariance.

$$[R(w, \lambda), h \otimes 1 + 1 \otimes h] = 0 \quad \text{for } \forall h \in \mathfrak{h}$$

7" あり、 $\epsilon \epsilon$.

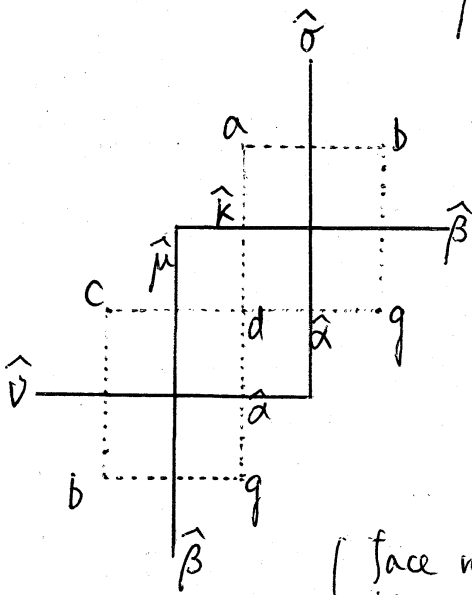
$$R(\omega, x)_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad \text{unless } \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$$

ϵ 1 同値

(ii) $R(1, x) = (\text{scalar}) \times (\text{identity})$

(iii) 2-nd inversion relation

$$\sum_{\alpha, \beta} R(\omega x^{-2}, x)_{\kappa\alpha\sigma\beta} \cdot R(\omega^{-1} x^{-2}, x)_{\nu\beta\mu\alpha} \cdot \frac{g_\alpha g_\beta}{g_\mu g_\sigma} = \rho_2(\omega) \delta_{\kappa\mu} \delta_{\sigma\nu}$$



実線 1 頂点 model ϵ
 破線 1 面 formulation ϵ
 表わす

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= b - a, & \hat{\beta} &= g - b \\ \hat{\kappa} &= d - a, & \hat{\alpha} &= g - d \\ \hat{\mu} &= d - c, & \hat{\nu} &= b - c \end{aligned}$$

(face model の 2-nd inversion の
 読みかえ ϵ β , γ あり ϵ 1 に注意)

(iv) diagonal nature at $x=0$

$$R(\omega, 0) = \sum_{\mu, \nu} \omega^{H(\hat{\mu}, \hat{\nu})} E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu}$$

このことから trigonometric R-matrix より
 定まる vertex model に対しては、face Formulation
 を通じて CTM の方法を適用することができ、
 LSP を求めることができる。その結果は $A_m^{(1)}$
 のときに行次の形になる。

vertex model の 1点函数

$\Lambda \in \{\Lambda_0, \dots, \Lambda_m\}$
 に対して boundary condition ξ

$$P_{\Lambda}^{(j)} = \sigma^{(j-1)}(\Lambda)$$

$\xi \in \xi$

$$P(a|\Lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\Lambda}^{(m+1)}, P_{\Lambda}^{(m+2)})$$

∴

$$P_m(a, b, c) = \frac{\chi^{-\langle a, \rho \rangle} f_m(b-a, c-b; \chi^{n+1})}{\sum_{a'} \chi^{-\langle a', \rho \rangle} f_m(b-a', c-b; \chi^{n+1})}$$

$$f_m(\lambda, \eta; q) = \sum_{\substack{\text{admissible} \\ \text{path}}} q^{\sum_{j=1}^m j H(\eta^{(j)}, \eta^{(j+1)})}$$

$\eta^{(i)}$: weight of vector representation of $A_m^{(1)}$
 $\eta^{(m+1)} = \eta$: fixed $= p^{(j+1)} - p^{(j)}$

$$H(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \theta(\mu \geq \nu)$$

f_m の表式中の H -function において admissible path について和を取る。この admissibility は unrestricted model の "weak" admissibility であることに注意する。

尚 B, C, D 型の vertex model についても同様の計算において LSP が求められている。

§ 10 1D sums for finite m

本節中で $f_m(x, x, q)$ の q を省略して書くことにしておく。本節での目標は 1 点函数

$$\sum_{p^{(2)}, \dots, p^{(m)} \in \mathcal{A}_x} q^{\sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})}$$

$p^{(1)} = a, p^{(m+1)} = b, p^{(m+2)} = c$: fixed
 P : admissible

と $m \rightarrow \infty$ の極限が分かりやすくなるように形に書き改めることである。

上の和が実際にはどの形のものであるのかと例を通じて観察してみよう。

例 $n=1$

$$\hat{\sigma} = \Lambda_1 - \Lambda_0, \quad \hat{\tau} = \Lambda_0 - \Lambda_1, \quad \hat{\sigma} + \hat{\tau} = 0$$

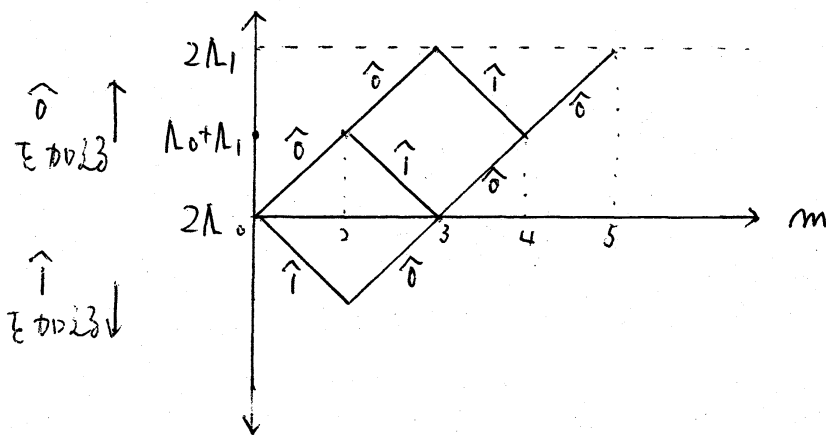
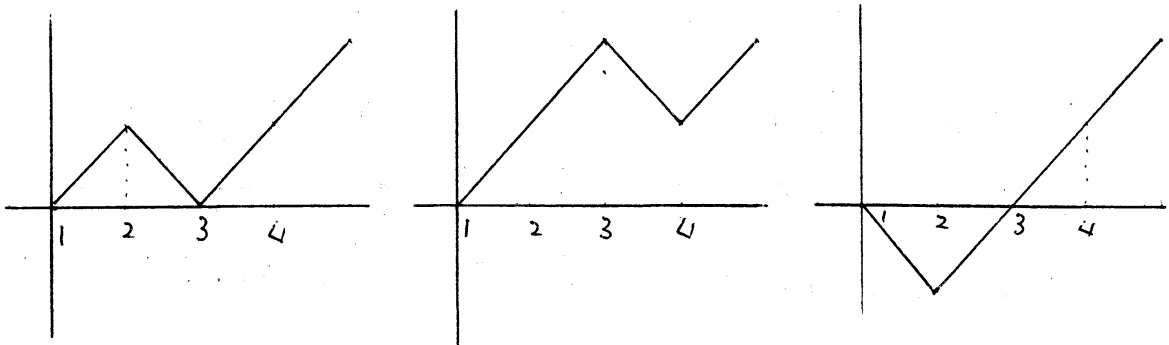


図 71 $f_3(\hat{0}, \hat{0})$ に寄与する path 17.



の 3 個である。ゆえに

$$\begin{aligned} f_3(\hat{0}, \hat{0}) &= q^{2+3} + q^{1+3} + q^{1+2+3} \\ &= q^4(1 + q + q^2) \quad (= q^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}) \end{aligned}$$

比較のため、 $l=2$ の restricted model に対する $X_3 \in \mathcal{A}$ の数と、上の初めの 2 個の path 17

$$\begin{aligned} X_3(2\Lambda_0, \Lambda_0 + \Lambda_1, 2\Lambda_1) &= q^{1+3} + q^{2+3} \\ &= q^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - q^6 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

f_* 17 $q=1$ 17 (17) と単に path の個数を
その値 17 与える。 ($q \neq 1$ の 17 は q -analogue)
→ 17 $q=1$ (17) $f_m(r, \eta)$ 17.

$$r = r_0 \hat{0} + \dots + r_m \hat{n}, \quad \sum r_i = m, \quad r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

17

$$f_m(\gamma, \eta) = \frac{m!}{\gamma_0! \gamma_1! \cdots \gamma_n!} \quad (q=1)$$

である。既に $f_3(\hat{0}, \hat{0})$ の表式中で定義せすに
 に用いていた $[]$ の記号は 多項係数の
 の q -analogue として次のように定義されている。

$$[\gamma_0, \dots, \gamma_m] := \begin{cases} \frac{(q)_m}{(q)_{\gamma_0} \cdots (q)_{\gamma_m}} & \text{if } \sum \gamma_\mu = m, \\ & \gamma_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$[] := 1$$

$$(q)_k := \prod_{i=1}^k (1 - q^i) \quad k \geq 1$$

$$(q)_0 := 1$$

これは $\gamma \in \mathfrak{h}^+$ に対して

$$\gamma \equiv \gamma_0 \hat{0} + \cdots + \gamma_n \hat{n} \pmod{\mathbb{C}\mathfrak{f}}$$

のとき

$$[\gamma] = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n]$$

と等しくなる。

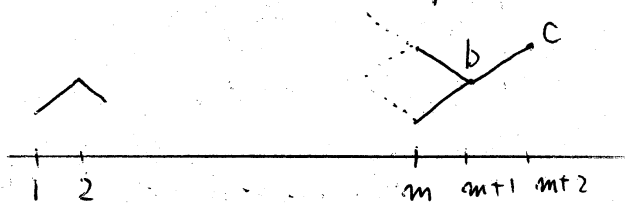
よって $\frac{D}{2}$ の r に対して $m < +\infty$ に対して $1-D$ sum
 形式の r に表わされる。

定理 ($m < +\infty$ vertex model)

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^m r_{\mu}(r_{\mu}-1) + \sum_{\mu=0}^m H(\hat{\mu}, \hat{v}) r_{\mu}} \cdot \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} \quad (0 \leq m < +\infty)$$

(証明)

$$f_m(r, \eta) = \sum_{\text{admissible path}} q^{\sum_j H(\eta^{(j)}, \eta^{(j+1)})}$$



であるから、

$$\begin{cases} f_m(r, \hat{v}) = \sum_{0 \leq \mu \leq m} f_{m-1}(r - \hat{\mu}, \hat{\mu}) q^{m H(\mu, v)} \\ f_0(r, \hat{v}) = \delta_{r,0} \quad (\text{初期条件}) \end{cases}$$

与る式が path $\in v \rightarrow$ 手前まで区間、で考える
 ことに引得られる。

逆に上の2式を帰納的に f_* 正定めから
 定理中の表式が、この2式を満すことを示
 せば証明は完了する。

初期条件に関して自明である。

もう一つの式が定理の表式を満すことを示すには、

$$[r_0, \dots, r_m] = \sum_{0 \leq \mu \leq m} q^{\text{Pow}(\mu)} [r_0, \dots, r_{\mu-1}, r_{\mu+1}, \dots, r_m]$$

$$\text{Pow}(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^m \left\{ r'_\lambda (r'_\lambda - 1) - r_\lambda (r_\lambda - 1) \right\} + \sum_{\lambda=0}^m \left\{ H(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) r'_\lambda - H(\hat{\lambda}, \hat{\nu}) r_\lambda \right\} + m H(\hat{\mu}, \hat{\nu})$$

$$\therefore r'_\lambda = \begin{cases} r_{\mu-1} & (\lambda = \mu) \\ r_\lambda & (\lambda \neq \mu) \end{cases}$$

と示せば「 r 」の「 r' 」が、 $\text{Pow}(\mu)$ を計算すれば

$$\text{Pow}(\mu) = \begin{cases} m - (r_0 + \dots + r_m + r_0 + \dots + r_\mu) & \text{for } \mu < 0 \\ m - (r_0 + \dots + r_\mu) & \text{for } \mu \geq 0 \end{cases}$$

と示すから、

$$[r_0, \dots, r_m] = \sum_{0 \leq \mu \leq m} q^{m - (r_{\sigma(0)} + \dots + r_{\sigma(\mu)})} \cdot [r_{\sigma(0)}, \dots, r_{\sigma(\mu)-1}, \dots, r_{\sigma(m)}]$$

$$[r_{\sigma(0)}, \dots, r_{\sigma(\mu)-1}, \dots, r_{\sigma(m)}]$$

\therefore σ は $n+1$ 次対称群の元

とす。定義 1) q -multinomial f_0, \dots, f_m について対称であるから、定理が示す $U(T)$ 。 \square

注意

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2}|r-\lambda v|^2 + C_m(v)} \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$$

$$C_m(v) = \frac{(m-v)(m-v+n+1)}{2(n+1)}$$

の形に f_m を表すことができる。この形式は f_m を用いて X_m を表すことに有効である。

r が q^+ of $A_n^{(1)}$ の元のことにして f_m の定義域を拡張しておくのが自然な形で

上式は

$$f_m(r+k\delta, \hat{v}) = q^{-k} f_m(r, \hat{v})$$

δ : null root

と定めることにする。

定理 ($m < +\infty$, face model)

$$X_m(a, b, c) = \sum_{w \in W} \text{det}(w) f_m(b + \rho - w(a + \rho), c - b)$$

W : affine Weyl group of type $A_n^{(1)}$

$$0 \leq m < +\infty$$

前節のCTMについてのBartens議論はlattice sizeが有限のときには“積極的ツール”である。しかし、やはりlattice size有限に対する量である χ_m は数学的に(combinatorialに)興味深い量であるという定理を示しているといえる。

定理の証明の前に、 $A_n^{(1)}$ のaffine Weyl group について若干の準備をしておく。

$$Q := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n : \text{root lattice}$$

$$\alpha_j = \varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j \quad : \text{simple root}$$

ここに ε_i は \mathbb{C}^n のorthonormal base.

$$a_\mu = \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

ここで $A_n^{(1)}$ のaffine Weyl group W は

$$W := \mathfrak{S}_{n+1} \ltimes Q$$

である。ここで \mathfrak{S}_{n+1} は ε_i の列に作用する。

\mathfrak{S}_{n+1} は $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ の置換

$\alpha \in Q$ はtranslation t_α として

$$t_\alpha(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, \delta \rangle \alpha - \left\{ \langle \lambda, \delta \rangle \frac{|\alpha|^2}{2} + \langle \lambda, \alpha \rangle \right\} \delta$$

に作用をする。また $r_\mu \in W$ はfundamental reflection r_μ として

$$r_{\mu}(\Lambda_k) = \Lambda_k - \delta_{\mu k} (2\Lambda_k - \Lambda_{k+1} - \Lambda_{k-1})$$

↑ ↑ のものごとである。

(定理の証明)

この場合も先の vertex model に対する定理の証明と同様に X_m を定める漸化式を用いる。
 以下、

$$\begin{cases} X_0(a, b, c) = \delta_{ab} & (\text{初期条件}) \\ X_m(a, b, c) = \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq m \\ d = b - \hat{\mu} \in \mathcal{A}}} X_{m-1}(a, d, b) q^{mH(d, b, c)} \end{cases}$$

初期条件に関して一通りに示す。

もう一つの式に関して \sum 中の $d = b - \hat{\mu} \in \mathcal{A}$ 「条件が与えられる」 以下 f_m に関する漸化式と全く同じものにする。

$d = b - \hat{\mu} \notin \mathcal{A}$ する d 以上の和に寄与しないことを示せば、先の f_m についての議論を援用して、定理を証明することが出来る。

すなわち、

$$\begin{array}{l} b \in \mathcal{A} \\ b - \hat{\mu} \notin \mathcal{A} \end{array} \quad \text{ならば} \quad X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = 0$$

を示す。

$b \in \mathcal{A}_1$, $b - \hat{\mu} \in \mathcal{A}_1$ なる状況に置ける。

$$b = b^0 \lambda_0 + \dots + b^m \lambda_m, \quad b^i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$\sum_{i=0}^m b^i = l$$

であるとする。 $\hat{\mu} = \lambda_{\mu+1} - \lambda_{\mu}$ である。

$$b - \hat{\mu} = b^0 \lambda_0 + \dots + (b^{\mu} + 1) \lambda_{\mu} + (b^{\mu+1} - 1) \lambda_{\mu+1} + \dots + b^m \lambda_m$$

∴ から、この \mathcal{A}_1 に $\lambda_{\mu+1}$ と λ_{μ} の差は 1 である。

λ_i の係数 b^i は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 中に属する。

∴ より

$$b^{\mu+1} = 0$$

である。よって帰納法による。

帰納法の仮定より

$$\chi_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = \sum_{w \in W} \det(w) f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - w(a + \rho), \hat{\mu})$$

である。 $b^{\mu+1} = 0$ である。 Fundamental reflection

$r_{\mu+1}$ に対して

$$r_{\mu+1}(b - \hat{\mu} + \rho) = b - \hat{\mu} + \rho$$

∴ から

$$\begin{aligned} & \chi_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) \\ &= \sum \det(w) f_{m-1}(b + \rho - \hat{\mu} - w(a + \rho), \hat{\mu}) \end{aligned}$$

$$\therefore f_{m-1}(r_{\mu+1}(a), \hat{\mu}) = f_{m-1}(a, \hat{\mu})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum \det(\omega) f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - r_{\hat{\mu}+1}^{-1} \omega(a + \rho), \hat{\mu}) \\
&= \sum - \det(\omega') f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - \omega'(a + \rho), \hat{\mu}) \\
&\quad (\omega' = r_{\hat{\mu}+1}^{-1} \omega) \\
&= -X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = 0$$

∴ 以上で定理の証明が完了した。 □

§11 1D sums in terms of modular forms.

§10 10 において lattice size m が有限のとき
1D sum である。

vertex model である

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2}|r - \Lambda_{\hat{v}}|^2 + C_m(v)} \cdot \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$$

$$C_m(v) = \frac{(m-v)(m-v+m+1)}{2(m+1)}$$

face model である

$$X_m(a, b, c) = \sum_{w \in W} \det(w) f_m(b + \rho - w(a + \rho), c - b)$$

と表わすことができる。実際 $m \rightarrow \infty$ の
極限において f_{∞} , X_{∞} である。

affine Lie algebra の level 1 の表現の string
function, branching coefficient である。
ある。まず、この結果を述べるための準備
を述べる。

以下である。

$L(\Lambda)$: irreducible $A_n^{(1)}$ -module with the
highest weight Λ

$L(\Lambda)_\mu := \{u \in L(\Lambda) \mid hu = \mu(h)u, h \in \mathfrak{h}\}$
 $\therefore \mu \in \mathfrak{h}^*, \mathfrak{h} : \text{Cartan subalgebra of } \Lambda_n^{(1)}$
 を示す。

path について

定義 path

$p = (p^{(j)})_j$ が path であるとは、 $p^{(j)}$ が
 local state である。

$\gamma^{(j)}(p) = p^{(j+1)} - p^{(j)} \in \{\hat{0}, \dots, \hat{n}\}$
 である。

例 §10 で現れた ground state P_{Λ_0}
 は path である。

$$P_{\Lambda_0} = (P_{\Lambda_0}^{(j)})_{j \geq 1}, \quad P_{\Lambda_0}^{(j)} = \Lambda_0 + j - 1$$

次に一般の path に対してよく境界条件 (+ 分違
 の様子) を指定した path を考える。

定義 Λ_0 -path

path $p = (p^{(j)})_j$ が ある $k \in \mathbb{N}$ に対して
 j に対して ground state の path P_{Λ_0} と
 一致する。 $\therefore p \in \Lambda_0\text{-path}$ である。

は $P(\Lambda_0)$ で表わす。

$$P(\Lambda_0) := \bigcup_{m=0}^{\infty} P^{(m)}(\Lambda_0)$$

$$P^{(m)}(\Lambda_0) := \left\{ p = (p^{(j)}) : \text{path} \mid \begin{array}{l} p^{(j)} = P_{\Lambda_0}^{(j)} \\ \text{for } j > m \end{array} \right\}$$

したがって $p \in P(\Lambda_0)$ に対して path p の degree $\omega(p)$ は

$$\omega(p) := \sum_{j=1}^{\infty} j \left\{ H(\eta^{(j)}(p), \eta^{(j+1)}(p)) - H(\eta^{(j)}(P_{\Lambda_0}), \eta^{(j+1)}(P_{\Lambda_0})) \right\}$$

と定める。このように Λ_0 -path の定義は有限和で与えられることに注意する。

また $\mu \in \mathcal{H}^+$ に対して

$$P(\Lambda_0)_\mu := \left\{ p \in P(\Lambda_0) \mid p^{(1)} - \omega(p)\delta = \mu \right\}$$

$$P^{(m)}(\Lambda_0)_\mu := P(\Lambda_0)_\mu \cap P^{(m)}(\Lambda_0)$$

$$\omega_m(p) := \sum_{j=1}^m j H(\eta^{(j)}(p), \eta^{(j+1)}(p))$$

とすれば

$$\begin{aligned} q^{-\omega_m(P_{\Lambda_0})} f_m(P_{\Lambda_0} - a, \eta^{(m+1)}(P_{\Lambda_0}); q) \\ = \sum_i \#(P^{(m)}(\Lambda_0)_{a-i\delta}) q^i \end{aligned}$$

と表わすことができる。

path に 覆 ぬ る T に 対 し 一 つ の 例 を 挙 げ る。

例 $n=1$

$$P_{\Lambda_0} : \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_1 \dots$$

$$\eta(P_{\Lambda_0}) : \hat{0} \hat{1} \hat{0} \hat{1} \hat{0} \hat{1} \dots$$

1) ground state である。 ground state での path の 例 を 適 当 に 挙 げ る。

$$P_1 : 3\Lambda_0 - 2\Lambda_1 \quad 2\Lambda_0 - \Lambda_1 \quad \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_1 \dots$$

$$\eta(P_1) : \hat{0} \quad \hat{0} \quad \hat{0} \hat{1} \hat{0} \hat{1} \dots$$

$$P_2 : -\Lambda_0 + 2\Lambda_1 \quad -2\Lambda_0 + 3\Lambda_1 \quad -\Lambda_0 + 2\Lambda_1 \quad \Lambda_1 \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_0 \dots$$

$$\eta(P_2) : \hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{1} \hat{1} \hat{0} \hat{1} \hat{0} \dots$$

上 の P_1, P_2 は 互 に Λ_0 -path である。

$$P_1 \in P(\Lambda_0)_{3\Lambda_0 - 2\Lambda_1 - \delta}$$

$$P_2 \in P(\Lambda_0)_{-\Lambda_0 + 2\Lambda_1 - 3\delta}$$

である。 5) T_2 は

$$P_{\Lambda_0} \in P(\Lambda_0)_{\Lambda_0}$$

定理 (vertex model, $m \rightarrow \infty$)

$$\# P(\Lambda_\nu)_\mu = \dim L(\Lambda_\nu)_\mu$$

T は 同 通 T_δ と $T = \text{"o"}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{-\omega_m(P_{\Lambda_\nu})} f_m(P_{\Lambda_\nu}^{-a}, \eta^{(m+1)}(P_\Lambda)) = \sum_i \dim L(\Lambda_\nu)_{a-is} q^i$$

注意

- 定理中の第2式の右辺は level 1 の string function である。
- この定理は fundamental weight だけでなくさらに一般の dominant integral weight に対して拡張されている。

系

$$\begin{aligned}
 P(a|\Lambda_\nu) &:= \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\Lambda_\nu}^{(m+2)}) \\
 &= \frac{\sum_i \dim L(\Lambda_\nu)_{a-i\delta} \cdot \chi^{-\langle a-i\delta+\rho, \rho \rangle}}{\sum_\mu \dim L(\Lambda_\nu)_\mu \cdot \chi^{-\langle \mu+\rho, \rho \rangle}}
 \end{aligned}$$

(系の証明)

定理を仮定して行う。

§9 例)

$$\begin{aligned}
 &\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\Lambda_\nu}^{(m+2)}) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\chi^{-\langle a, \rho \rangle} f_m(b-a, c-b; x^{m+1})}{\sum_{a'} \chi^{-\langle a', \rho \rangle} f_m(b-a', c-b; x^{m+1})}
 \end{aligned}$$

∴ 1にαは

$$m - (n+1) < m+1 - \nu + (n+1)\alpha \leq m$$

↑は整数 $\rightarrow \alpha$

$$\alpha = \frac{m + \nu - \nu_m}{n+1} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \nu_m \leq n \\ \nu_m \equiv \nu + m \pmod{n+1} \end{array}$$

∴ 以下から

$$W_m(P_{\Lambda\nu}) = C_m(\nu_m) + \frac{|\Lambda\nu|^2}{2}$$

↑に §10 の $m < +\infty$ の q の vertex model の
1D sum に 関する定理から

$$f_m(\gamma, \hat{\nu}) = q^{\frac{1}{2}|\gamma - \Lambda\nu|^2 + C_m(\nu)} \cdot \begin{bmatrix} m \\ \gamma \end{bmatrix}$$

∴ $\gamma = \Lambda\nu_m - a$ とおけば

(定理第2式の左辺)

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} q^{\frac{1}{2}|\Lambda\nu_m - a - \Lambda\nu|^2 + C_m(\nu_m) - C_m(\nu) - \frac{|\Lambda\nu|^2}{2}} \begin{bmatrix} m \\ \Lambda\nu_m - a \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} q^{\frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|\Lambda\nu|^2} \cdot \begin{bmatrix} m \\ \Lambda\nu_m - a \end{bmatrix}$$

∴

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m \\ \Lambda\nu_m - a \end{bmatrix} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(q)_m}{(q)_{r_0} (q)_{r_1} \cdots (q)_{r_m}}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} (q)_k = \varphi(q) \quad (F4)$$

$$(\text{定理の第2式左辺}) = q^{\frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|b|^2} \varphi(q)^{-n} \quad \square$$

χ_m と branching coefficient の関係についての定理を述べる。再び若干の準備としておく

theta 函数

$$M \in \mathbb{R}_{>0}, \quad u, \mu \in \bar{h}^* = \sum_{j=1}^n \mathbb{C} \bar{\Lambda}_j \quad (\text{part 1 意})$$

$$\mathcal{Q} = \sum \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \sum \alpha_n, \quad \text{Im } \tau > 0$$

と 17 theta 函数

$$\Theta_{\mu, M}(u, \tau) := \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}} e^{\pi i \tau |\alpha + \frac{\mu}{M}|^2} \cdot e^{-2\pi i M \langle \alpha + \frac{\mu}{M}, u \rangle}$$

$$\Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau) := \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{m+1}} \det(\omega) \Theta_{\omega(\mu), M}(u, \tau)$$

と 定 の 予 . \therefore 以下 17 次 の 性 質 を も っ

$$(i) \quad \Theta_{\omega(\mu), M}(0, \tau) = \Theta_{\mu, M}(0, \tau)$$

$$(ii) \quad \Theta_{\omega(\mu), M}^{(-)}(u, \tau) = \det(\omega) \Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau)$$

$$(iii) \quad \Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau) = 0$$

$$\text{if } (\langle \mu, \theta \rangle - M) \prod_{i=1}^n \langle \mu, \alpha_i \rangle = 0, \quad \theta: \text{highest root of } A_m^{(n)}$$

∴ u は \mathbb{C} 上のベクトル

a : level l の dominant integral weight

$$L = l + n + 1$$

∴ (7) highest weight 表現 $L(a)$ の character は $\chi_a \in \mathbb{C}[\mathbb{C}^*]^n$

$$\chi_a(z_1, \dots, z_n; q) = \frac{\Theta_{\bar{a} + \bar{\rho}, L}(u, \tau)}{\Theta_{\bar{\rho}, n+1}(u, \tau)}$$

∴ z_j は \mathbb{C}^* 上のベクトル。 ∴ $z_j = e^{2\pi i F_j \langle \alpha_j, u \rangle}$

$$z_j = e^{2\pi i F_j \langle \alpha_j, u \rangle}, \quad q = e^{2\pi i F \tau}$$

branching coefficients

diagonal embedding

$$A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)} \supset \Delta(A_n^{(2)})$$

に従って、 $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ の $\Delta(A_n^{(2)})$ に関する既約分解を考える。

$$\text{level of } \lambda = l - 1$$

$$\text{level of } \mu = 1$$

∴ 現 u は \mathbb{C}^* 表現の level l

(level of λ) + (level of μ) = l である。

	$A_n^{(1)}$	\oplus	$A_n^{(1)}$	\supset	$\Delta(A_n^{(1)})$
highest weight	ξ		Λ_0		a
level	$l-1$		1		l

既約分解

$$L(\xi) \otimes L(\Lambda_0) = \bigoplus_{a \in \mathcal{J}_l} \omega_{\xi \Lambda_0 a} \otimes L(a)$$

$\omega_{\xi \Lambda_0 a} \in \Delta(A_n^{(1)})$ は $\xi + \Lambda_0$ の highest weight の vector の空間

\mathbb{C} character の言葉で書けば

$$\begin{aligned} \chi_{\xi}(z_1, \dots, z_n; q) \chi_{\Lambda_0}(z_1, \dots, z_n; q) \\ = \sum_{\substack{a \in \mathcal{J}_l \\ a \equiv \xi + \Lambda_0 \pmod{\theta}}} b_{\xi \Lambda_0 a}(q) \chi_a(z_1, \dots, z_n; q) \end{aligned}$$

$b_{\xi \Lambda_0 a}(q)$ は branching coefficient
 Λ_0 は level 1 であるから

$$b_{\xi \Lambda_0 a}(q) = \eta(\tau)^{-n} \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{n+1}} \det(\omega) \Theta_{-L(\xi + \bar{\rho}) + (L-1) \cdot \omega(\bar{a} + \bar{\rho}), L(L-1)}(0, \tau)$$

$$L = l + n + 1, \quad \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \varphi(q), \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

\mathbb{C} character の言葉で書けば ($\omega_{\xi \Lambda_0 a}$ の上には Virasoro algebra の作用)
 GK O Virasoro algebra の作用。特に $n=1$ の

場合 には $c < 1$ の Virasoro algebra の既約指標 χ であることが知られている。

そこで, γ, ϕ_m 以下に β に定めておく

$$\gamma(\xi, \Lambda_\nu, a) := \frac{|\xi + \rho|^2}{2(L-1)} + \frac{|\Lambda_\nu + \rho|^2}{2(m+2)} - \frac{|a + \rho|^2}{2L} - \frac{|\rho|^2}{2(m+1)}$$

$$\begin{aligned} \phi_m &:= \gamma(\xi, \Lambda_\nu, a) - \sum_{j=1}^m j H(P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(j)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(j+1)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(j+2)}) \\ &= \gamma(\xi, \Lambda_\nu, a) - \left\{ C_m(V_m) + \frac{1}{2} |\Lambda_\nu|^2 \right\} \end{aligned}$$

以上の準備のもとに

定理 (Face model, $m \rightarrow \infty$)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{\phi_m} \chi_m(a, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+2)}) = b_{\xi, \Lambda_\nu, a}(q)$$

$$\Leftrightarrow P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(j)} = \xi + \sigma^{j-1}(\Lambda_\nu) \quad (c.f. §9)$$

系

$$P_a = \frac{b_{\xi, \Lambda_\nu, a}(x^{n+1}) \chi_a(x, \dots, x; x^{n+1})}{\chi_\xi(x, \dots, x; x^{n+1}) \chi_{\Lambda_\nu}(x, \dots, x; x^{n+1})}$$

(定理の証明)

$$\begin{aligned} P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+1)} &= \xi + \Lambda_{\nu+m} = \xi + \Lambda_{\nu_m}, & P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+2)} &= \xi + \Lambda_{\nu+m+1} \\ \Leftrightarrow & \end{aligned}$$

$$\chi_m(a, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(m+2)}) = \sum_{\omega \in W} \det(\omega) f_m(\xi + \Lambda_{\nu_m} + \rho - \omega(a + \rho), \widehat{V}_m)$$

2 は 17

$$f_m(\gamma, \hat{D}) = q^{\frac{1}{2}|\gamma - \Lambda_D|^2 + C_m(D)} \begin{bmatrix} m \\ D \end{bmatrix}$$

17 から

$$X_m(a, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+2)})$$

$$= \sum_{\omega \in W} \det(\omega) q^{\frac{1}{2}|\xi + \rho - \omega(a + \rho)|^2 + C_m(D_m)} \begin{bmatrix} m \\ D \end{bmatrix}$$

$\therefore \tau$

$$\omega = t_\alpha \bar{\omega}, \quad \alpha \in \mathcal{Q}, \quad \bar{\omega} \in \mathfrak{G}_{m+1}$$

$\in \mathcal{H} \langle \varepsilon$

$$\begin{aligned} & |\xi + \rho - \omega(a + \rho)|^2 \\ &= |\xi + \rho - t_\alpha \bar{\omega}(a + \rho)|^2 \\ &= |\xi + \rho - \bar{\omega}(a + \rho) - L\alpha + \left(\frac{L}{2}|\alpha|^2 - \langle \bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho}), \alpha \rangle\right)\delta|^2 \\ &= |\xi + \rho - \bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho}) - L\alpha|^2 - L|\alpha|^2 - 2\langle \bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho}), \alpha \rangle \\ &= L(L-1) \left| \alpha - \frac{\xi + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho})}{L} \right|^2 - \frac{|\xi + \bar{\rho}|^2}{L-1} + \frac{|\bar{a} + \bar{\rho}|^2}{L} \end{aligned}$$

$\therefore \mathcal{H}(\varepsilon) \phi_m \in \langle \mathcal{H} \rangle \tau$

$$\begin{aligned} & q^{\phi_m} X_m(a, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+2)}) \\ &= \sum_{\omega \in \mathfrak{G}_{m+1}} \det(\omega) \sum_{\gamma \in \mathcal{Q} - \frac{\xi + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{\omega}(\bar{a} + \bar{\rho})}{L}} q^{\frac{1}{2}L(L-1)|\gamma|^2 - \frac{1}{2}|\Lambda_D|^2 + \frac{|\Lambda_D + \rho|^2}{2(m+2)} - \frac{|\rho|^2}{2(m+1)}} \begin{bmatrix} m \\ \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから、実際

$$\frac{1}{2} |\Lambda_\nu|^2 + \frac{|\Lambda_\nu + \rho|^2}{2(n+2)} = 0, \quad \frac{|\rho|^2}{2(n+1)} = \frac{1}{24}$$

であるから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{\phi_m} X_m(a, P_{3, \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{5, \Lambda_\nu}^{(m+2)})$$

$$= \sum_{\bar{w} \in \mathfrak{G}_{m+1}} \sum_{\tau \in \mathcal{Q}} q^{-\frac{\bar{z} + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{w}(a+\bar{\rho})}{L}} \det(w) q^{\frac{1}{2} L(L-1) |\tau|^2} \eta(\tau)^{-\frac{1}{24}}$$

$$= b_{3, \Lambda_\nu} a(q)$$



References

- [1] Onsager, L., "Crystal Statistics I, A Two dimensional model with an order-disorder transition", Phys. Rev. vol 65, 3, Feb 1 117, (1944)
- [2] Yang, C. N., "The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model", Phys. Rev. vol 85, 5, Mar 1, 808-816 (1952)
- [3] Baxter, R. J., "Eight Vertex Model in Statistical Mechanics and One-Dimensional Anisotropic Heisenberg Chain I II III", Ann. Phys, 76, 1-24, 25-47, 48-71, (1973)
- [4] Andrews, G. E., Baxter, R. J., Forrester, P. J., "Eight-Vertex SOS Model and Generalized Roger-Ramanujan-Type Identities", Jour. Stat. Phys, 35, 193-266 (1984)
- [5] Baxter, R. J., "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics" Academic Press, London (1982)

- [6] Kac, V. G., "Infinite Dimensional Lie Algebra 2nd ed", Cambridge Univ. Press (1985)
- [7] Humphreys, J. E., "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, 2nd printing revised", GTM 9, Springer-Verlag (1972)
- [8] Pasquier, V., "Etiology of IRF Model", Comm. Math. Phys. 118, 357-364 (1988)
- [9] Jimbo, M., "A q -Difference Analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter Equation", Lett. Math. Phys. 10, 63-69 (1985)
- [10] Jimbo, M., "A q -Analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke Algebra, and the Yang-Baxter Equations", Lett. Math. Phys. 11, 247-252 (1986)
- [11] Jimbo, M., "Quantum R Matrix for the Generalized Toda System", Comm. Math. Phys. 102, 537-547 (1986)
- [12] Drinfeld, V. G., "Quantum Groups", ICM Proceedings, Berkeley, 798-820 (1986)

- [13] Date, E., Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M.
 "Solvable Lattice Models", RIMS
 preprint 590 (1987), to be published.
- [14] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M. "Solvable
 Lattice Models Related to the Vector
 Representation of Classical Simple Lie Algebra",
 Comm. Math. Phys., 116, 507-525 (1988)
- [15] Date, E., Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M.
 "Fusion of the Eight Vertex SOS Model",
 Lett. Math. Phys., 12, 209-215 (1986)
- [16] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M., "Symmetric
 Tensors of the A_n Family", in Algebraic
 Analysis, 253-266, Academic Press, London
 (1988)
- [17] Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M.
 "The A_n Face Models", Comm. Math
 Phys. 119, 543-565 (1988)
- [18] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T. and Okado, M.,
 "One-Dimensional Configuration Sums in
 Vertex Models and Affine Lie Algebra
 Characters", Lett. Math. Phys 17, 69-77 (1989)

- [19] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M., "Solvable Lattice Models Whose States are Dominant Integral Weights of $A_{n-1}^{(1)}$ ", Lett. Math. Phys 14, 123 - 131 (1987)
- [20] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Exactly Solvable SOS Models, local height probabilities and theta function identities", Nucl. Phys. B290 [FS20], 231-273 (1987)
- [21] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Exactly Solvable SOS Models, proof of the star-triangle relation and combinatorial identities", Adv. Stud. Pure. Math 16, 17-122 (1988)
- [22] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M. "Local height Probabilities of Solvable Lattice Models: An $A_{n-1}^{(1)}$ Family", Nucl. Phys B300 [FS22], 74-108 (1988)
- [23] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Paths, Maya diagrams and representations of $\hat{sl}(n, \mathbb{C})$ ", To appear in Adv. Stud Pure. Math 19.

ここに挙げた reference は奇然の事から全く完全なものではない。

2次元の格子 model (2D Ising) が初めて厳密に解かれたのは、L. Onsager [1] であり、その LSP は C.N. Yang [2] に初めて公にされた。その後の現在の一連の研究の端緒と言えるものとして、Baxter [3], ABF [4] が挙げられる。[3] は eight-vertex model を調べ上げたものであり、[4] では face model, vertex-face 対応 (2つのものが異なる), restriction type が論じられる。CTM の解説とともに face model の LSP がおめられている。(A¹¹ の vector 表現に対応する model. (か [4] では Lie algebraic picture ではない。)) [5] の Baxter の本は上の [1] から [4] type も解説した教科書である。

affine 及び classical Lie algebra とその表現論については教科書 [6], [7] と参照したい。

§2 の vertex-face 対応は Pasquier [2] に
 引かれている。

§3 の quantum R matrix と YBE に関する
 は多くの論文がある。ここでは Jimbo [9], [10],
 [11], Drinfeld [12] を挙げておく。

§4, §5, §6 の $X_m^{(1) \# 1}$ face model とその
 STR の証明 (restricted, unrestricted) は [14]
 にある。

§7 の fusion procedure は [16], [17] にある。
 [16] では symmetric 場合のみ扱い、一般の
 表現については [17] で論じられている。

Corner Transfer Matrix については [4], [5]
 に解説がある。

LSP の計算は, face model については [20]
 [21], [22] ([22] は rank の高い場合), vertex
 model の face formulation は [18] で議論
 されている。

また path による表現の構成 (§11 定理 vertex
 $m \rightarrow \infty$) の詳細については [23] を見るといい。