数理解析研究所講究録
706 巻 1989 年 110-123

一次元トーラス上のある関数空間の作用関数について

山形大理　佐藤圓治 (Enji Sato)

1. 序　$\mathbb{T}$を一次元トーラス(unit circle), $C(\mathbb{T})$を$\mathbb{T}$上の連続関数のなすバナッハ代数、$A(\mathbb{T})$を絶対収束するフーリェ係数をもつ$C(\mathbb{T})$の元全体とする。よく知られているように$A(\mathbb{T})$は、$\mathbb{Z}$上の絶対収束する数列空間と同型なバナッハ代数になる。$\mathbb{T}$又は局所コンパクトアーベル群上の種々のバナッハ代数の作用関数の研究([2],[10],[11],[12]等)は、$A(\mathbb{T})$のY. Katznelsonによる作用関数の研究[5]から盛んになったように思われる。ここで扱う関数空間は、1962年、Y. Katznelson [7]が導入したstrongly homogeneous Banach algebraである。これの作用関数については、Y. Katznelson, P. Malliavin, M. Zafran等の研究があったが、1979年、G. Pisier [9]が、ある意味でBestと思われる研究を発表した。ここでは、大まかに、Y. Katznelson, M. Zafranの結果をふりかえった後で、G. Pisierの結果を紹介する。

2. Y. Katznelson, M. Zafran の結果。

定理 1 (N. Wiener 1932)

$f \in A(\mathbb{T}),\ f(t) \neq 0\ (^\forall t \in \mathbb{T}) \Rightarrow \frac{1}{f} \in A(\mathbb{T})$

定理 2 (N. Wiener – P. Lévy 1934)

$f \in A(\mathbb{T})$, F : f の range で analytic $\Rightarrow F \circ f \in A(\mathbb{T})$

定義 $C(\mathbb{T}) \supset B_1, B_2$ Banach space, F の domain $\subset \mathbb{R}$.

F が B_1 から B_2 に作用する

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f \in B_1$, f の range $\subset$ F の domain $\Rightarrow F \circ f \in B_2$

そこで $B_1 = B_2$ のときは、単に F は B_1 に作用するという。

◎ Y. Katznelson は、定理 2 の逆として次を得た。

定理 3 ([5])

(1) $B\ (\subset C(\mathbb{T}))$ を self-adjoint, regular, Banach algebra with unit, B の極大イデアル空間を $\mathbb{T}$ とする。このとき、$F(t) = \sqrt{t}\ (0 \leqq t \leqq 1)$ が B に作用すれば、$B = C(\mathbb{T})$ である。

(2) $F : [-1, 1] \longmapsto \mathbb{C}$ とする。このとき、F が $A(\mathbb{T})$ に作用すれば、F は $[-1, 1]$ の近傍で analytic である。

特に、F が $A(\mathbb{T})$ に作用する必要十分条件は、$[-1, 1]$ の近傍で analytic であることである。

(注意) 定理 3 の (2) の証明のポイントは、

$$\sup\{\|e^{if}\|_{A(\mathbb{T})}\ ;\ \|f\|_{A(\mathbb{T})} \leqq r,\ f : \text{real}\} = e^r$$

を示すことである。

その後、(1)は、次のように改良される。

定理4 ([6])

$B(\subset C(\mathbb{T}))$ を self-adjoint, regular, Banach algebra with unit. B の極大イデアル空間は $\mathbb{T}$ とする。F を $[-1,1]$ 上の関数で、$F(0)=0$, $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \infty$ とする。もし F が、B に作用すれば、$B = C(\mathbb{T})$ となる。

◎ 定理3 の(2)のその後として次の問題がある。([16; P.154])

「問題. K を $\mathbb{T}$ の閉集合。$A(K)$ を $A(\mathbb{T})$ の元を K に制限したバナッハ代数とする。このとき、$C(K)$ を K 上の連続関数空間とすれば、$A(K) = C(K)$ 又は、$A(K)$ の作用関数は、analytic になるか?」 なお、K が、正のルベーグ測度をもつ時、$A(K)$ の作用関数は、analytic となることが知られている。

さて、1962年、Y. Katznelson [7] は、上の問題の類似を考え、strongly homogeneous の概念を導入したと思われる。

定義 $C(\mathbb{T}) \supsetneqq B \supsetneqq A(\mathbb{T})$

B : strongly homogeneous

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $f \in B \Rightarrow \bar{f} \in B$ ($\bar{f}$ は、f の complex conjugate)

(2) $\forall a \in \mathbb{T}$, $B \ni f(x) \mapsto f(x+a) \in B$ isometry

(3) $\forall f\in B$, $\lim_{a\to 0}\|f(x+a)-f(x)\|_B=0$

(4) $k\in\mathbb{Z}$, $B\ni f(x)\longmapsto f(kx)\in B$ isometry

そして、彼は、次の問題を提起した。

『問題. $A(\mathbb{T})\subseteq B\subsetneq C(\mathbb{T})$ なる strongly homogeneous なバナッハ代数の作用関数は、analytic か？』

<u>定理5</u>（[8]）

以下の性質を満たす strongly homogeneous Banach algebra B が存在する。 (a) $A(\mathbb{T})\subsetneq B\subsetneq C(\mathbb{T})$, (b) $[-1,1]$ で定義された non analytic ft が存在して、$A(\mathbb{T})$ から B に作用する。

1978年, M. Zafran は、上の問題に対して否定的な次の結果を得た。

<u>定理6</u>（[13]）

次の性質を持つ strongly homogeneous Banach algebra B が存在する。(a) $A(\mathbb{T})\subsetneq B\subsetneq C(\mathbb{T})$, (b) $[-1,1]$ で定義された non analytic ft が存在して、B に作用する。

（注意）上の B の作り方は、大体次のようになる。$\mathcal{P}$ を $\mathbb{T}$ 上の三角多項式全体。$\psi\in\mathcal{P}$ に対して、$\psi=\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k$, $\|\psi_k\|_\infty\leqq 1$, $\psi_k\in\mathcal{P}$ の表現を考え、$\|\psi\|=\inf_{\text{上の表現}}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\log(\|\psi_k\|_{A(\mathbb{T})}+e^2)$ とおくと、$\|\psi\|_\infty\leqq\|\psi\|\leqq 3\|\psi\|_{A(\mathbb{T})}$ となり B を $\mathcal{P}$ の $\|\cdot\|$ による完備化とする。このとき、

$$\sup\{\|e^{ir\psi}\|_B \,;\, \|\psi\|_B \leqq 1,\ \psi\,;\text{real}\} \leqq 6|r|^{\frac{3}{2}} e^{5|r|^{\frac{1}{2}}} \quad (|r|\geqq 1)$$

が成立する。

M.Zafranは、補間空間の議論を使って1979年に上の結果を改良して次を得た。

定理7 ([14])

次の性質をもつ strongly homogeneous Banach algebra B が存在する。 (a) $A(\mathbb{T}) \subsetneqq B \subsetneqq C(\mathbb{T})$，(b) $[-1,1]$で定義された3回連続微分可能な関数が存在して、Bに作用する。

(注意) 上の証明の中で、

$$\sup\{\|e^{ir\psi}\|_B \,;\, \|\psi\|_B \leqq 1,\ \psi : \text{real}\} \leqq C|r|^2 \quad (|r|\geqq 1)$$

を示している。

3. G.Pisier の結果。

M.Zafran [14] のすぐ後に、G.Pisier [9] は、次の結果を発表した。

定理8 次の性質をもつ strongly homogeneous Banach algebra B が存在する， (a) $A(\mathbb{T}) \subsetneqq B \subsetneqq C(\mathbb{T})$, (b) $[-1,1]$ で定義された Lip 1 の関数が存在して、Bに作用する。

(注意) この結果は、定理4と比較すると作用関数がLipになるものでは、Bestのものになっている。

以下このBについてのべる。

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ を確率空間とし以下はその上の確率変数を考える。

<u>定義</u> $\tilde{g}$: complex Gaussian random variable

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ◦ $\tilde{g} = g_1 + i g_2$ であって g_1, g_2 は real random variable で、共に平均 0、分散 $\frac{1}{2}$ のGauss分布に従う。

◦ g_1, g_2 は independent random variable である。

次に $\{\tilde{g}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を complex Gaussian random variableの列であって $\{\mathrm{Re}\,\tilde{g}_n, \mathrm{Im}\,\tilde{g}_n\}_n$ の全体が independent random variable とする。

<u>定義</u>

$C_{a.s}(\mathbb{T}) \underset{\text{def}}{=} \{f \in L^2(\mathbb{T})$; $a.a.\ \omega \in \Omega$ について $\sum_n \tilde{g}_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}$ は、ある連続関数の Fourier級数である。$\}$

（注意）

$f \in C_{a.s}(\mathbb{T})$ なる必要十分条件は、$a.a.\ \omega \in \Omega$ について三角級数 $\sum_n \tilde{g}_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}$ の $(C, 1)$ 平均が一様収束することである。従って [4 ; P.48, Prop.1] より、$f \in C_{a.s}(\mathbb{T})$ なる必要十分条件は、$a.a.\ \omega \in \Omega$ について三角級数 $\sum_n \tilde{g}_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}$ が $\mathbb{T}$ 上で一様収束することである。

さて $f \in C_{a.s}(\mathbb{T})$ に対して

$Z_t(\omega) = \sum_n \mathrm{Re}(\xi_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int})$ とおくと、$\{Z_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は、平均0の Gaussian process となる。[3] により、$E\sup_t|Z_t(\omega)| < +\infty$ であるから、$E\|\sum_n \xi_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}\|_\infty < +\infty$ となる。そこで $\{f\} \underset{\mathrm{def}}{=} E\|\sum \xi_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}\|_\infty$ とおくと次のことがいえる。

補題 1

(1) $C_{a.s}(\mathbb{T})$ は、norm $\{\cdot\}$ で Banach space になる。

(2) $\forall a\in\mathbb{T}$, $C_{a.s}(\mathbb{T})\ni f(x)\longmapsto f(x+a)\in C_{a.s}(\mathbb{T})$ は、isometry。

(3) $f\in C_{a.s}(\mathbb{T}) \Rightarrow \bar{f}\in C_{a.s}(\mathbb{T})$

(4) $k\in\mathbb{Z}$, $f(x)\longmapsto f(kx)$ は、isometry。

(5) $\lim_{a\to 0}\{f(x)-f(x+a)\} = 0$.

そこで、$B = C(\mathbb{T})\cap C_{a.s}(\mathbb{T})$ とおき、$f\in B$ に対して、$|||f||| \underset{\mathrm{def}}{=} 90\sqrt{2}\|f\|_\infty + \{f\}$ を定義すれば、$(B, |||\cdot|||)$ が定理8における求めるBとなる。($90\sqrt{2}$ は Pisier の論文とちがう定数で、筆者の計算による。)

補題 2

(1) B は、norm $|||\cdot|||$ で Banach space になる。

(2) B は、strongly homogeneous である。

(3) $A(\mathbb{T}) \subsetneqq B \subsetneqq C(\mathbb{T})$.

証明。(1), (2) は、補題 1 より。(3)を示す。

$f\in A(\mathbb{T})$ なら、

$$\langle f \rangle = E \| \sum \tilde{g}_n \hat{f}(n) e^{int} \|_\infty$$
$$\leqq \sum E |\tilde{g}_n| |\hat{f}(n)|$$
$$\leqq \sum |\hat{f}(n)| = \|f\|_{A(\mathbb{T})}.$$

また、$\{a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^{1+\varepsilon}}\}_{n=2}^{\infty} (0<\varepsilon<\frac{1}{2})$ とおくと、Salem-Zygmund の条件 $\sum a_n^2 \log^{1+\varepsilon} n < +\infty$ を満たすから、適当な十一の選択により $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nt$ が $\mathbb{T}$ 上一様収束するようにできる。([1; P.331]) ところが [4; P.93] より上の f について $\sum_n \tilde{g}_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}$ は、a.a. ω について非有界関数の Fourier 級数となる。よって $f \notin B$, $f \in C(\mathbb{T})$。

一方、$\{a_n = \frac{1}{n \log n}\}_{n=2}^{\infty}$ とおくと $f(t) = \sum a_n \sin nt$ は $\mathbb{T}$ 上一様収束する。([15; P.182]) しかるに、[4; P.84] と $C_{a.s}(\mathbb{T})$ の定義のあとの(注意)より $\sum \tilde{g}_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}$ は、a.a. ω で一様収束する。よって $f \notin A(\mathbb{T})$, $f \in B$.

q.e.d.

従って定理8を示すには、次の命題をいえばよい。

命題3

(1) B は、pointwise multiplication で Banach algebra である。

(2) $\mathrm{Lip}\ 1$ の関数が B に作用する。

定義　$f \in L^2(\mathbb{T})$, $f_t(x) = f(x+t)$

$$\tilde{X}_t(\omega) \underset{\text{def}}{=} \sum \tilde{g}_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}$$

さらに、$\{\tilde{g}_n\}$ を complex Gaussian random variable の列で、$\{\mathrm{Re}\,\tilde{g}_n, \mathrm{Im}\,\tilde{g}_n, \mathrm{Re}\,\tilde{g}'_n, \mathrm{Im}\,\tilde{g}'_n\}_n$ が independent random variable になるものとする。

そして、$\tilde{X}'_t(\omega) = \sum \tilde{g}'_n(\omega)\hat{f}(n)e^{int}$,

$X_t(\omega) = \mathrm{Re}\,\tilde{X}_t(\omega) + \mathrm{Im}\,\tilde{X}'_t(\omega)$ とおく。

補題 4 (Slepian's lemma) ([3])

$f, h \in L^2(\mathbb{T})$, f と X_t, h と Y_t を上の定義のように対応させる。もし、$\forall t, s \in \mathbb{T}$ に対し、

$E|Y_t - Y_s|^2 \leqq E|X_t - X_s|^2$ ならば、

$$E \sup_t Y_t \leqq E \sup_t X_s$$

が、成立する。

補題 5　$f \in B$ とし、f と X_t が定義のように対応しているとする。このとき、次が成立。

(1) $E|X_t - X_s|^2 = \|f_t - f_s\|_2^2$

(2) $E \sup_t X_t \leqq 2\{f\}$

(3) $\{f\} \leqq 4E \sup_t X_t + \|f\|_2$

証明.

(1): $\{\tilde{g}_n, \tilde{g}'_n\}$ のとり方より、

$$E|X_t - X_s|^2 = E|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|^2 = \|f_t - f_s\|_2^2$$

(2):
$$\begin{aligned} E\sup_t X_t &= E \sup_t (\mathrm{Re}\,\tilde{X}_t + \mathrm{Im}\,\tilde{X}'_t) \\ &\leqq E \sup_t \mathrm{Re}\,\tilde{X}_t + E \sup_t \mathrm{Im}\,\tilde{X}'_t \end{aligned}$$

$$\leqq 2E\sup|\tilde{X}_t| = 2\{f\}$$

(3): $E\sup_t|\tilde{X}_t-\tilde{X}_0| \leqq E\sup_t|Re(\tilde{X}_t-\tilde{X}_0)| + E\sup_t|Im(\tilde{X}'_t-\tilde{X}'_0)|$

ここで $X_t - X_0 = Re(\tilde{X}_t-\tilde{X}_0) + Im(\tilde{X}'_t-\tilde{X}'_0)$ より

$$E\sup_t|\tilde{X}_t-\tilde{X}_0| \leqq 2E\sup_t|X_t-X_0|$$

$$\leqq 4E\sup_t X_t$$

$\therefore E\sup|\tilde{X}_t-\tilde{X}_0| \leqq 4E\sup_t X_t$

$\therefore \{f\} = E\sup|\tilde{X}_t| \leqq 4E\sup_t X_t + E|\tilde{X}_0|$

$$\leqq 4E\sup_t X_t + \|f\|_2$$

q.e.d.

補題 6　$f, h \in L^2(\mathbb{T})$, $\|h_t - h_s\|_2 \leqq \|f_t - f_s\|_2$

とする。このとき、次が成立。

(i) $f \in C_{a,s}(\mathbb{T}) \Longrightarrow h \in C_{a,s}(\mathbb{T})$

(ii) $\{h\} \leqq 8\{f\} + \|h\|_2$

証明。f と X_t, h と Y_t を前のように対応させると、

$X_t = Re\tilde{X}_t + Im\tilde{X}'_t$, $Y_t = Re\tilde{Y}_t + Im\tilde{Y}'_t$ である。

このとき、$E|Y_t - Y_s|^2 = \|h_t - h_s\|_2^2$, $E|X_t - X_s|^2$

$= \|f_t - f_s\|_2^2$ で、仮定より $E|Y_t-Y_s|^2 \leqq E|X_t-X_s|^2$

であるから、補題 4 より $E\sup Y_t \leqq E\sup X_t$。

よって 補題 5 から $f \in C_{a,s}(\mathbb{T})$ なら $h \in C_{a,s}(\mathbb{T})$ で

$$\{h\} = E\sup|\tilde{Y}_t| \leqq 4E\sup Y_t + \|h\|_2$$

$$\leqq 4E\sup X_t + \|h\|_2$$

$$\leqq 8\{f\} + \|h\|_2$$

q.e.d.

補題 7

(1) $f \in C_{a,s}(\mathbb{T})$, f に X_t が対応しているとする。
このとき、$\|f\|_2 \leqq \sqrt{2\pi}\{f\}$ が成立。

(2) $f, h \in C_{a,s}(\mathbb{T})$, $|\hat{h}(n)| \leqq |\hat{f}(n)|$ $(n \in \mathbb{Z})$ ならば、
$\{h\} \leqq 11\{f\}$ である。

証明。

(1): X_t が平均 0, 分散 $\|f\|_2^2$ の分布に従うから。

(2): 仮定より $\|h_t - h_s\|_2 \leqq \|f_t - f_s\|_2$

補題6より $\{h\} \leqq 8\{f\} + \|h\|_2 \leqq 8\{f\} + \sqrt{2\pi}\{f\} \leqq 11\{f\}$

q.e.d.

命題 3の証明

(1): $f, h \in B$, $t, s \in \mathbb{T}$ とする。

$$\|(fh)_t - (fh)_s\|_2$$

$$\leqq \|f\|_\infty \|h_t - h_s\|_2 + \|h\|_\infty \|f_t - f_s\|_2$$

ここで、$\hat{k}(n) = (2\|f\|_\infty^2 |\hat{h}(n)|^2 + 2\|h\|_\infty^2 |\hat{f}(n)|^2)^{\frac{1}{2}}$,
$k \in L^2(\mathbb{T})$ とおくと、

$$\|f\|_\infty \|h_t - h_s\|_2 + \|h\|_\infty \|f_t - f_s\|_2 \leqq \|k_s - k_t\|_2$$

$$\therefore \|(fh)_t - (fh)_s\|_2 \leqq \|k_t - k_s\|_2$$

ここで k の定義より $f, h \in C_{a,s}$ に注意すれば

$k \in C_{a,s}(\mathbb{T})$ となる。よって補題 6 より, $fh \in C_{a,s}(\mathbb{T})$

さらに, 補題7より,

$\{k\} \leq 11\sqrt{2}\,\|f\|_\infty \{h\} + 11\sqrt{2}\,\|h\|_\infty \{f\}$ となる。

$\therefore \{fh\} \leqq 88\sqrt{2}\,\|f\|_\infty \{h\} + 88\sqrt{2}\,\|h\|_\infty \{f\} + \sqrt{2}\pi\,\|h\|_\infty \{f\}$

$\leqq 90\sqrt{2}\,\|f\|_\infty \{h\} + 90\sqrt{2}\,\|h\|_\infty \{f\}$

$\therefore |||fh||| \leqq 90\sqrt{2}\,\|fh\|_\infty + \{fh\}$

$\leqq |||f|||\;|||h|||$

(2): $f \in B$, f の range $\subset [-1, 1]$ とする。

F を $[-1, 1]$ 上で定義された関数で $|F(x) - F(y)| \leqq |x - y|$ $(x, y \in [-1, 1])$ としてよい。

今 $h = F \circ f$ とおくと,

$$\|h_t - h_s\|_2 = \left(\int |F(f(x+t)) - F(f(x+s))|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqq \left(\int |f(x+t) - f(x+s)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|f_t - f_s\|_2$$

よって補題 6 を使えば,

$$F \circ f = h \in C_{a,s}(\mathbb{T})$$

q.e.d.

[追記]

[4] で G. Pisier の結果を扱っている。

REFERENCES

[1] N.Bary, A Treatise on Trigonometric Series, Translated from the Russian by M.F.Mullins, Vol.1(1964).

[2] S.Igari, Functions of L^p-multipliers, Tôhoku Math. J. 21(1969), 304 - 320.

[3] N.Jain and M.Marcus, Continuity of sub-Gaussian process, Probability on Banach spaces, Advances in Probability and Related Topics 4(1978), 81 - 196.

[4] J.P.Kahane, Some random series of functions, Second ed. Cambridge University Press, 1985.

[5] Y.Katznelson, Sur le symbolique dans quelques algèbres de Banach, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup. 76(1959), 83 - 123.

[6] Y.Katznelson, A characterization of all continuous functions on a compact Hausdorff space, Bull.Amer.Math. Soc. 66(1960), 313 - 315.

[7] Y.Katznelson, Calcul symbolique dans les algèbres homogenès, C.R.Acad.Sci. 234(1962), 2700 - 2702.

[8] Y.Katznelson and P.Malliavin, Analyse harmonique dans quelques algèbres homogènes, Israel J. Math. 5(1967), 107 - 117.

[9] G.Pisier, A remarkable homogeneous Banach algebra, Israel J. Math. 34(1979), 38 - 44.

[10] W.Rudin, Fourier analysis on groups, 2nd ed. Interscience Publishers, New York, 1967.

[11] N.Th.Varopoulos, The functions that operate on $B_0(\Gamma)$ of a discrete group, Bull.Soc.Math.France 93(1965), 301 - 321.

[12] M.Zafran, The functions operating on multiplier algebras, J.Functional Analysis 26(1977), 289 - 314.

[13] M.Zafran, The dichotomy problem for homogeneous Banach algebras, Ann.Math. 108(1978), 97 - 105.

[14] M.Zafran, On the symbolic calculus in homogeneous Banach algebras, Israel J.Math. 32(1979), 183 - 192.

[15] A.Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge: The University Press, 1959.

[16] J.P.Kahane, Séries de Fourier Absolument Convergentes, New York: Springer-Verlag 1970.