

blockwise  $m$ -dependent 確率変数列の

大数の強法則について

宮教入 吾妻一興 (Kazuoki Azuma)

$\{X_k\}$  は確率変数列とし,  $E(X_k) = 0$ ,  $E(X_k^2) = \sigma_k^2 < \infty$  とする。  
 $\{X_k\}$  が blockwise  $m$ -dependent であることをいう。

十分大なる  $p \in \mathcal{N}$  に対して,  $2^{p-1} < k < l \leq 2^p$ ,  $l - k > m$  ならば,  
 $2^p$  の集合  $\{X_{2^{p-1}+1}, \dots, X_k\}$  と  $\{X_l, X_{l+1}, \dots, X_{2^p}\}$   
が独立であることである。

$\{X_k\}$  が blockwise quasi-orthogonal であるという。

$\forall p \in \mathcal{N}, \exists f_p(j), j = 0, 1, \dots, 2^{p-1};$

$$\left\{ \begin{array}{l} |E(X_k X_l)| \leq \sigma_k \sigma_l f_p(|k-l|), \quad 2^{p-1} < k, l \leq 2^p \\ \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} f_p(j) \leq C \end{array} \right.$$

が成り立つことと定義する。

これらに類似する F. Móricz の結果を紹介する。

定理 1  $\{X_k\}$  が blockwise  $m$ -dependent ならば

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow 0 \quad \text{a.s.} \quad (n \rightarrow \infty)$$

定理 2  $\{x_k\}$  が blockwise quasi-orthogonal ならば

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 [\log(k+1)]^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k \text{ conv. a.s. } (n \rightarrow \infty)$$

従って, Kronecker の lemma を用いて,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} [\log(k+1)]^2 < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow 0 \text{ a.s. } (n \rightarrow \infty)$$

定理 1 の証明は, 定義より,  $\exists p, t \in \mathcal{N}; 2^{p-1} < k_1 < k_2 < \dots < k_t$   
 $\leq 2^p$ ,  $k_{\tau+1} - k_{\tau} > m$  ( $\tau = 1, 2, \dots, t-1; t \geq 2$ ) ならば, 確率変数  
 列  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_t}$  が互いに独立であることと,

$\varepsilon - \chi = t$  不等式

$$E \left( \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} x_k \right)^2 \leq C_1 \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} \sigma_k^2$$

が成り立つことによる。

定理 2 の証明は,  $a, n \in \mathcal{N}$  ならば  $a+1, a+n$  が同じ dyadic block  
 に属するもの, 即ち  $\exists p \geq 1; 2^{p-1} < a+1 \leq a+n \leq 2^p$  となる

とき,  $\varepsilon - \chi = t$  不等式

$$E \left( \sum_{k=a+1}^{a+n} x_k \right)^2 \leq C_2 \sum_{k=a+1}^{a+n} \sigma_k^2$$

が成り立つことによる。

よって, blockwise  $m$ -dependent の場合は,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty \text{ ならば } \sum x_k \text{ conv. a.s. であることが示される。}$$

## 参考文献

1. F. Móricz. Strong limit theorems for blockwise  $m$ -dependent and blockwise quasiorthogonal sequences of random variables. Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987). 709-715.
2. F. Móricz. Moment inequalities and the strong laws of large numbers, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 35 (1976). 299-314.