数理解析研究所講究録
706 巻 1989 年 39-47

Bergman spaces, Bloch functions and martingales

相工大 村本克志 (Katsushi Muramoto)

1. 準備と定理

複素平面$\mathbb{C}$の単位円板をD, その境界を∂Dで表す. ∂D上のBMO函数とBMO martingaleの関係は良く知られている. 本稿ではD上のBMOA (= Bloch) 函数とmartingaleの関係を調べる.

解析函数$f: D \to \mathbb{C}$がD上のBloch函数とは

$$\|f\|_B = \sup_{z \in D} (1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

D上のBloch函数の全体を$B(D)$で表す. 解析函数$f: D \to \mathbb{C}$がD上のBMOA函数とは

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{\Delta:\text{ ball in } D} \left\{ \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta |f(z) - f_\Delta|^2 \, dA(z) \right\}^{1/2} < \infty,$$

ただし，dA は面積要素，$|\Delta| = \int_\Delta dA$，$f_\Delta = \frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta f(z)\,dA(z)$．D上のBMOA函数全体をBMOA(D)で表す．解析函数 $f: D \to \mathbb{C}$ に対して次の不等式が成立する．

$$\|f\|_{BMO} \leqq \|f\|_B \leqq 2\sqrt{2}\,\|f\|_{BMO}$$

Coifman, Rochberg and Weiss [3], Muramoto [8].

次に，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ を与えておき，この空間上の複素ブラウン運動 (B_t) が定義されているものとする。$(Z_t^x) = (X_t^x + \sqrt{-1}\,Y_t^x)$ が $x \in D$ を出発する D ブラウン運動とは，

$$Z_0^x = x, \qquad d\langle Z^x, Z^x\rangle_t = \frac{1}{2}(1-|Z_t^x|^2)^2\, d\langle B, B\rangle_t,$$

詳しく述べると

$$d\langle Z^x, Z^x\rangle_t = d\langle X^x, X^x\rangle_t + d\langle Y^x, Y^x\rangle_t$$

$$d\langle X^x, X^x\rangle_t = d\langle Y^x, Y^x\rangle_t = \frac{1}{2}(1-|Z_t^x|^2)^2\, dt$$

$$d\langle X^x, Y^x\rangle_t = d\langle Y^x, X^x\rangle_t = 0$$

簡単の為に，$(Z_t)=(Z_t^0)$とする．C^2函数 $u: D \to \mathbb{R}$に対して

$$u(Z_t^x) - u(Z_0^x) = \text{local. mart.} + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_D u(Z_s^x)\, ds$$

が成立する．ここで Δ_D はLaplace-Beltrami operator of Poincaré disk D である．解析函数 $f: D \to \mathbb{C}$に対しては

$$E[\,|f(Z_t^x) - f(Z_0^x)|^2\,] = E[\int_0^t |f'(Z_s^x)|^2 d\langle Z^x, Z^x\rangle_s\,]$$

$$= E[\int_0^t |f'(Z_s^x)|^2 (1-|Z_s^x|^2)^2 ds\,]$$

が成立する（Meyer [7]）。

Holomorphic martingale (U_t) が $\mathcal{B}$-martingale とは，定数 $c \geqq 0$ が存在し，任意の stopping time T に対し

$$E[\,|U_T - U_0|^2\,] \leq c^2\, E[T].$$

上の不等式をみたす最小の c を $\|U\|_{\mathcal{B}}$ で表す．

以上の準備の下で次の定理が成立する．

<u>定理</u> $f: D \to \mathbb{C}$ を解析函数とする.

(i) 任意の $x \in D$ に対し

$$\| f(Z^x) \|_{\mathfrak{B}} \leqq \| f \|_B \quad \left(\leqq 2\sqrt{2} \, \| f \|_{BMO} \right)$$

(ii) ある $x \in D$ に対し

$$\left(\| f \|_{BMO} \leqq \right) \| f \|_B \leqq \| f(Z^x) \|_{\mathfrak{B}}$$

2. 定理の証明

$x \in D$ と stopping time T を固定しておく.

$$E[\, | f(Z^x_T) - f(Z^x_0) |^2 \,]$$

$$= E\left[\int_0^T | f'(Z^x_s) |^2 \, d\langle Z^x, Z^x \rangle_s \right]$$

$$\leqq \| f \|_B^2 \, E\left[\int_0^T \frac{1}{(1 - |Z^x_s|^2)^2} \, d\langle Z^x, Z^x \rangle_s \right]$$

$$\leqq \| f \|_B^2 \, E[\, T \,] .$$

これから(ii)の不等式が得られる。

次に，$0 \leqq a < \|f\|_B$ とする。$x \in D$ が存在し

$$a < (1-|x|^2)|f'(x)|.$$

$T(\xi) = \inf\{t > 0 ; |Z_t^x - Z_0^x| \geqq \xi\} \wedge 1$ とおく。このときある $r > 0$ に対して

$$E[\int_0^{T(r)} a^2 ds] < E[\int_0^{T(r)} (1-|Z_s^x|^2)^2 |f'(Z_s^x)|^2 ds]$$

$$= E[|f(Z_{T(r)}^x) - f(Z_0^x)|^2]$$

$$\leqq \|f(Z^x)\|_{\mathcal{B}} E[T(r)]$$

$$a^2 E[T(r)] < \|f(Z^x)\|_{\mathcal{B}} E[T(r)]$$

よって(ii)の不等式 $\|f\|_B \leqq \|f(Z^x)\|_{\mathcal{B}}$ が得られ，定理が証明された。

3. $\mathcal{B}$-martingale について

複素ブラウン運動(B_t)は $\|B\|_{\mathfrak{B}} = \sqrt{2}$ の $\mathfrak{B}$-martingale である. 実際, stopping time Tに対し

$$E[\,|B_T - B_0|^2\,] = 2E[T].$$

Holomorphic martingale (M_t)が $\mathcal{M}^2$-martingale とは

$$\|M\|_2 = E[\sup_t |M_t|^2]^{1/2} < \infty .$$

この martingale全体を $\mathcal{M}^2$ で表す. 上の例から, $\mathfrak{B} \neq \mathcal{M}^2$ である.

ところで, 解析函数 $f: D \to \mathbb{C}$ に対し

$$\hat{f}(z, w) = f(z) \qquad (\,|z|^2 + |w|^2 \quad 1\,)$$

とおく. 簡単の為 $f(0) = 0$ とする. また, (Z_t), (W_t)を独立なブラウン運動とし, $\mu = \inf\{t > 0 ;\ |Z_t|^2 + |W_t|^2 \geq 1\}$ とおく. また, $N_t = \hat{f}(Z_{t\wedge\mu}, W_{t\wedge\mu})$ とおくと

$$\|N\|_2^2 = E[\sup_t |\hat{f}(Z_{t\wedge\mu}, W_{t\wedge\mu})|^2]$$

$$\leqq 4E[|\tilde{f}(Z_\mu, W_\mu)|^2] = 4E[|f(Z_\mu)|^2]$$

$f \in B(D)$であれば

$$\|N\|_2^2 \leqq 4E[\mu]\,\|f(Z)\|_{\mathcal{B}}^2$$

すなわち定数$C \geqq 0$が存在し，$\|N\|_2 \leqq C\|f(Z)\|_{\mathcal{B}}$が成立する．この意味で$B(D) \subset \mathcal{M}^2$が成立する．

一般には$\mathcal{M}^2$とD上のBergman空間が対応し，martingaleの立場から構造を研究できるのではないかと思われるが，今後の仕事に待たなければならない。

文献

[1] S. Axler, The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators, Duke Math. J. 53 (1986), 315-332.

[2] A. Baernstein II, Analytic functions of bounded mean oscillation, Aspect of contemporary complex analysis, Academic Press, New York, 1980, pp. 3-36.

[3] R. R. Coifman, R. Rochberg, and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Annals of Math. 103 (1976), 611-635.

[4] R. Durrett, Brownian motion and martingales in analysis, Wadsworth, Belmont, California, 1984.

[5] Y. Gotoh, On BMO functions on Riemann surface, J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985), 313-339.

[6] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1981.

[7] P. A. Meyer, Géométrie stochastique sans larmes, Sém. de Prob. XV, Lecture Notes in Math., 850, Springer, 1981, pp. 44-102.

[8] K. Muramoto, Harmonic Bloch and BMO functions on the unit ball in several variables, Tokyo J. Math. 11 (1988), 381-386.

[9] W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^N$, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[10] R. M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, I, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 241-267.