数理解析研究所講究録
706 巻 1989 年 48-57

無限ネットワーク上のマルチンゲールとその応用

岡田正己 (Masami Okada) 東北大教養部(数学)

以下は塩田氏・関口氏との共同研究 [1] による。

無限グラフネットワーク N の一点 O を固定する。[1] において、$P_t(0,0) = O(t^{-\beta})$ $t \uparrow \infty$ なる β は、次で与えられることを予想した。

<u>予想</u> N 上の標準拡散過程 X_t が再帰的のとき、

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\|u_n\|_1^2 \|u_n\|_2^{-2})}{\log(\|u_n\|_2^2\, \mathcal{E}(u_n,u_n)^{-1})}$$

, 但し $\{u_n\}$ は、アドシッシブルなもの、とする。即ち、u_n はコンパクトサポート K_n を持ち、($K_n \uparrow N$, $n\to\infty$), その内点では 0 以外で調和であり、任意の調和関数 h に対して

$$\int_N h(x)u_n(x)\,dx \longrightarrow h(0) \quad , n\to\infty,$$

なるもの、とする。

<u>注意</u> $\beta \leqq 1$ のとき、我々の考えているのは遠方で、アースして得られる電圧の与える関数列 $\{u_n\}$ である。$\beta > 1$ の時は、0 以外で調和、というのを、

$\Delta u_n \to 0$, $n \to \infty$ か何かで、おきかえなければならないが、まずもう少しケーススタディが必要と思われる。

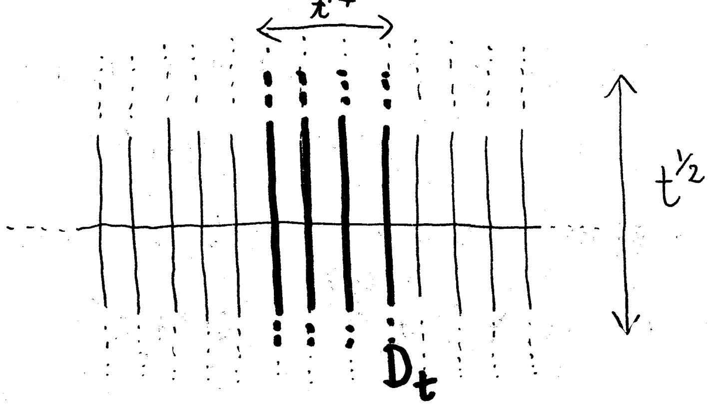
上の予想は、マルチンゲールの考え方を用いている。この考え方を適用して、いくつかの具体例に対して、β を計算してみよう。予想、というわけは、次のようなことを仮定せざるを得ないからである。いずれ、誰かが厳密な証明を与えることを期待する。

<u>仮説</u> X_t が再帰的であるような場合、X_t は、特徴的な拡がりの範囲を持つ、即ち、増大領域列 $\{D_t\}$ があって、

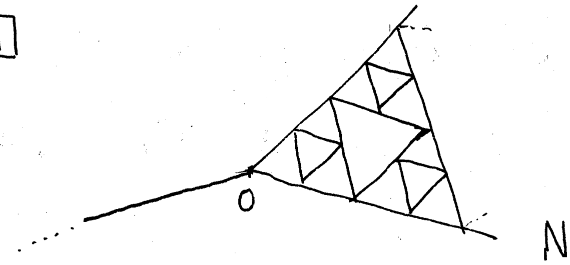
(i) $^\forall c>0$ に対して $\exists\, \delta_c>0$ で、$\displaystyle\inf_{t>0} P_0(X_t \in D_{ct}) > \delta_c$

(ii) $\displaystyle\sup_t P_0(X_t \notin D_{mt}) \to 0,\ m \to \infty$ (急減少)

例えば、下の図を参照して下さい。

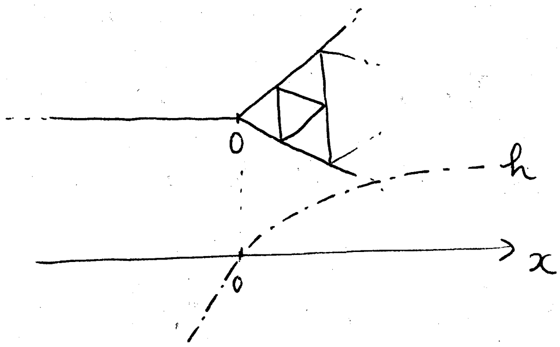


1



半直線と pre Sierpinski Gasket をつなげたもの。

これに対しては $P^{(1)}_t(0,0) = O\left(t^{-\frac{\log 3}{\log 5}}\right)$ ということはわかっている。調和関数 h としては、だいたい、



$$h(x) \fallingdotseq \begin{cases} x & \cdots\ x<0 \\ x^{\frac{\log\frac{5}{3}}{\log 2}} & \cdots\ x>0 \end{cases}$$

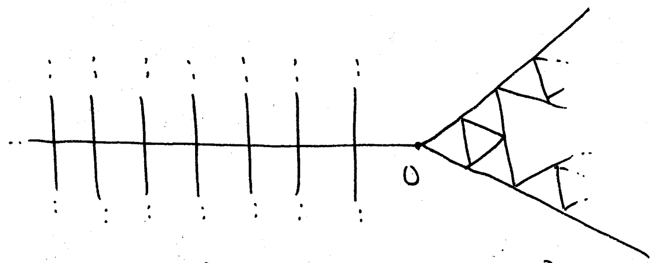
ととればよい。x の指数 $\frac{\log\frac{5}{3}}{\log 2}$ というのは、電圧を計算することで得られる。半直線を、つなげない、もともとの pre S.G. では、0点から出発したブラウン粒子は、t時刻後、0点からの距離が $O\left(t^{\frac{\log 2}{\log 5}}\right)$ の範囲に留まり、かつ拡がっていることが知られている。さて、今の場合も、そうであることを、直観的に導いてみよう。t時刻後 $x<0$ の範囲に粒子の存在する確率を q_t とすると、$x<0$ では $O(t^{1/2})$, $x>0$ では $O(d_t)$ の範囲に拡がる、とすると、マルチンゲール性より、(i) $(1-q_t)\, d_t^{\frac{\log\frac{5}{3}}{\log 2}} = O\left(q_t \cdot t^{\frac{1}{2}}\right)$ である。

次に 0点で、確率密度(関数)は連続、即ち、tのオーダーは、一致しなければならない、ということより、 (ii) $O\left(\frac{q_t}{t^{1/2}}\right) = \dfrac{1-q_t}{d_t^{\frac{\log 3}{\log 2}}}$ (∵ 全長 $d_t^{\frac{\log 3}{\log 2}}$ の範囲に平均的に広がっている)

(i)と(ii)より、$\begin{cases} d_t = O\left(t^{\frac{\log 2}{\log 5}}\right) \\ q_t = O\left(t^{\frac{\log \frac{5}{3}}{\log 5} - \frac{1}{2}}\right) \end{cases}$ が、出る。 $\frac{\log 2}{\log 5} \fallingdotseq 0.4307$ 　 $\frac{1}{2} - \frac{\log \frac{5}{3}}{\log 5} \fallingdotseq 0.1826$

結論　このような結合では、そう珍しいことは、おこらない。粒子は、当然 pre S.G. 側に見出される確率が大きい。

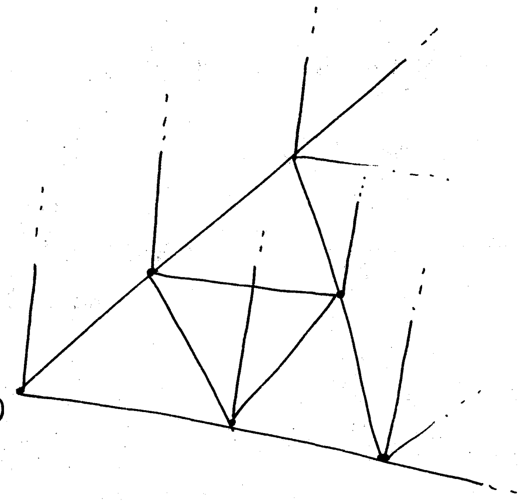
$\boxed{2}$



この時は $P_t^{(2)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{3}{4}}\right)$ ということが、わかっている。こんども $d_t = O\left(t^{\frac{\log 2}{\log 5}}\right)$ だが、$\boxed{1}$ とちがう点は粒子が pre S.G. 側に見出される確率 $1-q_t = O\left(t^{\frac{\log 3}{\log 5} - \frac{3}{4}}\right) \fallingdotseq O\left(t^{-0.0617}\right)$ となる事である。

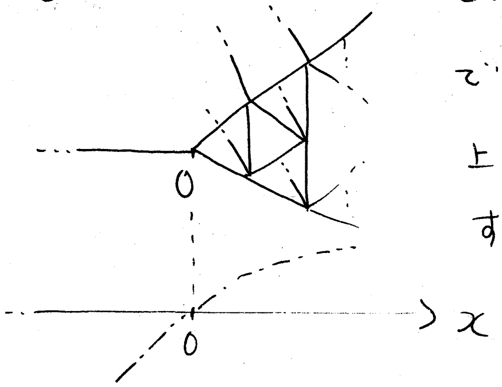
示し方は、同様なので略す。$x<0$ の部分での調和関数 h は、各枝上は定数となるものを採用し、特徴的拡がりの大きさが $x<0$ で $t^{\frac{1}{4}}$, $x>0$ で d_t とおけばよい。この場合も、結合前の様子で、大体わかるわけである。

$\boxed{3}$



pre S.G. の節点に縦線をたてたもの.

これを



とみて、h としては、$x>0$ で $\fallingdotseq x^{\frac{\log\frac{5}{3}}{\log 2}}$、垂直の枝上は、定数であるものを採用する。$x>0$ への拡がりの大きさを d_t とおく。

すると、マルチンゲール性より (i) $O\left(q_t t^{\frac{1}{2}}\right) = (1-q_t)\, d_t^{\frac{\log\frac{5}{3}}{\log 2}}$

確率密度が $x \gtrsim 0$ で一致することより

(ii) $O\left(\dfrac{q_t}{t^{1/2}}\right) = \dfrac{1-q_t}{d_t^{\frac{\log 3}{\log 2}}\left(t^{\frac{1}{2}}+1\right)}$

この２つの式から $d_t = O\left(t^{\frac{\log 2}{2\log 5}}\right)$, $q_t = t^{\frac{\log\frac{5}{3}}{2\log 5}-\frac{1}{2}}$

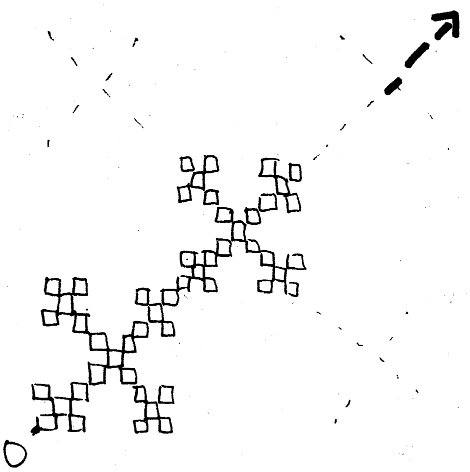
従って $P_t^{(3)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log 3}{\log 5}+1\right)}\right) \fallingdotseq O\left(t^{-0.8413}\right)$

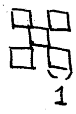
が出る。

注意 別解として $\displaystyle\inf_{u\in\mathcal{U}} \frac{\log \|u\|_1^2/\|u\|_2^2}{\log \|u\|_2^2/\mathcal{E}(u,u)}$ を計算する方法

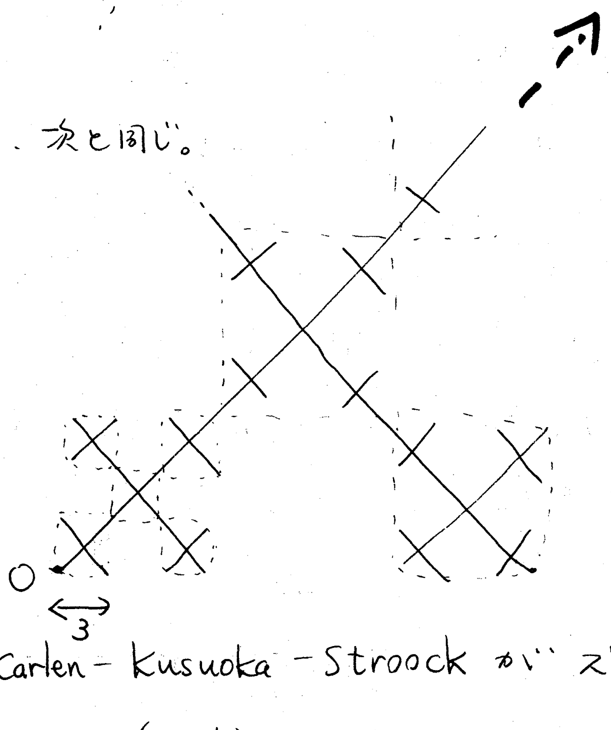
もある。$\mathcal{U}$ としては、0点で最大値をとり、各垂直の枝上で 式の形をしたものを選ばなければならない。inf ということから d_t のオーダーが出る仕組みになっている。同じ値が出るのは喜ばしいことで、何か数学的事実が潜んでいるのだろう。

$\boxed{4}$



基本図形 

これは、本質的に、次と同じ。

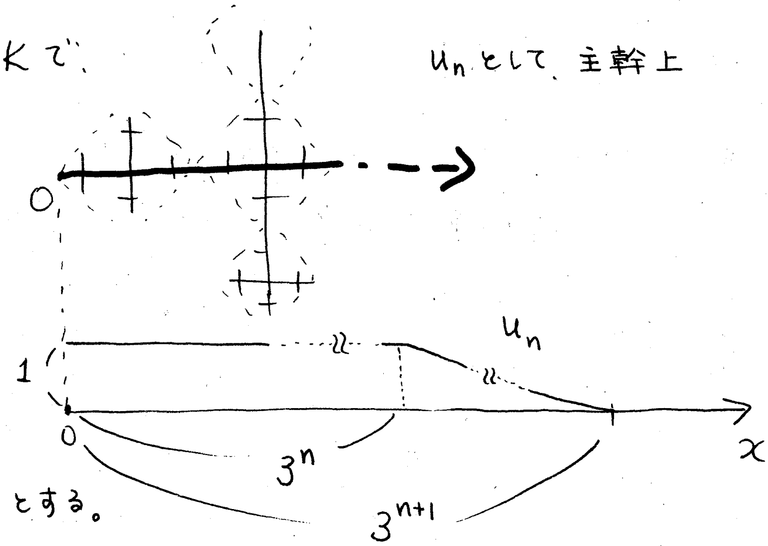


形から、これには Carlen-Kusuoka-Stroock がズバリ適用できて、$\|P_t^{(4)}\| = O(t^{-\alpha})$ $t \uparrow \infty$ なる α は

$$\alpha = \inf_{u.\text{すべて}} \frac{\log \|u\|_1^2 / \|u\|_2^2}{\log \|u\|_2^2 / \mathcal{E}(u,u)}$$

より、計算できる。形から、$\alpha=\beta$

だから！　もちろん、inf をとる u が、わかりやすい事、$\mathcal{E}(u,u)$ も計算しやすい事が、カギであるが、この場合は、OK で、u_n として、主幹上

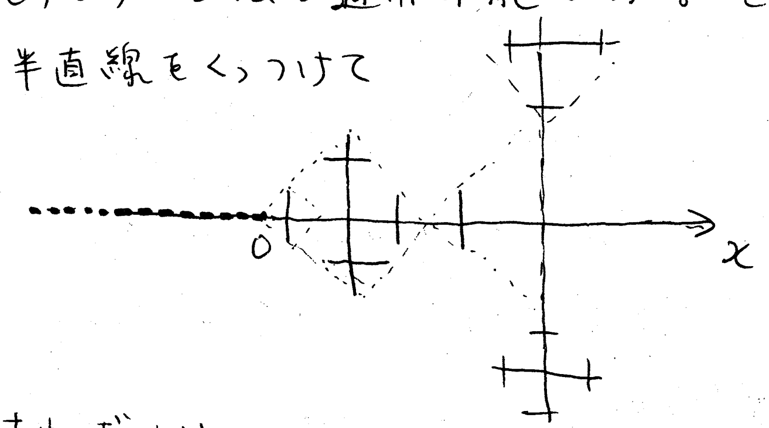


と定め、枝上は定数とする。

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|u_n\|_1^2 / \|u_n\|_2^2}{\log \|u_n\|_2^2 / \mathcal{E}(u,u)} = \log 5 \big/ \log 15 \fallingdotseq 0.594 .$$

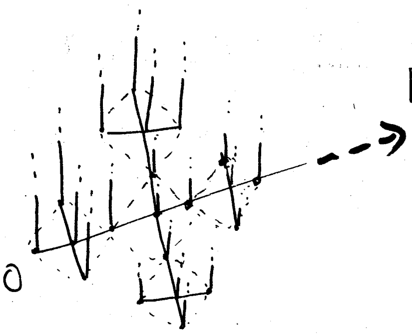
従って $p_t^{(4)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{\log 5}{\log 15}}\right)$ 、また、$d_t^{\frac{\log 5}{\log 3}} = O\left(t^{\frac{\log 5}{\log 15}}\right)$ から、$d_t = O\left(t^{\frac{\log 3}{\log 15}}\right) \fallingdotseq O\left(t^{0.4057}\right)$ も出る。

<u>注意</u> $O(t^{-\frac{1}{2}}) > O\left(d_t^{-\frac{\log 5}{\log 3}}\right)$ であること、即ち $d_t \geqq O\left(t^{\frac{\log 3}{2\log 5}}\right) \fallingdotseq O\left(t^{0.3413}\right)$ が、あらかじめわかっておれば、$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ までのマルチンゲール法も適用可能である。それには仮想的に半直線をくっつけて



とすればよい。

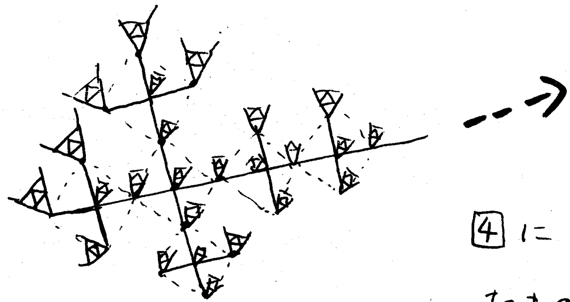
$\boxed{5}_1$



$\boxed{4}$に半直線を、つけたもの、

マルチンゲールの考え方で、同様にして、$d_t = O\left(t^{\frac{\log 3}{2\log 15}}\right)$ が出て、$P_t^{(5_1)}(0,0) = O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\log 5}{\log 15}\right)}\right)$、となる。

$\boxed{5}_2$

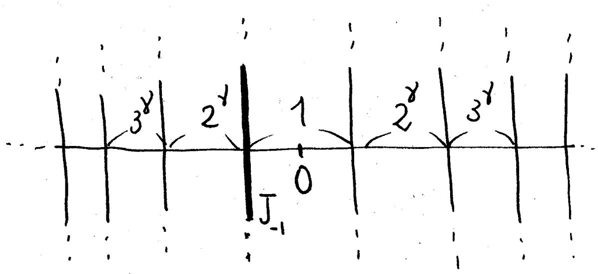


$\boxed{4}$に pre. S.G. をつけたもの、

この時も同様に $d_t = O\left(t^{\frac{\log 3}{\log 15}\cdot\frac{\log\frac{5}{3}}{\log 5}}\right)$, $P_t^{(5_2)}(0,0)=O\left(t^{-\frac{\log 3}{\log 5}-\frac{\log\frac{5}{3}}{\log 15}}\right)$

$\fallingdotseq O\left(t^{-0.8712}\right)$ となる。

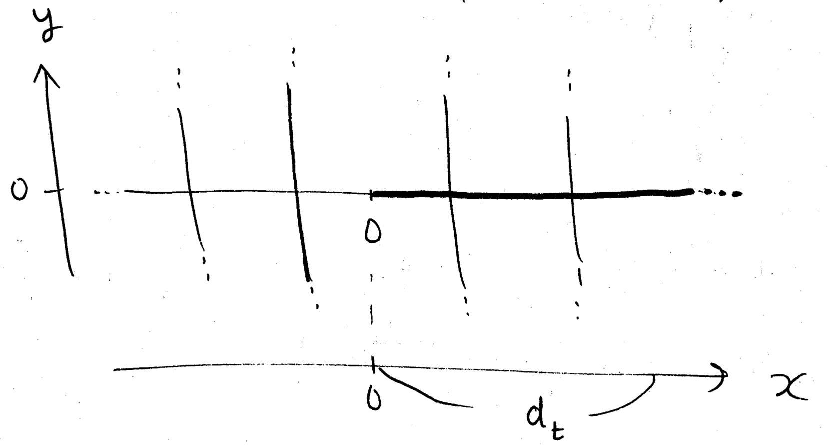
$\boxed{6}$



このタイプもマルチンゲールの考えが適用できる。

便宜上 $-1<\gamma\leq 0$ としておく。hの選び方だが、今は

$x<0$ では、J_{-1} 上 $f(y)=\frac{|y|}{2}$、それより左は定数 $=-\frac{1}{2}$ とする。$x>0$ では主幹上 $h(x)=x$、枝上は定数とする。



さて、拡がりの範囲を d_t とすれば、d_t の間に枝は $n=O(d_t^{\frac{1}{\gamma+1}})$ 本出ている。確率 q_t で J_{-1} に見出されるとすれば マルチンゲールの考え方によって、

(i) $O(q_t\sqrt{t})+\left(\frac{1}{2}-q_t\right)\frac{1}{2} = O(d_t)$

ところで、J_{-1} に見出される確率 q_t は枝の数 n 本だから、だいたい平均的なので、(ii) $q_t=O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(d_t^{-\frac{1}{\gamma+1}}\right)$ である。これから、$d_t=O\left(t^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma+2)}}\right)$、となって、即ち、全長 $O(\sqrt{t}\times n)=O\left(t^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2(\gamma+2)}}\right)=O\left(t^{\frac{\gamma+3}{2(\gamma+2)}}\right)$ の範囲に拡がるわけなので、$p_t^{(6)}(0,0)=O\left(t^{-\frac{\gamma+3}{2(\gamma+2)}}\right)$ となる。

以上のやり方以外に $\inf\frac{\log}{\log}$ 法、電圧法なども同じ値を与えるのは心強い！

$\boxed{7}$ Snow fractal

これは本邦古来のかごめ模様に似たものから、入れ子
(或は輸入の？)　(又は亀形)
式に定まる簡単なフラクタル模型なのだが、その上で
調和関数 h (の増大 order) がわからないので $P_t^{(7)}(0,0)$
の減少オーダーが計算できない。この例の様に、逆
に計算できない無限グラフネットワークの方が、ずっと
多いのかもしれない。やや悲観的になってきたので、
この辺で。

問題　一般に対称な図形に対して h の増大オーダーの計算法を与えよ。

Reference(s)

[1] M. Okada - T. Sekiguchi - Y. Shiota

Heat kernels on Infinite Graph Networks and Deformed Sierpiński Gaskets.

(submitted)

[2] 以下は、上の文献を御覧下さい。