数理解析研究所講究録
706巻 1989年 124-127

MartingaleのL^p－normに関するGilatの評価について

富山大 理　菊池 万里 (Masato kikuchi)

D. Gilat [5] によれば、一様可積分な martingale $X=(X_t)$のH^1-norm と L^p-normの間に、つぎの不等式が成り立つ。

$$\|X^*\|_1 \leqq \Gamma(q+1)^{1/q}\|X_\infty\|_p \qquad (p^{-1}+q^{-1}=1)$$

実は、定数$\Gamma(q+1)^{1/q}$はbest possibleな値である。$E[X_\infty \log^+ X_\infty]<\infty$ ならば$X\in H^1$であり、逆は成立しないことを思い起こせば上の不等式は納得しやすい。この不等式を導く際に用いられる Blackwell－Dubins の分布不等式は、$X^*=\sup_n|X_n|$の分布を直接に評価するもので、他のmartingale不等式を考察する際にも大変有効である。

先ず記号を定義する。R 上の確率法則μに対し、区間]0,1[上で定義された減少関数で（Lebesgue測度に関する）分布がμとなるものを f_μ と書く。このような f_μ はすべてのμに対して本質的に一意に定まる。（$f_\mu=\inf\{s\in R: \mu(]-\infty,s])>1-t\}$）また、$f_\mu^*$をつぎのように定義する。

$$f_\mu^*(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f_\mu(s)\,ds$$

f_μ は減少であることに注意すれば f_μ^* はその最大関数であることがわかる。

<u>定理1</u>（Blackwell-Dubins [2]）

$X=(X_t)$ を一様可積分なmartingaleとする。X_∞, $|X_\infty|$の分布をそれぞれμ, ν

とする。このとき、

(1) $P\{\sup_t X_t > \lambda\} \leqq m\{s \in]0,1[: f_\mu(s) > \lambda\}$ for every $\lambda > 0$

(2) $P\{\sup_t |X_t| > \lambda\} \leqq m\{s \in]0,1[: f_\nu(s) > \lambda\}$ for every $\lambda > 0$

ここにmは]0,1[上のLebesgue測度である。

定理2 (Dubins-Gilat [3])

有限な平均を持つdistribution μ に対し、ある確率空間 (Ω, F, P) 上に $X_\infty \underset{d}{\simeq} f_\mu$, $\sup_t X_t \underset{d}{\simeq} f_\mu^*$ なる一様可積分なmartingale $X=(X_t)$ が存在する。

定理1の証明はつぎの事実を使うと簡単である。

補題：区間]0,1[上の $0 \leqq \phi \leqq 1$ なる可測関数 ϕ と減少関数 f に対し

$$\int_0^1 f(t)\phi(t)\,dt \leqq \int_0^a f(t)\,dt \quad \text{where} \quad a = \int_0^1 \phi(t)\,dt$$

(定理1の証明) (1)、(2)とも同様であるから(1)のみ示す。先ず $A \in F$ に対し$\mathbb{R}$上の可測関数 $\phi(x)$ を $\phi(X_\infty) = P(A \mid X_\infty)$ となるようにとる。

$$E[X_\infty : A] = E[X_\infty \phi(X_\infty)] = \int_0^1 f_\mu(t)\,\phi(f_\mu(t))\,dt \leqq \int_0^{P(A)} f_\mu(t)\,dt$$

ここで最後の不等式は補題と $\phi \circ f_\mu$ の]0,1[上での積分が $P(A)$ であることによる。特に $A = \{\sup_t X_t > \lambda\}$ とすれば、Doobの不等式と上の不等式より

$$\lambda P(A) \leqq \int_0^{P(A)} f_\mu(t)\,dt \qquad \therefore \quad \lambda \leqq f_\mu^*(P(A))$$

従って $P(A) \leqq \sup\{t \in]0,1[: f_\mu^*(t) > \lambda\} = m\{t \in]0,1[: f_\mu^*(t) > \lambda\}$ □

定理２の性質をみたすmartingaleは Duins-Gilat の他にも Azema-Yor [1]によって構成されている。それはBrown運動を適当にstopして得られるもので大変興味深いが、細かい計算を必要とするので、ここではDubins-Gilatの例をあげておく：

$\Omega =]0, 1[$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{B}(]0, t[), [t, 1[)$, P = the Lebesgue measure on Ω

とし、
$$X_t(\omega) = f_\mu(1-\omega) I_{]0, t[}(\omega) + f_\mu^*(1-t) I_{[t, 1[}(\omega)$$

とおけばよい。

Duins-GilatはDoobの不等式 $\| X^* \|_p \leqq q \| X_\infty \|_p$ の定数 q が最良であることを示すために定理２を用いた。実際、区間]0 ,1[上で $f(t) = t^{-1/p}$ とし $X_\infty \simeq f$, $\sup_t X_t \simeq f$ となるmartingale $X = (X_t)$をとれば、（X:non-negative に注意して）

$$\| X^* \|_{p'} \leqq q \| X_\infty \|_{p'}, \qquad p' < p$$

であることがわかる。

つぎに、この報告の最初にあげた不等式と $L \log^+ L$ タイプのDoobの不等式への応用をあげておこう。

<u>定理３</u>（D. Gilat [5] ）

任意のmartingale $X = (X_t)$に対し、つぎが成立：

$$(3) \quad \| X^* \|_1 \leqq \Gamma(q+1)^{1/q} \| X_\infty \|_p \qquad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

定数 $\Gamma(q+1)^{1/p}$は最良である。

これはつぎの不等式の言い換えである：f を減少関数とすると

$$\int_0^1 f^*(t)\,dt = \int_0^1 f(t) \log t^{-1}\,dt \leqq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 \log\, t^{-q} dt \right)^{1/q} = \Gamma(q+1)^{1/q} \| f \|_p$$

この不等式は $g(t) = C(\log t^{-q})$のときに限り等号が成立する。したがって $X_\infty \simeq g$, $\sup_t X_t \simeq g^*$ となる(positive) martingale $X = (X_t)$にたいして(3)は等式になる。

定理４　(D. Gilat [4])

c_0をつぎの方程式の根とする。 $e^{-c_0} = (c_0 - 1)^2$: $c_0 \fallingdotseq 1.487 < 1.582 \fallingdotseq e/(e-1)$

$$E[X^*] \leqq c_0(1 + E[|X_\infty| \log^+ |X_\infty|])$$

がすべての$X = (X_t)$に対して成立し、等号の成り立つようなmartingaleも存在する。

証明には

$$\int_0^1 f^*(t)dt \leqq c_0 \left(1 + \int_0^1 |f(t)| \log^+ |f(t)| dt\right)$$

を示せばよいが、これも初等的な計算である。等号を与える関数は $g(t) = e^{-1/c_0} \vee 1$ である。

参考文献

[1] J. Azéma et M. Yor, Une solution simple au problème de Skorokhod, Séminaire de Prob. XIII, Lcture Notes in Math. 721, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1978), 90-115

[2] D. Blackwell and L. E. Dubins, A converse to the dominated convergence theorem, Illinoi J. Math. 7 (1963), 508-514

[3] L. E. Dubins and D. Gilat, On the distribution of maxima of martingales, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 337-338

[4] D. Gilat, The best bound in the $L \log L$ inequality of Hardy & Littlewood and its martingale counterpart, Proc. Amer. Math. 97 (1986), 429-436

[5] D. Gilat, On the ratio of the expected maximum of a martingale and the L_p-norm of its last term. Israel J. Math. 63 (1988) 270-280