

一般化された境界要素法による非線形近似解析

Approximate Analysis of Nonlinear Problems  
by the Generalized Boundary Element Method

日本大学生産工学部

登坂宣好

(Nobuyoshi TOSAKA)

Abstract

The aim of this paper is to extend the boundary element method recently being used in the linear problems to nonlinear problems. The approach, which is called the generalized boundary element method, differs from the hybrid integral equation method (or the boundary-domain elements method) developed in our previous papers. The new method is based on the set of boundary integral equations for subdomains of the original domain with use of the fundamental solution for the linearized nonlinear differential operator of the problems. The resulting system of quasi-linear equations is solved by using the simple iterative procedure. In order to show the workability of the theory proposed here, numerical examples on the nonlinear chemical reactor problems and the Plateau problems are presented.

## 1. 序論

積分方程式法は、差分法と並んで古くから微分方程式による問題の近似解法として使用されてきた。最近、積分方程式の一種である境界積分方程式 (Boundary Integral Equation) の組織的な離散化手法と考えられる”境界要素法” (Boundary Element Method) が発展し様々な分野の問題に適用されつつある<sup>1~4)</sup>。この境界積分方程式を基礎としている境界要素法は、線形問題に対して、従来の領域型の近似解法 (例えば、差分法、有限要素法) とくらべて、様々な利点を有する有効な手法と考えられている。

境界要素法が種々の問題に進展するに従い、線形問題に対してのみならず非線形問題に対する適用性が検討されるようになってきた。著者等は、これまで積分方程式法の非線形問題への適用に際し、線形問題における境界積分方程式に対してHybrid型積分方程式に基づく解法を提案し、種々の問題を解析してきた<sup>5~9)</sup>。この解法では、積分方程式の境界積分項のみならず領域積分項にも未知量を含むことを特徴としているので、その離散化に当っては、境界要素のみならず内部要素も必要となる。従って境界型解法としての利点が失われることになる。

最近、上述した手法とは異なる非線形問題に対する新しい積分方程式法を開発することができた<sup>10~12)</sup>。この解法は、与えられた非線形方程式を線形化することによって得られた線形微分作用素の基本解を用いて誘導された問題の境界積分方程式表現に基づいたものである。ただし、非線形微分方程式の線形化は、与えられた領域に対して行うのではなく、その部分領域に対して行っている。問題の解は、各部分領域で得られた境界積分方程式の解を結合して構成し

ようとするものである。従って、この解法で対象とする積分方程式は、あくまでも境界積分方程式である。我々はこの方法を、境界要素法の基本的な考え方をそのまま非線形問題に拡張しているという特徴から”一般化された境界要素法”(Generalized Boundary Element Method)と名付けた。

本論では、この新しい境界型解法の原理並びに手順を展開し、この新しい解法の有効性と適用性を化学反応系であらわれる非線形問題および極小曲面問題に対する数値計算例によって示すことにする。なお、非圧縮性の粘性流体の流れ問題への適用は、本講究録の他の箇所<sup>13)</sup>に述べられているのでここでは触れないことにした。

非線形問題に対する積分方程式による近似解法は、ここで述べる一般化された境界要素法のみならず、いくつかのアプローチが考えられる(Appendix 参照)。この点に関する総合的な手法の紹介並びに展開については、他の文献<sup>14)</sup>を参照されたい。

## 2. 非線形問題

新しい手法を展開するためのモデルとして、次のような非線形微分方程式の境界値問題を考える。ある(内部)領域 $\Omega$ で定義された関数 $u$ に対する非線形微分作用素 $A$ に関する非線形微分方程式

$$A(u) = f \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

を $\Omega$ の境界 $\Gamma \equiv \partial \Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ におけるDirichlet型境界条件とNeumann型境界条件

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2)$$

$$B u = \hat{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (3)$$

のもとで解くものとする。ただし、 $f$  は given function、作用素  $B$  は境界微分作用素を示すものとし、 $\hat{u}$  は Dirichlet data、 $\hat{q}$  は Neumann data とする。

ここで非線形作用素  $A$  として、種々の問題の数理モデルに現われる次のような場合を対象とすることは応用上たいへん有効である。

$$A(u) \equiv Lu + N(u) \quad (4)$$

すなわち、 $A$  が線形部分と非線形部分の和として与えられるものとする。以上より式 (4) を有する非線形微分方程式 (1) の境界条件 (2)、(3) に対する解を境界要素法の立場で近似することを考える。

### 3. 一般化された境界要素法

境界値問題 (1) ~ (4) に対して”一般化された境界要素法”の基本的な考え方およびその離散的な解法手順を説明する。

#### 3. 1 問題の境界積分方程式表現

非線形方程式の積分方程式表現を求める際に、非線形作用素  $A \equiv L + N$  の線形化された作用素の基本解を用いることにする。この線形化された作用素として  $L$  のみを用いることもできるが、 $L$  と共に非線形部分  $N$  の効果を採り入れることを考える。そのためには、 $N$  の線形化  $v \cdot M$  を導入し  $A$  を次のように近似する。

$$A(u) \approx Lu + v \cdot Mu \quad (5)$$

ただし、 $v$  は既知量、 $M$  は  $N$  の線形化に対する線形作用素とする。

この近似を正当化するために、与えられた領域  $\Omega$  のある部分領域  $\Omega_0$  を設定する (図 1 参照)。

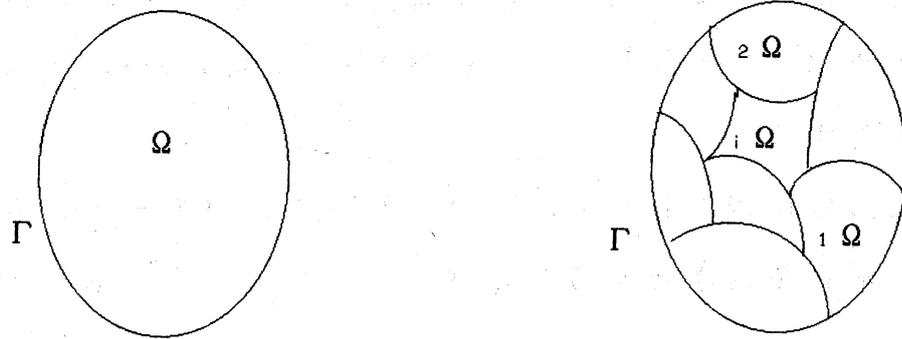


図1 領域と部分領域

すなわち、式(1)の代わり部分領域 ${}_i\Omega$ に対する近似方程式

$$A(u) \doteq Lu + v \cdot Mu = f \quad \text{in } {}_i\Omega \quad (6)$$

を考えることにする。この線形方程式の微分作用素 $(L + vM)$ のadjoint $(L + vM)^*$ の基本解 $w$ を用いることによって次の積分方程式を導くことができる。

$$\begin{aligned} cu(y) = & \int_{{}_i\Gamma} \{u(x) (Bw(x, y)) - (Bu(x)) w(x, y)\} d\Gamma(x) \\ & + \int_{{}_i\Gamma} u \{u(x) (\bar{B}w(x, y)) - (\bar{B}u(x)) w(x, y)\} d\Gamma(x) \quad (7) \\ & + \int_{{}_i\Omega} f(x) w(x, y) d\Omega(x) \end{aligned}$$

ただし、 $C$ は形状係数とし $\bar{B}$ は線形作用素 $M$ に関する境界作用素を表わす。この積分方程式では、部分領域 ${}_i\Omega$ の境界 $({}_i\Gamma)$ 積分項にのみ未知関数を含むことが明らかである。すなわち式(7)は、部分領域 ${}_i\Omega$ における近似方程式(6)の境界積分方程式表現を与えることになる。このような境界積分方程式は、各部分領域 ${}_i\Omega$  ( $i=1, \dots, N$ )に対して導くことができる。

### 3. 2 離散化表現

境界積分方程式(7)を近似的に解くためには、境界要素法にお

ける標準的な離散スキーム<sup>1, 2, 3)</sup>を用いれば良いことになる。

$\Omega_i$ の境界 $\Gamma_i$ をいくつかのsegmentによって近似し、そのsegment上で未知関数を離散化する事によって次のような行列表現を得る。

$${}_i H_i u = {}_i G_i q + {}_i f \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

ただし、行列 ${}_i H_i$ 、 ${}_i G_i$ は基底関数と基本解の積を被積分関数とする境界積分によって与えられ、 ${}_i u$ および ${}_i q$ はsegment上の節点における未知関数およびその導関数による節点ベクトルを表わし、 ${}_i f$ は非同次関数 $f$ と基本解 $w$ との積の領域積分によって与えられる。この離散化表現式(8)を採用した分割 $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ に対するすべての $i$ について設定する。このとき図2に示すように共有する境界 $\Gamma_i$ 上では、 $\Omega_i$ における未知量と $\Omega_{i+1}$ に対する未知量との間に連続条件が成立しなければならない。

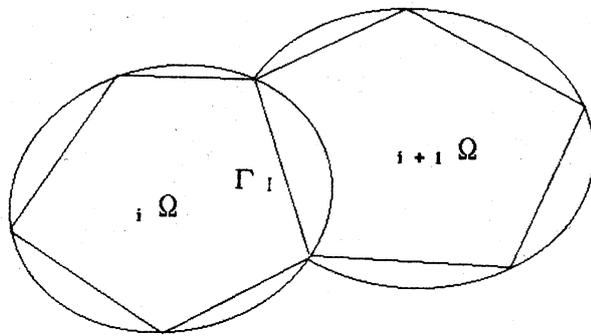


図2 Interface boundary  $\Gamma_i$

このような取扱いについては次のように考える。 $\Omega_i$ と $\Omega_{i+1}$ に対する離散化式を

$$[{}_i H' \quad {}_i H_{\Gamma_i}] \begin{Bmatrix} {}_i u' \\ {}_i u_{\Gamma_i} \end{Bmatrix} = [{}_i G' \quad {}_i G_{\Gamma_i}] \begin{Bmatrix} {}_i q' \\ {}_i q_{\Gamma_i} \end{Bmatrix} + {}_i f \quad (9)$$

$$[{}_{i+1} H' \quad {}_{i+1} H_{\Gamma_i}] \begin{Bmatrix} {}_{i+1} u' \\ {}_{i+1} u_{\Gamma_i} \end{Bmatrix} = [{}_{i+1} G' \quad {}_{i+1} G_{\Gamma_i}] \begin{Bmatrix} {}_{i+1} q' \\ {}_{i+1} q_{\Gamma_i} \end{Bmatrix} + {}_{i+1} f \quad (10)$$

のように、共通境界  $\Gamma_i$  とそれ以外の境界に関する未知量（例えば  ${}_i u'$ ,  ${}_i u_{\Gamma_i}$  のように表現する）とに分割して表現する。ここで  $\Gamma_i$  上の連続条件

$$\begin{aligned} {}_i u_{\Gamma_i} &= {}_{i+1} u_{\Gamma_i} \quad (\equiv u_{\Gamma_i}) \\ {}_i q_{\Gamma_i} &= - {}_{i+1} q_{\Gamma_i} \quad (\equiv q_{\Gamma_i}) \end{aligned} \quad (11)$$

を考慮して、(9) と (10) をまとめて表現すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} {}_i H' & {}_i H_{\Gamma_i} & -{}_i G_{\Gamma_i} & 0 \\ 0 & {}_{i+1} H_{\Gamma_i} & {}_{i+1} G_{\Gamma_i} & {}_{i+1} H' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_i u' \\ u_{\Gamma_i} \\ q_{\Gamma_i} \\ {}_{i+1} u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_i G & 0 \\ 0 & {}_{i+1} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_i q \\ {}_{i+1} q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_i f \\ {}_{i+1} f \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、上式の両辺の係数行列が 0 要素を含むことになることは注目に値する。

全ての部分領域に対して離散化式 (8) を設定し、式 (12) のような結合を行うことによって全体系を得る。さらに与えられた境界条件 (2)、(3) を考慮し、系の未知ベクトル  $X$  と既知ベクトル  $F$  に対する次の決定方程式を組み立てることができる。

$$A(v) X = F \quad (13)$$

ただし  $A$  は各部分領域であらかじめ決定された  $v$  を含んだ係数行列であり式 (12) の性質を反映し、帯性を有するものとなる。

### 3. 3 解法

決定方程式 (13) は次のような計算手順にしたがって効率的に解くことができる。

#### ① 初期値の仮定

各部分領域において既知と仮定した  $v$  の初期値をまず仮定する。この値に対して係数行列  $A(v)$  を計算する。

② 解ベクトル  $X$  の決定

計算された  $A(v)$  を用いて式 (13) を解く。このとき帯性係数行列を有する連立方程式の solver を用いることができる。

## ③ 初期値の修正

解  $X$  より決定される各部分領域の境界上の未知量より  $v$  の修正値を決定する。この修正値を元にステップ①に戻る。

## ④ 解の収束性の判定

得られた解  $X$  の収束性をあらかじめ定めておいた基準をもとにして判定する。基準を満足する場合は、問題の近似値として決定する。満足しない場合は、手順①～③に従い、新しく解  $X$  を決定する。

以上により非線形問題 (1) ~ (4) を境界要素法の基礎的要因である基本解の利用による境界積分方程式の離散化という立場から近似的に解くことのできる手法を提案した。最終的な決定方程式である quasi-linear の解法には単純な繰り返し代入法を採用した。

## 4. 数値計算例

4. 1 拡散制御化学問題<sup>10,11)</sup>

化学反応系における非線形問題として知られている次の境界値問題を取り上げる。

支配方程式

$$\nabla^2 u = \alpha u^2 \quad \text{in } \Omega \quad (14)$$

境界条件

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (15)$$

$$q \equiv \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (16)$$

ここで、非負関数  $u$  は反応物質の濃度を表わし、反応系の問題であるから Dirichlet Data  $\hat{u}$  および非線形パラメータ  $\alpha$  を非負とする。

一般化された境界要素法の解析手順を例示するために、上記の問題の1次元版を以下で解析する。1次元閉領域  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  に対して、式(14)、(15)は次のように与えられるものとする。

$$u,_{xx} = \alpha u^2 \quad (0 < x < 1) \quad (17)$$

$$u(0) = 1.0, \quad u(1) = 0.25 \quad (18)$$

この問題に対して、 $\alpha = 6$  の場合には容易に解析的に厳正解を構成することができる。

$$u(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (19)$$

$$u,_{xx}(x) = \frac{-2}{(1+x)^3} \quad (20)$$

で与えられる。

式(17)を  $\Omega$  のある部分領域  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$  において一定値である既知数  $v$  を用いて次のように線形化する。

$$u,_{xx} = \alpha v u \quad (x_{i-1} < x < x_i) \quad (21)$$

上式に対し、線形微分作用素  $(d^2/dx^2 - \alpha v)$  の基本解  $w^*$ 、すなわち

$$w^*,_{xx} - \alpha v w^* = \delta(x-y) \quad (22)$$

を満足する解  $w^*$  を用いて次の積分方程式を導くことができる。

$$w(y) = [u(x) w^*,_x(x, y)]_{x_{i-1}}^{x_i} - [u,_{xx}(x) w_*(x, y)]_{x_{i-1}}^{x_i} \quad (23)$$

ここで、式(22)を満足する基本解およびその導関数は距離  $r = |x - y|$  を用いて次のように構成される。

$$w^*(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{av}} e^{-\sqrt{av}r} \quad (24)$$

$$w^*,_x(x, y) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{av}r} \operatorname{sgn}(x-y) \quad (25)$$

これらの関数を式(23)に代入することによって、直ちに次の行列表現を得る。

$${}_i H_i v = {}_i G_i q \quad (26)$$

ただし係数行列および未知ベクトルを次のように定義する。

$${}_i H = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-\sqrt{av}(x_i-x_{i-1})} \\ e^{-\sqrt{av}(x_i-x_{i-1})} & -1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$${}_i G = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{av}} & \frac{1}{\sqrt{av}} e^{-\sqrt{av}(x_i-x_{i-1})} \\ \frac{1}{\sqrt{av}} e^{-\sqrt{av}(x_i-x_{i-1})} & -\frac{1}{\sqrt{av}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$${}_i u = [u_{i-1}, u_i]^T \quad (29)$$

$${}_i q = [(u, x)_{i-1}, (u, x)_i]^T \equiv [q_{i-1}, q_i]^T \quad (30)$$

式(26)を全ての部分領域に対して構成し、共通境界点での連続条件を考慮し、全体系に対して組み立てることによって式(13)を得る。例えば2分割に対して決定方程式(13)を具体的に示すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_1 & -e^{-a_1\Delta_1} & -a_1 e^{-a_1\Delta_1} & 0 \\ -a_1 e^{-a_1\Delta_1} & -1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & -a_2 & -a_2 e^{-a_2\Delta_2} \\ 0 & -e^{-a_2\Delta_2} & -a_2 e^{-a_2\Delta_2} & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ u_1 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0 \\ e^{-a_1\Delta_1} u_0 \\ e^{-a_2\Delta_2} u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ただし、

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha v_i}}, \quad \Delta_i \equiv x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2) \quad (32)$$

以下では、非線形パラメータ  $\alpha = 6$  および  $10^3$  に対し、得られた数値解を他の解法との比較を通して示す。

TABLE 1 Numerical Results ( $\alpha=6$ )

X	Exact	Boundary-Domain Element			Generalized Boundary Element		
		n=4	n=10	n=20	n=4	n=10	n=20
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1	0.82644		0.82725	0.82665		0.82595	0.82632
0.2	0.69444		0.69556	0.69473		0.69376	0.69472
0.3	0.59172		0.59289	0.59201		0.59100	0.59154
0.4	0.51020		0.51132	0.51049		0.50952	0.51003
0.5	0.44444	0.45020	0.44543	0.44469	0.44067	0.44384	0.44429
0.6	0.39063		0.39145	0.39083		0.39012	0.39050
0.7	0.34602		0.34666	0.34618		0.34563	0.34592
0.8	0.30864		0.30908	0.30875		0.30838	0.30858
0.9	0.27701		0.27724	0.27707		0.27687	0.27697
1.0	0.25000	0.25000	0.25000	0.25000	0.25000	0.25000	0.25000

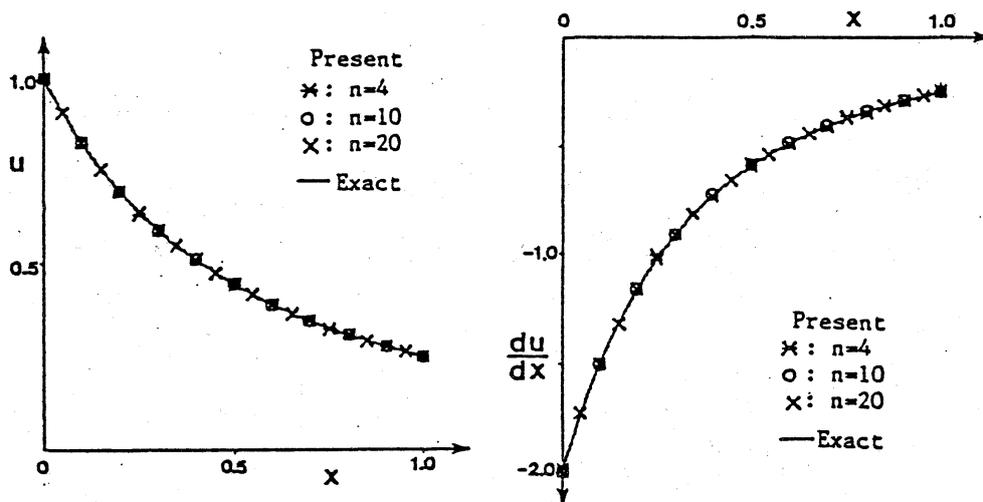
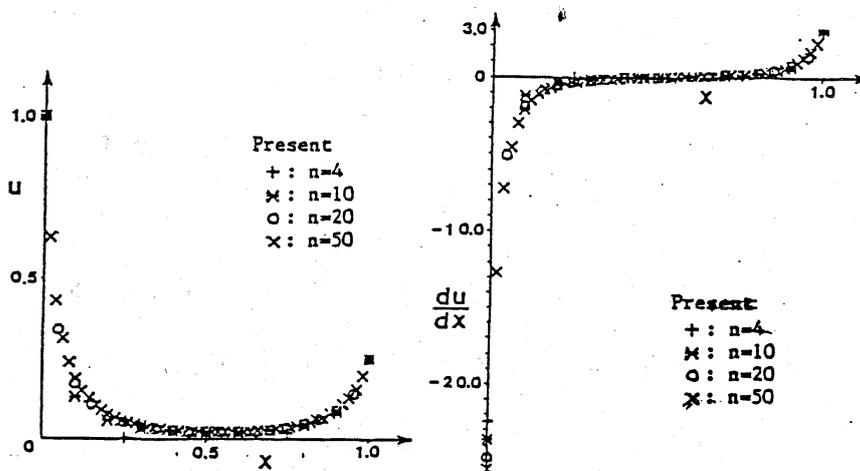


図 3 Comparisons in  $\alpha=6$

TABLE 2 Numerical Results ( $\alpha=10^3$ )

Boundary-Domain Element Solutions				
X	n=4	n=10	n=20	n=50
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1		0.24639	0.20980	0.19427
0.2		0.09984	0.08503	0.07948
0.3		0.05295	0.04612	0.04368
0.4		0.03412	0.03050	0.02923
0.5	0.03821	0.02692	0.02466	0.02388
0.6		0.02696	0.02510	0.02447
0.7		0.03427	0.03205	0.03131
0.8		0.05333	0.04986	0.04867
0.9		0.10083	0.09511	0.09299
1.0	0.25000	0.25000	0.25000	0.25000

Generalized Boundary Element Solutions				
X	n=4	n=10	n=20	n=50
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1		0.13302	0.17613	0.18824
0.2		0.05954	0.07345	0.07746
0.3		0.03491	0.04104	0.04279
0.4		0.02462	0.02786	0.02877
0.5	0.00993	0.02104	0.02304	0.02360
0.6		0.02225	0.02380	0.02425
0.7		0.02875	0.03054	0.03106
0.8		0.04465	0.04747	0.04827
0.9		0.08546	0.09080	0.09266
1.0	0.25000	0.25000	0.25000	0.25000

图 4 Comparisons in  $\alpha=10^3$

次に2次元領域  $\bar{\Omega} = \{ (x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1 \}$  に対して考える<sup>12)</sup>。ここでは、境界条件(15)、(16)として、

$$u(0, y) = 1.0, \quad u(1, y) = 0.25 \quad (33)$$

$$q(x, 0) = q(x, 1) = 0 \quad (34)$$

を与える。

ある部分領域  $\Omega$  において、 $v$  を  $\Omega$  で既知なる一定値とすることにより式(14)を

$$\nabla^2 u = \alpha v u \quad \text{in } \Omega \quad (35)$$

と線形化する。この式に対する境界積分方程式表現は次のように与えられる。

$$c(y) u(y) = \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial w^*(x, y)}{\partial n} d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial n} w^*(x, y) d\Gamma(x) \quad (36)$$

ただし、 $c(y)$  は点  $y$  に依存する形状係数とし、基本解  $w^*$  は方程式

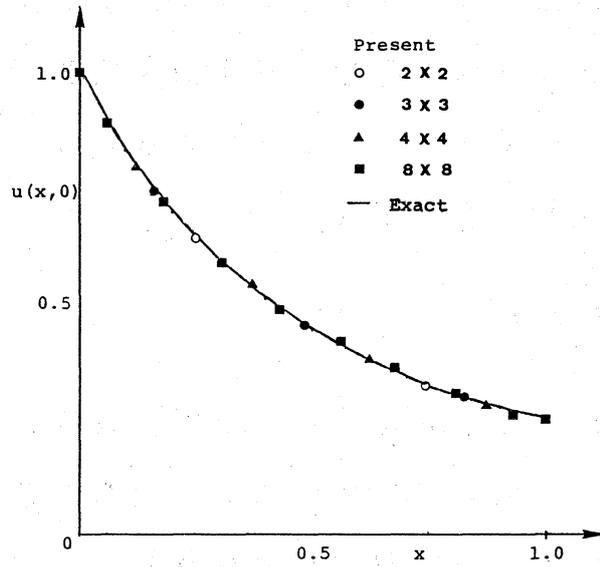
$$(\nabla^2 - \alpha v) w^* = \delta(x - y) \quad (37)$$

を満足する湯川ポテンシャル

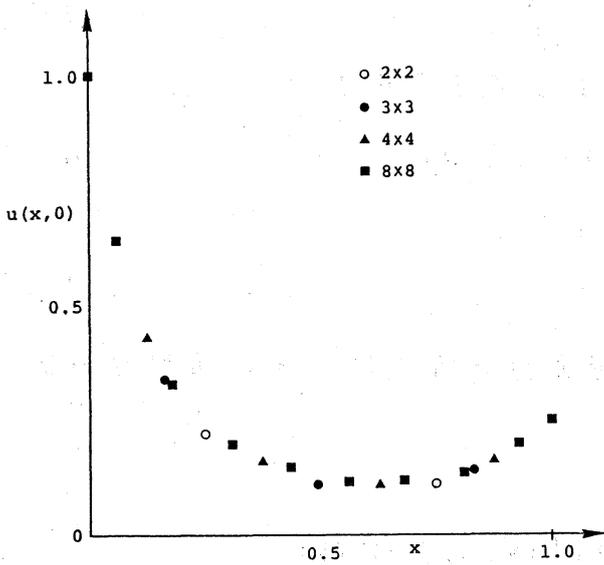
$$w^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} K_0(\sqrt{\alpha v} r) \quad (38)$$

として与えられるものである。 $K_0$  は第2種0次変形Bessel関数を表わす。

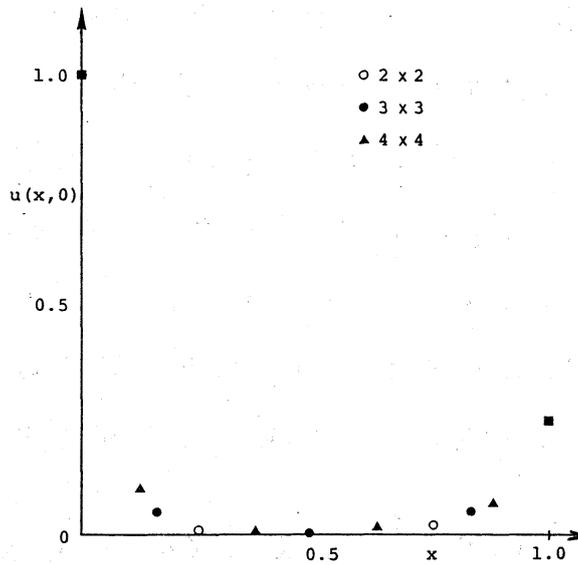
以下では、単位正方領域  $\Omega$  を4, 9, 16, 64の部分正方領域に分割し一定要素を採用し  $\alpha = 6, 10^2, 10^3$  に対して得られた数値結果をグラフで示す。



Numerical results ( $\alpha = 6$ )



Numerical results ( $\alpha = 10^2$ )



Numerical results ( $\alpha = 10^3$ )

図 5 数值結果 (2次元問題)

4. 2 Plateau問題<sup>15)</sup>

3次元空間中の与えられた曲線  $c$  を境界とする面積最小の曲面を求めるという Plateau問題 (極小曲面問題) を考える。境界曲線  $c$  が 1 価関数  $z = g(x, y)$  で与えられるとき、 $c$  で囲まれる曲面  $z = u(x, y)$  の面積は

$$J[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, d\Omega \quad (39)$$

で与えられる。ただし  $\Omega$  は  $c$  を  $x - y$  平面上に投影した曲線  $\Gamma$  で囲まれる  $x - y$  平面上の領域とする。この汎関数の極値問題の Euler 方程式として次の非線形微分方程式が導かれる。

$$u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1 + u_x^2) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (40)$$

ここでは、この Euler 方程式を次の境界条件のもとで解く境界値問題を考える。

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{on } \Gamma \quad (41)$$

式 (40) を部分領域  ${}_i\Omega$  で次のように線形化する。

$$u_{xx}(1 + \beta^2) - 2u_{xy}\alpha \cdot \beta + u_{yy}(1 + \alpha^2) = 0 \quad \text{in } {}_i\Omega \quad (42)$$

但し、 $\alpha, \beta$  は  ${}_i\Omega$  内で一定の既知量として

$$\alpha = v_x, \quad \beta = v_y \quad (43)$$

で与えられるものとする。この線形微分方程式に対する境界積分方程式を次のように導くことができる。

$$\begin{aligned} cu(y) = & \int_{{}_i\Gamma} \{u(x) q^*(x, y) - q(x) w^*(x, y)\} d\Gamma(x) \\ & + \int_{{}_i\Gamma} u \{u(x) (Q^*(x, y)) - Q(x) w^*(x, y)\} d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (44)$$

ただし、

$$q \equiv \frac{\partial u}{\partial n}, \quad q^* \equiv \frac{\partial w^*}{\partial n}$$

$$Q = \beta^2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x - \alpha \beta \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_y + \frac{\partial u}{\partial y} n_x \right) + \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial y} n_y, \quad (45)$$

$$Q^* = \beta^2 \frac{\partial w^*}{\partial x} n_x - \alpha \beta \left( \frac{\partial w^*}{\partial x} n_y + \frac{\partial w^*}{\partial y} n_x \right) + \alpha^2 \frac{\partial w^*}{\partial y} n_y,$$

さらに  $w^*$  は

$$w_{xx}^* (1 + \beta) + w_{yy}^* (1 + \alpha^2) - 2w_{xy}^* \alpha \beta = \delta(x - y) \quad (46)$$

を満足する基本解として次のように構成することができる。

$$w^*(x, y) = \frac{1}{2\pi \hat{\alpha} \hat{\beta} \sqrt{1 - \gamma}} \log R \quad (47)$$

ただし、

$$\hat{\alpha} = \sqrt{1 + \alpha^2}, \quad \hat{\beta} = \sqrt{1 + \beta^2}, \quad \gamma = \frac{\alpha \beta}{\hat{\alpha} \hat{\beta}} \quad (48)$$

$$R^2 = \frac{1}{2(1-\gamma)} \left( \frac{x_1 - y_1}{\hat{\beta}} + \frac{x_2 - y_2}{\hat{\alpha}} \right)^2 + \frac{1}{2(1+\gamma)} \left( \frac{x_1 - y_1}{\hat{\alpha}} + \frac{x_2 - y_2}{\hat{\beta}} \right)^2 \quad (49)$$

以下では、直線辺を有する極小曲面および2辺円弧、2辺直線辺を有する極小曲面に対して計算された形状を示す。

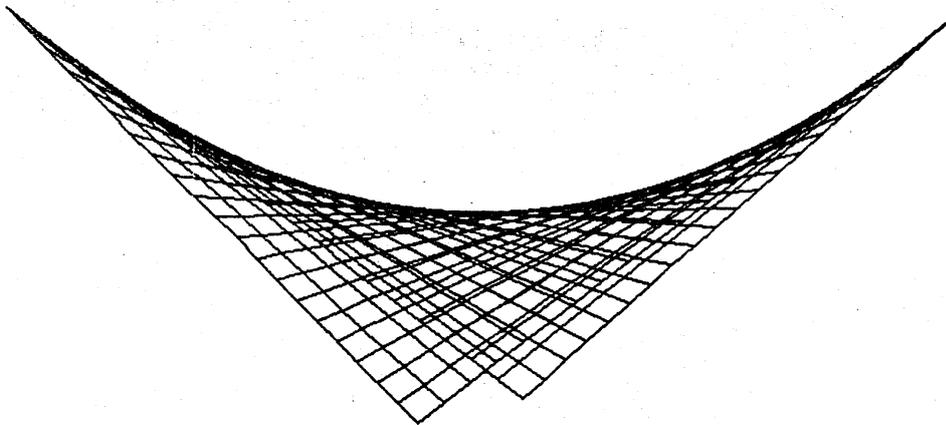


図6 極小曲面(4辺直線)

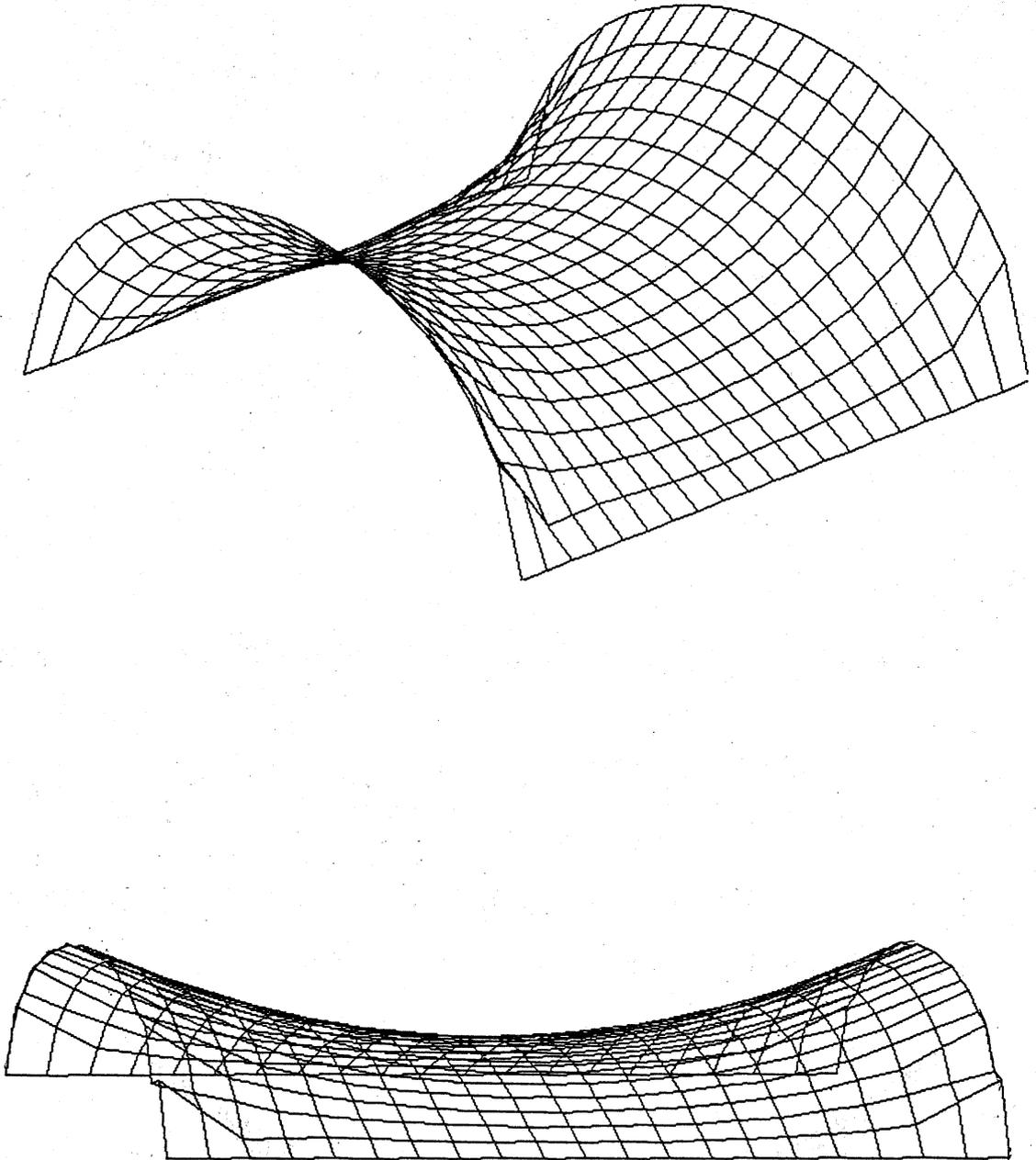


图7 極小曲面（2边直線，2边円弧）

## 結論

以上、本論文では、非線形問題の積分方程式による近似解法の中でも、“境界要素法”の有する特徴を保存した形式を有する“一般化された境界要素法”について述べた。

一般的な非線形境界値問題を対象として提案手法の基本的な考え方を通して、問題の定式化ならびに解法を展開した後、化学反応系および極小曲面であらわれる非線形モデルに対し数値計算法と数値計算結果を与えた。本手法は、非線形問題の数値計算法の中でも1つの有効なアプローチであると思われる。

## 参考文献

1. Brebbia, C.A & Walker, S.: Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, 1980
2. Banerjee, P.K & Butterfield, R.: Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, 1981
3. 登坂宣好・中山司: 境界要素法の基礎, 日科技連出版社
4. Brebbia, C.A, Telles, T.C.F. and Wroble, L.C: Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, 1984
5. 登坂宣好: 積分方程式法による境界値問題の近似解法(その1. 一般的定式化), 日本建築学会論文報告集, 第321号, PP.49-55, 1982
6. 登坂宣好・角田和彦: 積分方程式法による境界値問題の近似解法(その2. はり問題への適用), 日本建築学会論文報告集, 第329号, PP.43-51, 1983
7. Tosaka, N. and Miyake, S.: Large deflection analysis of shallow spherical shell using an integral equation

- method , Boundary Elements (ed. Du Qinghua), PP.59-66, Pergamon Press, 1986
8. Tosaka, N. and Kakuda, K. : Numerical simulations for incompressible viscous flow Problems using the integral equation method, Boundary Elements VIII (eds. Tanaka, M. and Brebbia, C.A.), vol. II , PP.813-822, Springer-Verlag, 1986
9. Tosaka, N. and Fukushima, N. : Numerical Simulations of laminar natural convection problems by the integral equation method, Numerical Methods in Thermal Problems (eds. Lewis, R.W., et al) Vol. V, Part1 , PP.500-511 , Pineridge Press, (1987)
10. Tosaka, N. & Kakuda, K.: The generalized boundary element method for nonlinear problems, Boundary Element X (ed. C.A. Brebbia) vol. I . PP.3-17, Springer-Verlag, 1988
11. Tosaka, N. : Boundary element methods and nonlinear problems, Boundary Element Method in Applied Mechanics (eds. M. Tanaka & T.A. Cruse), PP.491-500, Pergamon Press, 1988
12. 登坂宣好：積分方程式による非線形問題の近似解析法，第38回応用力学連合講演会講演論文抄録集，PP.55-56, 1988
13. 角田和彦・登坂宣好：粘性流れ問題の一般化された境界要素解析，京都大学数理解析研究所講究録，（「境界要素法の数学的理論とその周辺II」）
14. Tosaka, N.: Nonlinear Analysis, In : Brebbia, C.A. (ed) :

Topics in Boundary Element Research Vol. VIII, (to be  
appeared)

15. Tosaka, N. and Fukushima, N.: Application of generalized  
boundary element approach to Plateau's problems. (to be  
appeared)

Appendix

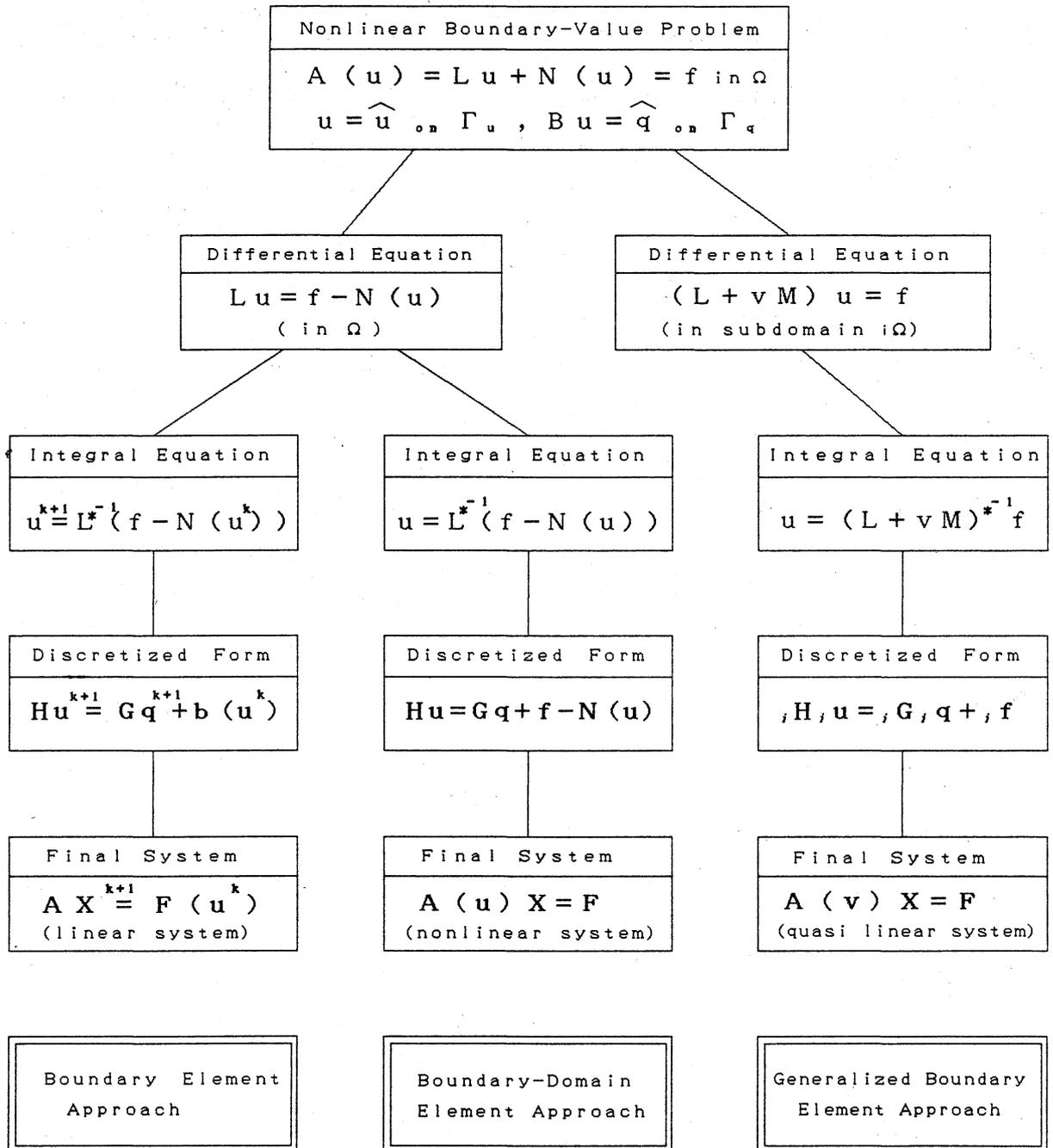


Fig. Conceptive flow and solution procedure of each approach