数理解析研究所講究録
706巻 1989年 81-93

Walsh 関数 再訪

東北学院大学教養学部　　渡利 千波
(Chinami Watari)

序．　一説によると、Walsh 関数はすでに 19 世期末頃一部の電気工学者に利用されていたとのことであるが、数学者にとっては 1923 年の Walsh [W] に始まるというのが定説であり、理論としての形を成し始めたのはその後の 1932 年の Paley [P] からである。 位相群一般論の整備に伴い、1949 年の Fine [F1] の "dyadic group" によって新時代が切開かれ、これが Walsh 関数を扱う標準的な場であることになって現在にいたっている。

ここでは、"dyadic group" に別の角度から着目し、新しい可能性を探ることにしたい。 計算機の普及によって bit images の取扱手法が開発されているので、純粋数学を離れた応用の面で利用できるのではないか、との期待もある。

1．Paley による定義 と L^p 理論

Paley [P] は実軸上に次の形で Walsh 関数を構成した。

Rademacher 関数 $\{\phi_k\}$:　$\phi_0(x) = \mathrm{sign}(\sin 2\pi x)$,

$$\phi_k(x) = \phi_0(2^k x)$$

Walsh 関数 $\{\psi_n\}$:　$\psi_0(x) = 1$.

$n \geqq 1$ に対しては n を２進法展開して

$$n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$$

$(n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geqq 0)$ とするとき

$$\psi_n(x) = \phi_{n1}(x)\cdot\phi_{n2}(x)\cdot\cdots\cdot\phi_{nr}(x).$$

Rademacher 関数 は、[0,1) 上の独立関数系であり、平均が 0 であることから直交している。 その事実が Walsh 関数系の直交性を惹き起こしており、Paley はほとんどこの性質だけを利用して、今日彼の名で呼ばれる「分解定理」を証明し、それを中心に $L^p(0,1)$ の関数の Walsh Fourier 級数の理論を展開している。

（分解定理のの易しい証明については後に述べる。）

Walsh 関数系が有界な正規直交系であることから、[0,1) 上の可積分関数を Fourier 展開することが可能になるが、その 2^n 次の部分和に着目すれば、（今日の言葉で martingale をなしていることからも、不定積分の微分からも）、もとの関数に平均で、またほとんどすべての点で、収束することがわかる。 特に、Fourier 係数がすべて 0 に等しい関数は 0（と区別できない関数）に限られ、Walsh 関数系は完

備である。

２． Fine の dyadic group.

Paley の定義の背後にある群論的構造に注目して、Walsh 関数系の定義の自然な舞台となる dyadic group を導入したのは Fine [F1] である。 彼は、{0,1} の可算直積に Tychonov 位相を入れた コンパクトアーベル群 すなわち dyadic group G を考え、その連続な指標が Walsh 関数である、との解釈を提示した。 実軸上では符号関数の積として不連続であった Walsh 関数が、その場を得て連続関数となったことで、近似理論、ひいては (Walsh) Fourier 級数の絶対収束等の議論が可能になった。

後の都合があるので少し内容に立入って紹介しよう。
dyadic group G の元は

$$x = \{x_n\} \quad x_n = 0 \text{ or } 1,\ n = 0,1,\cdots.$$

（番号が 0 から始まっていることに注意）
という数列である。 G には $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ の「和」 $z = \{z_n\}$ が
$z_n = |x_n - y_n| = x_n + y_n \mod 2$ によって定義される。 この演算を（後に明らかになる理由によって）Δ で表すことにしう。 0 のみから成る数列が G の単位元 0

であり、G のすべての元は自分自身の逆元である。 G の元の位数が 2 であるから、G の指標のとりうる値は ± 1 に限られることに注意しておこう。

Fine はこの他、 $\mathrm{dist}(x,y) = \Sigma |x_n - y_n| 2^{-n}$ によって G の距離づけを行ない、後に他の研究者によって G 上の Lipschitz classes が取扱われる基礎を築いた。この距離についても次節で触れる。

G と [0,1) との間には、[0,1) の元を２進法展開して得られる数列を考えることで、（可算個の例外を無視すれば）１対１の対応がつけられる。 この対応のもとで Rademacher 関数は $\phi_k(x) = (-1)^{x_k}$ と表される。

直接の検証で Rademacher 関数に対して

$\phi_k(x \Delta y) = \phi_k(x) \cdot \phi_k(y)$

が見られるから、それらの積である Walsh 関数に対しても同じ関係が成立し、Walsh 関数は G の指標であり、「最高位の Rademacher 関数」に注目すれば、連続であることも容易に見られる。 逆に、G の任意の連続指標 χ は単位元の適当な近傍で 1 であるから、$\chi(x)$ の値は x の最初の有限個の「成分」 $x_1, \cdots, x_n$ で定まる。
第 j 成分だけが 1 で、他の成分がすべて 0 である G の元を $x(j)$ と書くことにすれば、 $\chi(x(j)) = -1$ をみ

たす有限個の j に対する Rademacher 関数を χ に乗じた関数は恒等的に 1 になる。 つまり、χ はこれらの Rademacher 関数の積に他ならない。

3. Walsh 関数の新解釈 あるいは dyadic group の新解釈

dyadic group G の元は 数列

$x = \{x_n\} \quad x_n = 0$ or $1,\ n = 0,1,\cdots.$

であるが、これを非負整数全体の集合 Z_+ の部分集合と同一視することができる。実際には G の元 x に対して Z_+ の部分集合 $x = \{j \mid x_j = 1\}$ を対応させればよい。 G における加法が $P(Z_+)$ (Z_+ の部分集合全体の成す族) における対称差 Δ に対応することも容易にに見られる。 実はこの理由から前節において G の演算を Δ と書いたのであった。

周知のように(たとえば Halmos [H] 第1章の演習問題) 任意の集合 S に対して $P(S)$ は 加法 Δ、乗法 $\cap$ に関して可換環をなすから、この解釈に立てば、G にもう1つの演算 $\cap$ が考えられることになる。 あるいは、dyadic group は Boolean ring に他ならない、といってもよい。 目下のところ演算 $\cap$ に関する walsh 関数の目ぼしい性質が見つかっていないので、単なる憶測の域を出ない

が、G を "flags space" Z_+ の部分集合全体の Boolean ring と見れば、対称差は "flags space" における演算としては "xor" で、 ∩ は同じく "and" で与えられるから、将来において数値計算等に Walsh 関数を使おうとする際に利用できるであろう。

Fine の与えた G の metric にしても、

$\min\{n : x_n \neq y_n\} = k$ であるとき $\rho(x,y) = 2^{-k}$

と定めると、同値な距離が得られるばかりでなく、$\rho(x,y)$ はいわゆる "ultrametric"「超距離」で、

$\rho(x,y) \leqq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ よりも強い三角不等式

$\rho(x,y) \leqq \max\{\rho(x,z), \rho(z,y)\}$ が成立する。

超距離も距離の一種であるから、点集合 E の直径

$\mathrm{diam}(E) = \sup\{\rho(x,y) ; x,y \in E\}$

が定義されるが、強い三角不等式のために、一見奇妙な事実が成立する。 定義から容易に証明されるので、結果だけを二三挙げておく。

任意の３角形は２等辺３角形で、底辺長は等辺長を越えない。

閉球の任意の点はその球の中心で、直径は半径に等しい。

特に、閉球は開集合である。

dyadic group G を Z_+ の部分集合全体の Boolean ring と見る立場では、G の単位元は Z_+ の空集合に、Rademacher 関数は Z_+ の１点から成る集合に対応し、G の双対群の元である Walsh 関数は Z_+の有限部分集合に対応する。特に、ψ_0 は Z_+ の有限部分集合の１種である空集合に対応している。

４． dyadic martingales と Paley の分解定理．

G には、Z_+ の特定の元を含むか含まないかに基づいた、自然な有限分割の列と、それらに伴う atomic σ-fields の列 $\{F_n\}$ が考えられる。

F_0 は trivial σ-field、$x_0 = 1$ である x と $x_0 = 0$ である x とに分割して（$0 \in Z_+$ を含む部分集合と含まない部分集合に分けて）F_1、以下同様に定められる。 各々の F_n は同じ大きさ（直径）の atoms 2^n 個からなっており、F_n-atoms 相互間の距離は、それらをともに含むもっとも細かい分割の atom の直径で与えられる。G の Haar 測度は、これらの atoms にその直径を測度として付与し、一般的な拡張(Caratheodory 拡張)をすることで再構成される。

直観的には、Cantor の ３分集合を作る操作を想定するのが便利であろう。 各段階で残される "black intervals"

が、その段階に対応する atoms である。ただ、Cantor set の場合と違って、atoms の直径は各段階ごとに（1/3 ではなく）1/2 になることには注意しておこう。 この分割に伴う atomic σ-fieldsの列 $\{F_n\}$ による martingale が、Paley の分解定理の立役者である。

今日の言葉を利用すれば、Paley の分解定理はつぎのように述べられる。

定理(Paley)

$f \in L^p(G)$ $(1<p<\infty)$ から $\{F_n\}$-martingale $\{f_n\}$, その difference sequence $\{\delta_n\}$, square function $S(f)$ と定数列 ± 1 による martingale transform f^* とを作る。 p だけで定まり、f に無関係な定数 c_1, c_2 が存在して

$$c_1\|f\|_p \leqq \|S(f)\|_p \leqq c_2\|f\|_p$$

$$c_1\|f\|_p \leqq \|f^*\|_p \leqq c_2\|f\|_p.$$

証明の方針　２つの不等式は Khintchin の不等式から同値であるから、後者だけを示せばよい。 さらに、$p = 2$ のときは等号で成立しているから、作用素 $f \to f^*$ が 弱い (1, 1) 型であること、つまり 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda \text{ meas}(\{x ; |f^*| > \lambda\}) \leqq 3 \|f\|_1$$

であることを示せばよい。

$|f|$ から作った $\{F_n\}$-martingale $\{h_n\}$ を用いて

$\tau = \inf\{n ; h_n > \lambda\}$ とおく。 $\{\tau = \infty\}$ 上では

$|f| \leqq \lambda$ である。 $g = f \cdot 1\{\tau = \infty\}$,

(1 はindicator funcion) $b = f - g$ とおく。

f から f^* を作るのと同じく、g, b からそれぞれ g^*, b^*

を作ると、当然 $|f^*| \leqq |g^*| + |b^*|$ であるから、

$\{|f^*| > \lambda\} \subset \{|g^*| > \lambda\} \cup \{|b^*| > 0\}$

である。 右辺第１集合の測度は $g \in L^2(G)$ を利用して

Chebyshev の不等式で評価され、$(1/\lambda)\|f\|_1$ 以下である。

第２の集合は、b^* を構成する b の martingale difference

が $\{\tau = \infty\}$ 上ではすべて 0 である（ここに、Paley の着

目した独立性が効いてくる）ことから、$\{\tau < \infty\}$ の部分集

合であり、必要なら Doob の不等式を用いて、その測度が

$(2/\lambda)\|f\|_1$ 以下であることがわかる。

あとは 1 と 2 の間を Marcinkiewicz 補間し、$p > 2$ に対しては双対性によればよい。

５．数列の「弱い」極限

dyadic group G を Z_+ の部分集合全体の Boolean ring

と見る立場からは、Gの双対群が Z_+ の有限部分集合（自

然数 n を２進法展開して現われる指数の集合を ｎ で表すことにする）全体の Boolean ring になるのであった。 これを Γ と表そう。Γ を構成する源の Z_+ には shift : $k \to k+1$ があるから、Γ の元 ｎ を１つ固定して（Z_+ の有限部分集合 ｎ を固定して)これを Z_+ における shift で動かす（自然数 n に 2 のベキを掛けて行く）ときの極限、いわば「ｎ 方向の極限」を考えることができる。また、Γ に自然に定義されている包含関係に基づく半順序から、この半順序に関する極限が考えられる。どちらも通常の極限概念よりは「弱い」ものである。

ただ、場合によってはこの「弱い」極限が通常の極限と一致することがある。とくに、(Walsh-)Fourier 級数の収束を考えるときには、包含関係に基づいた極限を考えれば十分である。この間の事情を少しだけ調べてみよう。

自然数 n（半角の－－細かな－－文字で表す）と、それを構成する 2 進ベキの集合 ｎ（全角の－－幅のある－－文字で表す）とを同一視する。 たとえば、$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$ を、 13 = {3,2,0} と書くことにする。

定義　数列 $\{a_n\}$ が a に弱い意味で収束するとは、

任意の正の数 ε に対して自然数 N が定まり、N を含む任意の自然数 m に対して $|a_m - a| < \varepsilon$ が成立する

ようにできることをいう。 Hilbert 空間における弱収束の記号を借用して $a_n \rightharpoonup a$ と書いてもよいかもしれない。

N が多くの元をもてば、それに対応する N もその分だけ大きくなるから、通常の意味で 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するときは弱い意味でも $\{a_n\}$ は a に収束する。 逆の成立しないことは、 $a_{2^k} = 1$ $(k = 1, 2, 3, ...)$, $= 0$ (その他) という数列で見られる。

ところが、0 に近づく項をもつ級数の収束に関しては、弱い極限も通常の極限も同値であることが、つぎのようにして見られる。

級数の項を a_k, 部分和を s_n として $s_n \rightharpoonup s$ つまり弱い意味で $s_n \to s$ であるとしよう。

正の数 ε を与える。 自然数 N が定まり、N を含む任意の自然数 m に対して $|s_m - s| < \varepsilon/2$ が成立する。他方、級数の項は 0 に収束するのであったから、十分大きい自然数 M に対して $|a_k| < \varepsilon/2N$ $(k \geqq M)$ である。$L = M \cup N$ とおくと、$n \geqq L$ に対しては $m = n \cup N$ として $|s_n - s| \leqq |s_n - s_m| + |s_m - s|$ で、右辺第2項は $N \subset m$ から $|s_m - s| < \varepsilon/2$、第1項は $s_n - s_m$ に含まれる項 a_k の個数が N を超えないことからやはり $< \varepsilon/2$ である。

6. Walsh Fourier 変換に関連して

出発点になった "flags space" Z_+ の代りに、Z 自体を "flags space" として、その部分集合の作る Boolean ring を解析の場とすれば、Fine [F2] にいう dyadic field (と、その上での Fourier 解析) ができる。ただ、Z の部分集合全体ではなく、負の部分で「立っている "flags"」が有限個であるような部分集合の族を考えることに注意しておく。この注意があれば、Fine [F2] を翻訳するには困難はないであろう。

7. おわりに

演算 ∩ の効用が見つかっていないのが大きな弱点ではあるが、dyadic group を見直して Boolean ring と考えることで、新しい発展の芽が出ることが期待される。 Fourier 級数の収束問題では、Walsh 関数系は三角関数（指数関数）にくらべてはるかに扱いやすいから、道具が１つふえれば、さらに有利になるであろう。

引用文献

[F1] Fine, N.J.

On Walsh Functions

Trans. Amer. Math. Soc. 65(1949).

[F2] -----

Generalized Walsh Functions

Trans. Amer. Math. Soc. 69(1950).

[H] Halmos, L. H.

Measure Theory, van Nostrand, New York (1946).

[P] Paley, R.E.A.C.

A Remarkable Series of Orthogonal Functions,

Proc. London Math. Soc.(II) 34(1932).

[W] Walsh, J. L.

A Closed System of Normal Orthogonal Functions,

Amer. Journ. Math. 45(1923).