数理解析研究所講究録
706巻 1989年 140-154

特異測度による連続関数の一様近似とその応用

関口　健　　東北学院大学教養学部
塩田安信　　秋田大学教育学部

1．序

本稿では、Hata-Yamaguti[1] で扱われている問題、差分方程式系および Lebesgue の特異関数と高木関数を関係づける公式、をマルチンゲールの考え方に基づいて考察する。

2．主結果

$I=[0,1]$ の２進分割を $n=0,1,\ldots$ に対し

$$I(n,j)=[j2^{-n},(j+1)2^{-n}[,\ j=0,..,2^n-2,$$
$$I(n,2^n-1)=[(2n-1)2^{-n},1]$$

とし、σ-加法族の増加列を

$$\mathcal{F}(n)=\sigma(\ I(n,j);j=0,..,2^n-1\ ),\ n=0,1,\ldots$$

とする。　また I 上の関数 R, ϕ を

$$R(x)=1_{I(1,0)}(x)-1_{I(1,1)}(x),$$
$$\phi(x)=2x \bmod 1$$

とおく。　各 r（ $0<r<1$ ）に対し、I 上の確率測度 $\mu(r)$ で

$$\mu(r)(I(n+1,2j)\quad=r\mu(r)(I(n,j)),\qquad n=0,1,\ldots,$$
$$\mu(r)(I(n+1,2j+1)=(1-r)\mu(r)(I(n,j)),\quad j=0,1,..2^n-1,$$

を満たすものが一意に存在することは知られている。　これは de Wijs のフラクタルと呼ばれているもので、r = 1/2 のとき通常の Lebesgu 測度で、それ以

外のときは連続な特異測度である。　また

$$L(r,x) = \mu(r)([0,x])$$

は、いわゆる Lebesgue の特異関数である。　更に、

$$S(r,x) = \int_0^x 2R/\{1+(2r-1)R\}d\mu(r)$$

$$S(r,n,x) = S(r,\phi^n(x)),\ n = 0,1,\ldots,$$

$$S(r,n,j,x) = S(r,n,x)1_{I(n,j)}(x),\ n = 0,1,\ldots,\ j = 0,1,\ldots,2^n-1$$

とし、Ｉ 上の連続関数の全体を $\mathscr{C}$(Ｉ) で表す。

<u>定理２．１</u>　$f\in\mathscr{C}$(Ｉ) は次のように一意に展開される。

$$f(x) = f(0)+(f(1)-f(0))L(r,x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1}c(r,f,n,j)S(r,n,j,x),$$

ここで、右辺は一様収束の意味であり、

$$c(r,f,n,j) = f((2j+1)2^{-n-1})-(1-r)f(j2^{-n})-rf((j+1)2^{-n}),$$
$$n = 0,1,\ldots,\ j = 0,1,\ldots,2^n-1.$$

<u>注意</u>　$(S(1/2,n,j,x))_{n,j}$ は Schauder 基だから、上の定理は Schauder 展開の一般化になっている。

<u>定理２．２</u>　各 $x\in$ Ｉ について

$$f(x) = a + bL(r,x) + \sum_{n=0}^{\infty}c(n)S(r,n,x)$$

が収束するならば、$\sum_{n=0}^{\infty}|c(n)|<\infty$ であり、普遍定数 K が存在して

$$|a| + |b| + \sum_{n=0}^{\infty} |c(n)| \leq K\|f\|_{\infty}$$

注意　上の定理は、r = 1/2 のとき、畑－山口の結果である。

定理２．１，定理２．２から直ちに次の定理が導かれる。　これは、畑－山口の結果が、r≠1/2 の場合も正しいことをいっている。

定理２．３　数列 (c(n)),n=0,1,..., が与えられたとき、差分方程式系

$$f((2j+1)2^{-n-1})-(1-r)f(j2^{-n})-rf((j+1)2^{-n}) = c(n),$$
$$n = 0,1,\ldots,\quad j = 0,1,\ldots,2^{n}-1$$

が解 $f\in\mathscr{C}(I)$ をもつための必要十分条件は $\sum_{n=0}^{\infty}|c(n)|<\infty$ である。

このとき、解 f は次のように表される。

$$f(x) = f(0)+(f(1)-f(0))L(r,x)+\sum_{n=0}^{\infty}c(n)S(r,n,x)$$

最後に、高木関数と Lebesgue の特異関数の関連付ける畑－山口の公式を一般化するために、次の記号を準備する。

$$\ell(r,n,j) = \mu(r)(I(n,j))$$
$$T(r,0,x) = L(r,x),\quad k = 0,1,\ldots,$$
$$T(r,k+1,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^{n}-1}\ell(r,n,j)U(r,k,n,j,x),\quad k = 0,1,\ldots,$$
$$U(r,0,x) = S(r,x),$$
$$U(r,k,x) = R(x)T(r,k,\phi(x)),\quad k = 1,2,\ldots,$$
$$U(r,k,n,x) = U(r,k,\phi^{n}(x)),\quad k = 0,1,\ldots,\quad n = 0,1,\ldots,$$

$$U(r,k,n,j,x) = U(r,k,n,x)1_{I(n,j)}(x),$$
$$k = 0,1,\ldots,\ n = 0,1,\ldots,\ j = 0,\ldots,2^n-1$$

定理２．４　Lebesgue の特異関数 $L(r)$ は $r\in(0,1)$ について、$\mathscr{C}(I)$-値解析関数であり、次が成り立つ。

$$\partial^k L(r,x)/\partial r^k = k!\ T(r,k,x),\ k = 0,1,\ldots,$$

３．定理の証明

３．１ 準備

以下§２の記号をもちいる。　また、$\mu(r)$ に関する期待値を $E_r[\ ]$ で表す。$0<r<1$，複素数 ξ に対して

$$Z(r,\xi,0) = 1,$$
$$Z(r,\xi,n) = \prod_{j=0}^{n-1}\{1+2(\xi-r)R\circ\phi^j/(1+(2r-1)R\circ\phi^j)\},\ n = 1,2,\ldots,$$

とおく。　次は容易に示せる。

命題３．１．１　(i) $(1+2R\circ\phi^n/(1+(2r-1)R\circ\phi^n),\mathscr{F}(n+1))$, $n = 0,1,\ldots,$ は $\mu(r)$ に関するマルチンゲール差である。

(ii) $(Z(r,\xi,n),\mathscr{F}(n))$, $n = 0,1,\ldots,$ は $\mu(r)$ に関するマルチンゲールである。

(iii) $0<s<1$ のとき、$(Z(r,s,n),\mathscr{F}(n))$, $n = 0,1,\ldots,$ は $\mu(r)$ に関する正値マルチンゲールであり、$Z(r,s,n)d\mu(r)$ は $d\mu(s)$ に弱収束する。

注意　　$Z(r,s,n)$ は $\mathscr{F}(n)$ 上に制限した $\mu(s)$ の $\mu(r)$ に関する Radom 微分である。　また、マルチンゲール $(Z(r,\xi,n),\mathscr{F}(n))$, $n = 0,1,\ldots,$ は

ξ が実数のときに限り L^1-有界である。

<u>補題３．１．２</u>　(i) $\int_I g\, d\mu(r) = 0$ ならば

$$\int_0^x g\circ\phi^n d\mu(r) = 2^{-n}\prod_{j=0}^{n-1}\{1+(2r-1)R\circ\phi^j(x)\}\int_0^{\phi^n(x)} g\, d\mu(r)$$

(ii) h が $\mathscr{F}(n)$-可測、$E_r[g|\mathscr{F}(n)] = 0$ ならば

$$\int_0^x hg\, d\mu(r) = h(x)\int_0^x g\, d\mu(r)$$

<u>証明</u>　(i) ϕ が $\mu(r)$ に関する保測変換であるから、
$\int_I g\circ\phi^n d\mu(r) = 0$ となり、 $n = 1$ の場合に結果を示せばよい。
$x\in I(1,0)$ のとき、

$$\int_0^x g\circ\phi\, d\mu(r) = \int_{I(1,0)} 1_{[0,\phi(x)]}(\phi(y))\mu(r,dy)$$
$$= r\int_0^{\phi(x)} g\, d\mu(r)$$

$x\in I(1,1)$ のとき、

$$\int_0^x g\circ\phi\, d\mu(r) = \int_{I(1,0)} g\circ\phi\, d\mu(r) + \int_{I(1,1)} g\circ\phi\, d\mu(r)$$
$$= r\int_I g\, d\mu(r) + (1-r)\int_0^{\phi(x)} g\, d\mu(r)$$
$$= (1-r)\int_0^{\phi(x)} g\, d\mu(r)$$

(ii) $x\in I(n,j)$ とし、$I(n,j)$ の左側の区間を J とすると、

$$\int_0^x hg\, d\mu(r) = \int_J hg\, d\mu(r) + \int_{a}^{x} 1_{I(n,j)} hg\, d\mu(r)$$

$$= \int_J h E_r[g|\mathcal{F}(n)] d\mu(r) + h(x)\int_0^x 1_{I(n,j)} g\, d\mu(r)$$

$$= h(x)\int_0^x g\, d\mu(r)$$

3.2　Schauder 基の一般化（定理2.1の証明）

μ を I 上の連続な確率測度で各区間に対し $\mu(J)>0$ を満たすものとする。次の条件を満たす I の分割列 $J(n,j)$, $j = 0,..,k(n)$, $n = 0,1,...,$ を考える。

(i) $J(n,j)$ は $j = k(n)$ 以外すべて半開区間である。

(ii) $J(n+1,j), j=0,..,k(n+1)$, は $J(n,j), j=0,..,k(n)$, の細分である。

(iii) $\lim_{n\to\infty} \max\{ |J(n,j)|; j=0,..,k(n)\} = 0$

更に、

$$\mathcal{G}(n) = \sigma(\ J(n,j); j=0,..,k(n)\ ),\ n = 0,1,...,$$

とおく。

命題3.2.1　$\cup_n \mathcal{G}(n)$ 上の有限加法測度 ν が

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\nu(J)|; 区間\ J \in \cup_l \mathcal{G}(l), \exists J(n,j): J \subset J(n,j)\} = 0$$

を満たすとき、

$$Z(n) = \sum_{j=0}^{k(n)} \nu(J(n,j)) 1_{J(n,j)} / \mu(J(n,j)),\ n = 0,1,...,$$

とおけば、$(Z(n),\mathcal{G}(n))$, $n = 0,1,...,$ は μ に関するマルチンゲールである。

更に、$\int_0^x Z(n)d\mu$ は I 上で一様に連続関数 f に収束し、それは

$$f(0) = 0,$$
$$\nu(J(n,j)) = f(b(n,j)) - f(a(n,j)),\ n = 0,1,\ldots,\ j = 0,\ldots,k(n),$$

を満たす。　ここで、$a(n,j)$, $b(n,j)$ は $J(n,j)$ の端点で $a(n,j)<b(n,j)$ とする。

<u>証明</u>　$x \in J(n+p,j) \subset J(n,i)$ とし、J を $J(n,i) \setminus J(n+p,j)$ の左側の区間とすると、

$$\int_0^x Z(n+p)d\mu - \int_0^x Z(n)d\mu$$
$$= \nu(J) + \nu(J(n+p,j))\mu([0,x] \cap J(n+p,j))/\mu(J(n+p,j))$$
$$- \nu(J(n,i)\mu([0,x] \cap J(n,j))/\mu(J(n,i))$$

だから

$$\left|\int_0^x Z(n+p)d\mu - \int_0^x Z(n)d\mu\right|$$
$\leqq 3\sup\{|\nu(J)|$;区間 $J \in \cup_l \mathcal{G}(l), \exists J(n,j): J \subset J(n,j)\}$.

従って、$\int_0^x Z(n)d\mu$ は I 上で一様収束する。

残りの部分は、$Z(n)$ の定義から容易に示せる。

<u>命題３.２.２</u>　任意の連続関数 f に対して、μ に関するマルチンゲール $(Z(n),\mathcal{G}(n))$, $n = 0,1,\ldots,$ が存在し、$\int_0^x Z(n)d\mu$ は I 上で一様に $f(x) - f(0)$ に収束する。

<u>証明</u>　$\cup_n \mathcal{G}(n)$ 上の有限加法測度 ν を次から定まるものとする。

$$\nu(J(n,j)) = f(b(n,j)) - f(a(n,j)),\ n = 0,1,\ldots,\ j = 0,\ldots,k(n),$$

ここで、$a(n,j)$, $b(n,j)$ は $J(n,j)$ の端点で $a(n,j)<b(n,j)$ とする。
この ν は命題３．２．１の条件を満たすから、マルチンケール $(Z(n),\mathcal{G}(n))$ の存在がいえる。　また、かく $x\in I$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x Z(n)d\mu = 0$$

とすると、

$$\begin{aligned}\int_{J(n,j)} Z(n)d\mu &= \int_{J(n,j)} Z(n+p)d\mu \\ &= \lim_{p\to\infty} \int_{J(n,j)} Z(n+p)d\mu = 0\end{aligned}$$

だから $Z(n) = 0$ μ-a.e., $n = 0,1,\ldots$.　従って、一意性もいえる。

<u>定理３．２．３</u>　$J(n,j)$ が２進分割、すなわち $I(n,j)$ とする。
$f\in\mathcal{C}(I)$ は次のように一意に展開される。

$$(3.2.1)\ f(x) = f(0) + (f(1)-f(0))L(\mu,x) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k(n)} c(\mu,f,n,j)S(\mu,n,j,x),$$

ここで、右辺は一様収束の意味であり、

$$L(\mu,x) = \mu([0,x]),$$

$$S(\mu,n,j,x) = \int_0^x \{1_{I(n+1,2j)}/\mu(I(n+1,2j)) - 1_{I(n+1,2j+1)}/\mu(I(n+1,2j+1))\}d\mu,$$

$$n = 0,1,\dots,\ j = 0,1,\dots,2^n-1.$$

$$\begin{aligned} c(\mu,f,n,j) &= f((2j+1)2^{-n-1}) \\ &\quad - \{\mu(I(n+1,2j+1))f(j2^{-n}) \\ &\qquad - \mu(I(n+1,2j))f((j+1)2^{-n})\}/\mu(I(n,j)), \end{aligned}$$

$$n = 0,1,\dots,\ j = 0,1,\dots,2^n-1.$$

<u>証明</u>　命題３．２．２から f に対応するマルチンゲールを $(Z(n),\mathcal{F}(n))$，有限加法的測度を ν とする。　このとき、

$$\int_0^x Z(0)d\mu = \int_0^x \nu(I)/\mu(I)d\mu = (f(1)-f(0))L(\mu,x),$$

$$\begin{aligned} &\int_0^x (Z(n+1)-Z(n))d\mu \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1}\int_0^x \{\nu(I(n+1,2j))1_{I(n+1,2j)}/\mu(I(n+1,2j)) \\ &\qquad + \nu(I(n+1,2j+1))1_{I(n+1,2j+1)}/\mu(I(n+1,2j+1))\}d\mu \\ &\qquad - \nu(I(n,j))1_{I(n,j)}/\mu(I(n,j))\}d\mu \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1}[\{\mu(I(n+1,2j+1))\nu(I(n+1,2j))1_{I(n+1,2j)} \\ &\qquad - \mu(I(n+1,2j))\nu(I(n+1,2j+1))\}/\mu(I(n,j))]\cdot \\ &\qquad \int_0^x\{1_{I(n+1,2j)}/\mu(I(n+1,2j)) \\ &\qquad\quad - 1_{I(n+1,2j+1)}/\mu(I(n+1,2j+1))\}d\mu \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} c(\mu,f,n,j)S(\mu,n,j,x) \end{aligned}$$

だから、f は (3.2.1) の様に展開される。　また、一意性は、命題３．２．２の一意性から容易に示せる。

定理３．２．３において、$\mu = \mu(r)$ のときが、定理２．１である。 実際、

$$c(\mu(r),f,n,j) = c(r,f,n,j)$$

であり、補題３．１．２より

$$\begin{aligned}
&S(\mu(r),n,j,x)\\
&= \int_0^x \{(1_{I(n+1,2j)}/r)-(1_{I(n+1,2j+1)}/(1-r))\}d\mu(r)/\mu(I(n,j))\\
&= \int_0^x 2R\circ\phi^n/\{1+(2r-1)R\circ\phi^n\}d\mu(r)1_{I(n,j)}(x)\cdot\\
&\qquad \prod_{j=0}^{n-1}\{2/(1+(2r-1)R\circ\phi^j(x))\}\\
&= S(r,n,j,x),\ n = 0,1,\ldots,\ j = 0,1,\ldots,2^n-1.
\end{aligned}$$

３．３ Sidon 型の定理（定理２．２の証明）

<u>命題３．３．１</u> 各 $x\in I$ で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)S(r,n,x)$$

が収束するならば、$\sum_{n=0}^{\infty} |c(n)| < \infty$.

<u>証明</u> $a\in I$ を次のように定める。

$$\begin{aligned}
c(n) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \phi^n(a)\in I(2,0)\cup I(2,3)\\
c(n) \geqq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \phi^n(a)\in I(2,1)\cup I(2,2)
\end{aligned}$$

このとき、$\phi^n(1-x) = 1-\phi^n(x)$ に注意すると、

$c(n)\{S(r,n,a)-(1+(2r-1)R\circ\phi n(a))/2\} > 0,$

$c(n)\{S(r,n,1-a)-(1+(2r-1)R\circ\phi n(1-a))/2\} > 0,\ n = 0,1,\ldots,$

だから

(3.3.1) $c(n)\{S(r,n,a) + S(r,n,1-a)\} \geqq c(n),\ n = 0,1,\ldots$

$\delta>0$ とし

$N(\delta) = \{ n; |S(r,n,a)-(1+(2r-1)R\circ\phi^n(a))/2|<\delta$ または

$|S(r,n,1-a)-(1+(2r-1)R\circ\phi^n(1-a))/2|<\delta \}$

とおくと、

(3.3.2) $c(n)\{S(r,n,a) + S(r,n,1-a)\} \geqq 2\delta|c(n)| + c(n),\ n \notin N(\delta)$

更に、$\delta>0$ を十分小さくとると

(3.3.3) $i,\ j \in N(\delta),\ i\neq j$ ならば $|i - j|\geqq 3$

また 1/3 が ϕ の周期２の周期点であることから、

(3.3.4) $f(1/3) + f(2/3) = \Sigma\ c(n)\{S(r,1/3) + S(r,2/3)\}$

従って (3.3.1),(3.3.2),(3.3.4) により

$$f(a) + f(1-a)$$
$$\geqq 2\delta \sum_{n\notin N(\delta)} |c(n)| +\{f(1/3)+f(2/3)\}/\{S(r,1/3)+S(r,2/3)\}$$

だから

(3.3.5) $\displaystyle\sum_{n\notin N(\delta)} |c(n)| < \infty$

(3.3.3) より、次の条件 (i),(ii) を満たすように $b\in I$ を定めることができる。

(i) $n\in N(\delta)$ のとき、

$c(n) < 0 \Leftrightarrow \phi^n(a) \in I(2,0) \cup I(2,3)$

$c(n) \geqq 0 \Leftrightarrow \phi^n(a) \in I(2,1) \cup I(2,2)$

(ii) $\phi^n(b), \phi^{n+1}(b) \in I(2,0) \cup I(2,3) \Rightarrow \phi^{n+2}(b) \in I(2,1) \cup I(2,2)$

条件（ii）より、1/4, 3/4 は $\{\phi^n(b); n=0,1,...\}$, $\{\phi^n(1-b); n=0,1,...\}$ の極限点とならないから、十分小さな $\eta>0$ をとれば、

$$|S(r,n,b)-(1+(2r-1)R\circ\phi^n(b))/2|>\eta,$$
$$|S(r,n,1-b)-(1+(2r-1)R\circ\phi^n(1-b))/2|>\eta, \quad n = 0,1,...,$$

を満たすようにでき、更に条件（i）を用いて、

$$c(n)\{S(r,n,b) + S(r,n,1-b)\} \geqq 2\eta|c(n)| + c(n), \quad n \in N(\delta)$$

とできる。　従って、(3.3.5) に注意すれば、結論を得る。

上の命題から、定理２．２の前半がいえる。　次に、

$$E = \{ f \in \mathscr{C}(I); 各\ c(r,f,n,j)\ は\ j\ に無関係 \},$$
$$\ell = \{ (d(n))_{n=0,1,...}; \Sigma|d(n)| < \infty \}$$

とおく。　E は一様ノルムで Banach 空間であり、

$$(d(n))_n \longmapsto d(0)+d(1)L(r,x)+\Sigma\ d(n+2)S(r,n,x)$$

で与えられる、ℓ から E への連続線形写像は、定理２．１より単射であり、命題３．３．１より全射となる。　従って、Banach の定理より定理２．２の後半もいえる。

３．４　畑－山口の公式の一般化（定理２．４の証明）

<u>補題３．４．１</u>　$0<r<1$, $D = \{ \xi$：複素数 $;|\xi|<1, |\xi-1|<1 \}$ とし、

$$F(r,\xi,n,x) = \int_0^x Z(r,\xi,n)d\mu(r),\quad \xi\in D,\ x\in I,\ n = 0,1,\ldots,$$

とおくとき、次が成り立つ。

(i) $\sup\{\ |F(r,\xi,n,x)|;x\in I\ \}$
$\leqq 1 + |\xi-r|/\{1-\max(|\xi|,|\xi-1|)\}$, $n=0,1,\ldots,$

(ii) 各 r, n に対して、$F(r,\xi,n)$ は D 上の $\mathscr{C}(I)$-値解析関数で、$n\to\infty$ としたとき広義一様収束する。
従って、$\partial^k F(r,\xi,n)/\partial\xi^k$, $k=1,2,\ldots,$ も D 上で $n\to\infty$ としたとき広義一様収束する。

<u>証明</u>　(i) 補題３．１．２から

$$\begin{aligned}&F(r,\xi,n+1,x)\\&= F(r,\xi,n,x) + \int_0^x Z(r,\xi,n)2(\xi-r)R\circ\phi^n/\{1+(2r-1)R\circ\phi^n\}d\mu(r)\\&= F(r,\xi,n,x) + 2^{-n}\prod_{j=0}^{n-1}\{1+(2\xi-1)R\circ\phi j(x)\}\cdot\\&\qquad\int_0^{\phi^n(x)} 2(\xi-r)R/\{1+(2r-1)R\}d\mu(r)\end{aligned}$$

だから

$$|F(r,\xi,1,x)|\leqq 1 + |\xi-r|,$$
$$|F(r,\xi,n+1,x)|\leqq|F(r,\xi,n,x)| + |\xi-r|\max(|\xi|,|\xi-1|)$$

従って、

$$|F(r,\xi,n,x)|\leqq 1 + |\xi-r|/\{1-\max(|\xi|,|\xi-1|)\}$$

(ii) 補題３．１．２から

$$F(r,\xi,n+1,x) - F(r,\xi,n,x)$$
$$= 2^{-n}\prod_{j=0}^{n-1}\{1+(2\xi-1)R\circ\phi^{j}(x)\}\int_{0}^{\phi^{n}(x)}\{Z(r,\xi,1)-1\}d\mu(r)$$

だから，(i) を用いて

$$|F(r,\xi,n+1,x) - F(r,\xi,n,x)|$$
$$\leqq \max(|\xi|,|\xi-1|)n[2 + |\xi-r|/\{1-\max(|\xi|,|\xi-1|)\}]$$

補題３．４．２

$$D(r,k,n,x)$$
$$= \sum_{0\leqq i_1<i_2<..<i_k\leqq n}\int_{0}^{x}\prod_{l=1}^{k}\{2R\circ\phi^{i_l}/(1+(2r-1)R\circ\phi^{i_l})\}d\mu(r),$$
$$k = 1,2,\ldots,\ n = 0,1,\ldots,$$

とおくとき、次が成り立つ。

(i) $\|T(r,k)\|_{\infty} \leqq \{1-\max(r,1-r)\}^{-k},\ k = 0,1,\ldots,$

(ii) $\|T(r,k)-D(r,k,n)\|_{\infty} \leqq \mathrm{Const}(k)n^{k}\max(r,1-r)^{n},\ k = 1,2,\ldots$

証明 (i) は容易に示せる。 補題３．１．２を用いて計算すると、

$$|T(r,1,x)-D(r,1,n,x)|\leqq \max(r,1-r)^{n+1}/\{1-\max(r,1-r)\},$$
$$|T(r,k+1,x)-D(r,k+1,n,x)|$$
$$\leqq \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}2^{-j}\prod_{l=0}^{j-1}\{1+(2r-1)R\circ\phi^{l}(x)\}U(r,k,j,x)\right|$$
$$+ \left|\sum_{j=0}^{n}2^{-j}\prod_{l=0}^{j-1}\{1+(2r-1)R\circ\phi^{l}(x)\}R\circ\phi^{j}(x)\cdot\right.$$
$$\left.\{T(r,k,\phi^{j+1}(x))-D(r,k,n-j-1,\phi^{j+1}(x))\right|$$

$$\leqq \max(r,1-r)^{n+1} \| T(r,k) \|_{\infty} / \{1-\max(r,1-r)\}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \mathrm{maxd}(r,1-r)^{j} \| T(r,k)-D(r,k,n-j-1) \|_{\infty}$$

となり、（ii）を得る。

命題３．１．１と補題３．４．１より、

$$\partial^{k} L(r,x)/\partial r^{k} = \lim_{n\to\infty} k!\ D(r,k,n,x)$$

だから、補題３．４．２から定理２．４を得る。

参考文献

[1] M.Hata and M.Yamaguti,The Takagi function and its generalization. Japan J.Appl.Math.,1(1984),183-199.