

## Skew ブラウン運動に関するグラフの上の 熱方程式の基本解について

都立航空高専 岡田達也 (Tatsuya Okada)

本稿では, 無限に分岐するグラフの上の熱伝播を考える。  
とくに, グラフの分岐点において Skew をもつ拡散過程に対  
応する熱方程式について, いくつかの例で, その基本解を  
*explicit* に計算し, かつ,  $t \rightarrow \infty$  のときの基本解の *local* な  
漸近挙動を調べる。

### §1. 熱方程式の基本解

はじめグラフ  $G$  の各点における温度を  $0^\circ$  として, 時刻  
 $t=0$  で点  $y \in G$  に単位熱量を与えたときの時刻  $t=t_0$  での  
点  $x \in G$  における温度を  $U_{t_0}(x)$  とすると, 分岐点以外では,  
 $U$  は熱方程式:

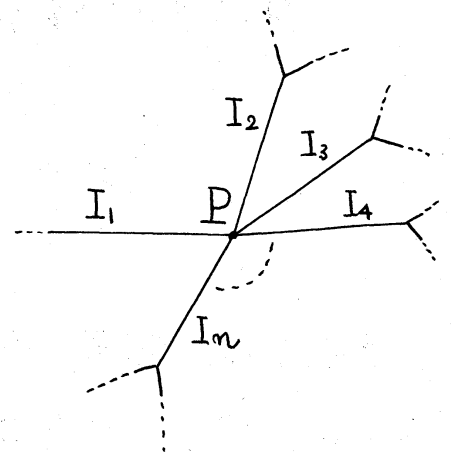
$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial}{\partial x} a(x)^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) U = 0 \quad (1)$$

をみだす。このときに  $U_t(x)$  を  $P_t(x, y)$  と表わして基本解と  
呼ぶ。以下,  $L = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dx} a^2 \frac{d}{dx}$  とおくことにする。

ここでは、各枝上（隣接する分岐点間）では、 $a(x), a(x)$  はともに定数でかつ  $a=C$  を仮定する。（つまり、 $L = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$ ）

§2. Skew ブラウン運動

グラフ  $G$  の各枝上では通常の動きをするブラウン運動であり、グラフの分岐点  $P$  に粒子が到達したときには、点  $P$  から分岐する各枝  $I_1, I_2, \dots, I_n$  方向

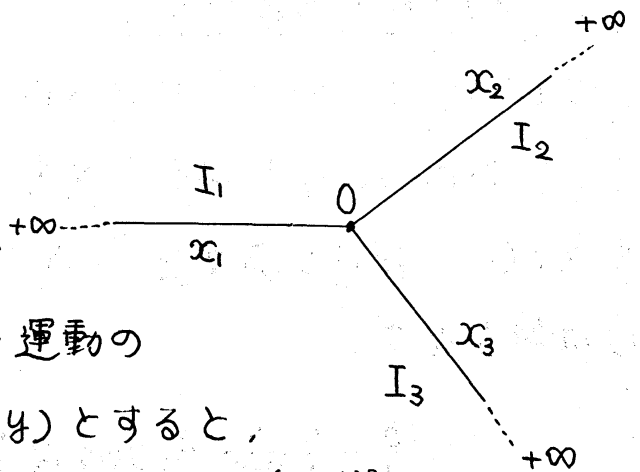


に粒子がとび出す確率が各粒子ごとに独立にそれぞれ  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ( $\alpha_i \geq 0, i=1, \dots, n, \sum \alpha_i = 1$ ) であるものを点  $P$  で  $I_1, \dots, I_n$  方向に  $\text{Skew } \alpha_1, \dots, \alpha_n$  をもつ Skew ブラウン運動という。

たとえば、グラフ  $G$  を原点で3本の半直線に分岐するものとする:

例1. [3]

原点で  $I_i$  方向に  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) の Skew をもつ Skew ブラウン運動の推移確率密度を  $P_t(x, y)$  とすると、



$$\sqrt{2\pi t} P_t(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} + (2\alpha_i - 1) e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}} & (x, y \in I_i) \\ 2\alpha_j e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}} & (x \in I_i, y \in I_j) \end{cases} \quad (2)$$

(Walsh [5] の 1-dim Skew ブラウン運動の  $P_t$  の計算と同様に求まる。)

### 例 2. [3]

$I_i$  上で  $L = \frac{1}{2} \frac{1}{a_i^2} \frac{d}{dx} a_i^2 \frac{d}{dx}$  ( $i=1,2,3$ ) として,  $G$  上の熱方程式  $(\frac{\partial}{\partial t} - L)U = 0$  の基本解を推移確率密度にもつ拡散過程は, 原点で  $I_i$  方向に  $a_i^2 / (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$  ( $i=1,2,3$ ) の Skew をもつ Skew ブラウン運動である。

以下, グラフの分岐点において Skew をもついくつかのモデルで  $P_t(x,y)$  を計算する。

### § 3. $P_t(x,y)$ の求め方

$L$  は  $L^2(G, Cdx)$  上の作用素として自己共役で, 負のスペクトルをもつから,  $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$  に対してグリーン関数  $G(x,y,\lambda)$  を

$$\begin{cases} (\lambda I - L)G = \delta_y \\ G \rightarrow 0 \quad (|x-y| \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (3)$$

よりきめ, さらに, コーシーの積分定理より

$$P_t(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t} G(x,y,\lambda) d\lambda \quad (4)$$

として基本解が求まる。ここで  $G(x,y,\lambda)$  の求め方としては次の modulo constant で一意に定まる解  $U_{\pm}$  :

$$\begin{cases} (\lambda I - L)u_{\pm} = 0 \\ u_{\pm} \rightarrow 0 \quad (x-y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{複号同順}) \end{cases} \quad (5)$$

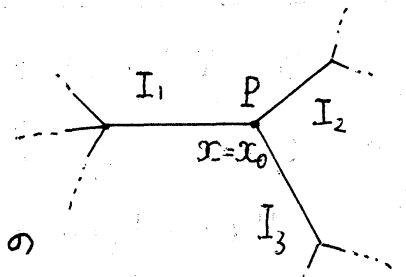
を用いて,

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} -u_-(y)u_+(x)/w(y) & (y \leq x) \\ -u_+(y)u_-(x)/w(y) & (x < y) \end{cases} \quad (6)$$

で定義されることがわかる ([1]). 但し,  $w(y)$  は点  $y$  での  
ロンスキアン,  $w(y) = (u_- u'_+ - u'_- u_+)(y)$   
である.

さらに, 分岐点において Skew をもつ場合の分岐点におけ  
る  $u_{\pm}$  の条件 (温度保存, 熱量保存の条件) は §2 の例 2 より  
次のように与えられる. すなわち:

右図のように, 点  $P(x_0)$  で  $I_1, I_2, I_3$  方向  
にそれぞれ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  の Skew をもつ



Skew ブラウン運動に対応する熱方程式の

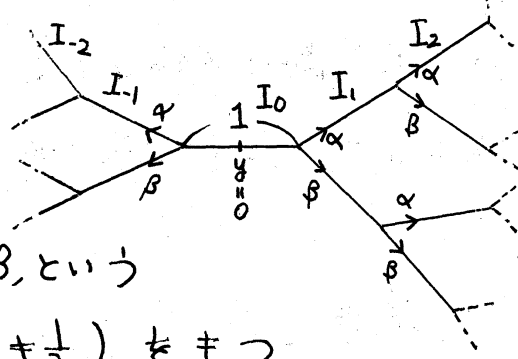
$P_{\pm}$  を計算するための  $u_{\pm}$  の点  $P$  における温度保存, 熱量保存  
の条件はそれぞれ,

$$\begin{cases} u(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_1} = u(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_2} = u(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_3} \\ \alpha_1 u'(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_1} + \alpha_2 u'(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_2} + \alpha_3 u'(x)|_{x \rightarrow x_0 \text{ on } I_3} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

で与えられる。

#### §4. 一様無限分岐 tree モデル

右図のような無限 homogeneous tree で、各分岐点でつねに原点  
方向に  $1-\alpha-\beta$ 、他の2方向に  $\alpha, \beta$ 、という



Skew ( $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \alpha + \beta < 1, \alpha + \beta \neq \frac{1}{2}$ ) をもつ

Skew ブラウン運動に対応する熱方程式の基本解  $P_t$  を計算する。まず  $L$  の定義域  $\mathcal{D}(L)$  は:

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ u \in C \mid \text{分岐点以外で } C^2\text{-class, 分岐点で §3 の (7) をみたす.} \right\}$$

ここで、 $u_+$ :  $(\lambda I - L)u_+ = 0, u_+ \rightarrow 0 (x \uparrow \infty)$

を求めると、

$$u_+ = r^n (\theta e^{\sqrt{\lambda}(x-n)} + e^{-\sqrt{\lambda}(x-n)}) \quad x \in I_n$$

さらに、原点に関する対称性より

$$u_- = r^n (\theta e^{-\sqrt{\lambda}(x+n)} + e^{\sqrt{\lambda}(x+n)}) \quad (8)$$

とできる。但し、

$$\begin{cases} \theta = \left\{ \gamma - \gamma^{-1} - \sqrt{(\gamma - \gamma^{-1})^2 + 4(2\alpha + 2\beta - 1)^2} \right\} / 2(2\alpha + 2\beta - 1) \\ r = \left\{ \gamma + \gamma^{-1} - \sqrt{(\gamma + \gamma^{-1})^2 + 16(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)} \right\} / 4(\alpha + \beta) \\ \gamma = e^{\sqrt{\lambda}} \end{cases} \quad (9)$$

よって, §3の(6)で  $G(x, y, \lambda)$  がまた(4)で  $P_t(x, y)$  が求まる。

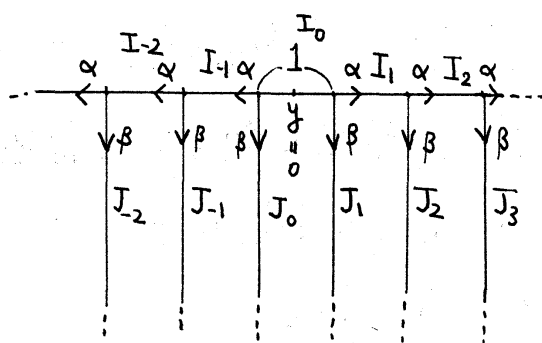
次に  $P_t(0, 0)$  の  $t \rightarrow \infty$  のときの減少のオーダーを調べてみる。とくに指数のオーダーによる減衰が  $L$  のスペクトルの上端と原点との距離に関係することがよく知られているが、ここでは次のような結果が得られた:

### 定理

$$\begin{cases} \alpha + \beta > \frac{1}{2} \text{ のとき,} \\ P_t(0, 0) = O(t^{-\frac{3}{2}} e^{-|\sin^{-1}(2\alpha + 2\beta - 1)|^2 t}) \quad t \rightarrow \infty \\ \alpha + \beta < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ P_t(0, 0) \rightarrow 1 - 2\alpha - 2\beta \quad t \rightarrow \infty \end{cases}$$

### §5. Komb type モデル

右図のように無限周期的に分岐する tree で, 各分岐点で原点方向に  $1 - \alpha - \beta$ , 他の方向に図の  
 ように  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \alpha + \beta < 1, \alpha \neq \frac{1}{2}$ )



という Skew をもつ Skew ブラウン運動に対応する熱方程式の基本解  $P_t$  を計算する。このときも  $L$  の定義域は §4 と同様であり,  $u_{\pm}$  はそれぞれ次のようになる:

$$\begin{aligned}
 u_+ &= \begin{cases} r^n (\theta e^{\sqrt{\lambda}(x-n)} + e^{-\sqrt{\lambda}(x-n)}) & x \in I_n \\ r^n \beta e^{-\sqrt{\lambda}(x-n)} & x \in J_n \end{cases} \\
 u_- &= \begin{cases} r^n (\theta e^{-\sqrt{\lambda}(x+n)} + e^{\sqrt{\lambda}(x+n)}) & x \in I_n \\ r^n \beta e^{\sqrt{\lambda}(x+n)} & x \in J_n \end{cases}
 \end{aligned} \tag{10}$$

但し,

$$\begin{cases}
 r = \left\{ \gamma + (1-2\beta)\gamma^{-1} - \sqrt{\left\{ \gamma + (1-2\beta)\gamma^{-1} \right\}^2 - 16\alpha(1-\alpha-\beta)} \right\} / 4\alpha \\
 \theta = \left\{ \gamma - (1-2\beta)\gamma^{-1} - \sqrt{\left\{ \gamma - (1-2\beta)\gamma^{-1} \right\}^2 - 4(2\alpha-1)(1-2\alpha-2\beta)} \right\} / 2(2\alpha-1) \\
 \beta = \left\{ (4\alpha-1)\gamma - (1-2\beta)\gamma^{-1} - \sqrt{\left\{ \gamma - (1-2\beta)\gamma^{-1} \right\}^2 - 4(2\alpha-1)(1-2\alpha-2\beta)} \right\} / 2(2\alpha-1)\gamma \\
 \gamma = e^{\sqrt{\lambda}}
 \end{cases} \tag{11}$$

よって, §3の(6), (4)で  $P_t(x, y)$  が求まる。また,  $P_t(0, 0)$  の  $t \uparrow \infty$  のときの減少のオーダーについては次のような結果が得られた:

### 定理

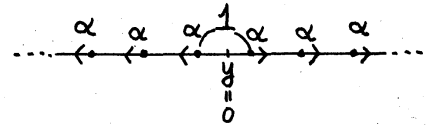
$$\begin{cases}
 1-\alpha-\beta = \alpha \text{ のとき } P_t(0, 0) = O(t^{-\frac{3}{4}}) & t \uparrow \infty \\
 1-\alpha-\beta > \alpha \text{ のとき } P_t(0, 0) = O(t^{-\frac{1}{2}}) & t \uparrow \infty
 \end{cases}$$

### §6. あとがき

1. §4のモデルは本質的には1次元の場合に帰着できる

のだが、ちなみに、1次元で周期的に skew をもつブラウン運動に対応する熱方程式の基本解  $P_t$  の  $t \uparrow \infty$  での減少のオーダーは次のようになる:

(I) 原点方向に  $1-\alpha$  の skew をもつ場合.

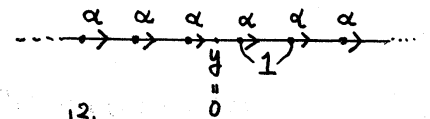


i)  $\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow P_t(0,0) = O(t^{-\frac{3}{2}} e^{-|\sin^{-1}(2\alpha-1)|^2 t}) \quad t \uparrow \infty$

ii)  $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow P_t(0,0) \rightarrow 1-2\alpha \quad t \uparrow \infty$

(II) 一定方向に skew  $\alpha$  をもつ場合.

$\alpha \neq \frac{1}{2}$



$\Rightarrow P_t(0,0) = O(t^{-\frac{3}{2}} e^{-|\sin^{-1}(2\alpha-1)|^2 t}) \quad t \uparrow \infty$

2. §5 のモデルで  $1-\alpha-\beta=0$  の場合の  $P_t(0,0)$  の  $t \uparrow \infty$  の減衰のオーダーは指数的になる。

### 参考文献

- [1] B. Gaveau - M. Okada - T. Okada, Explicit heat kernels on graphs and spectral analysis (to appear)
- [2] K. Itô - H.P. McKean, Diffusion processes and their sample paths. Springer. New York. (1965)



- [3] T. Okada, 不連続係数をもつ熱方程式の基本解, マルチンゲールとその周辺シンポジウム (1987)
- [4] M. Okada, *personal communication*
- [5] J.B. Walsh, *A diffusion with discontinuous local time*, *Astérisque*, 52-53 p 37-45 (1978)