数理解析研究所講究録 14
708巻 1989年 154-164

ある種の正規数

山梨大学 中井喜信 Yoshinobu Nakai
(Y.-N. Nakai)
慶応大学 塩川宇賢 Iekata Shiokawa

§1. $r \geq 2$ を与えられた整数，$\theta = 0.a_1a_2a_3\cdots = a_1r^{-1} + a_2r^{-2} + \cdots$ を実数 $\theta\,(0 < \theta < 1)$ の r 進展開とする。θ が r 進正規数 (normal number) とは，任意のブロック $b_1\cdots b_\ell \in \{0, 1, 2, \cdots, r-1\}^\ell$ に対して

$$\frac{1}{n} N_r(\theta\,;\, b_1\cdots b_\ell\,;\, n) = r^{-\ell} + o(1) \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つことである。但し，$N_r(\theta\,;\, b_1\cdots b_\ell\,;\, n)$ は $a_1a_2\cdots a_n$ 中に現れる $b_1\cdots b_\ell$ の度数とする。正規数は無理数である。逆は必ずしも成り立たない。ほとんどすべての実数は r 進正規数である。しかし，正規な代数的数の存在は不明である。また π，e，$\log 2$，$\sqrt{2}$ などの自然な数で正規であることがわかっているものは一つもない。他方，正規数を人工的に構成する方法は数多く知られている。所が，それ等のほとんどは極めて複雑かつ非明示的で，出来上った数がどのような数であるかを簡単に書き下すことはできない。正規数の単純かつ明示

的な構成法として次の3通りのものが知られている。

第1の方法は, Copeland–Erdős [1] による組合せ論的なもので,

0. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ····

0. 2 3 5 7 11 13 17 19 ···· (素数列)

などが10進正規数であることが示される。この方面は [9] に詳しい。

第2の方法は, Davenport–Erdős [2] による。彼等は $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ かつ $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ $(\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\})$ とするとき $0.f(1)f(2)f(3)\cdots$ が10進正規数であることを示した。但し各 $f(n)$ は10進法で表わされており, $f(1)$ の digits の次に $f(2)$ の digits が $\underbrace{\cdots\cdots}_{\text{and so on}}$ と並んでいるものと見る。例えば

0. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ····

0. 1 4 9 16 25 36 49 ··· (平方数)

など。

第3の方法は, Stoneham [10] が永年にわたり研究して来たもので, 例えば, p が奇素数で, r が mod p^2 の原始根ならば,

$$(p-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n-1}\, r^{-(np^{n+1}-(n+1)p^n+1)/(p-1)}$$

は r 進正規数である。同様の例として, G. Wagner により, 次の5進正規数 (かつ10進正規数でない数) がある。

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{4^n - n} 10^{-4^n}.$$

なお正規数の歴史的ノート，文献が [5] の中にある．

本論文において，我々は才2の方法に基づき，新しい正規数のクラスを構成する．

§2. いま仮に "擬多項式 (pseudo polynomial)" と呼ぶ次のような $g(y)$

$$g(y) = \alpha y^{\beta} + \alpha_1 y^{\beta_1} + \cdots + \alpha_d y^{\beta_d}$$

$$\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_d \text{ 実数} (\neq 0)$$

$$\beta > \beta_1 > \cdots > \beta_d \geq 0 \text{ 実数}$$

を考える．以下簡単のため，上記のような $g(y)$ の全体のなす環を $\mathbb{R}[y^\wedge \mathbb{R}_+]$ （$\mathbb{R}$-係数，$\mathbb{R}_+$-冪の一変数擬多項式環）と記そう．$\mathbb{R}[y^\wedge \mathbb{R}_+] \supset \mathbb{R}[y]$ （$= \mathbb{R}[y^\wedge N]$）である。自然数 r （≥ 2）を一つ固定し一つの $g(y) \in \mathbb{R}[y^\wedge \mathbb{R}_+]$ （ただし $\beta > 0$）で $y > 0$ のとき $g(y) > 0$ であるものについて

$$\theta_r = 0.[g(1)][g(2)]\cdots[g(n)]\cdots$$

を考える．ただし $[g(n)]$ は $g(n)$ の整数部分で，それを r 進展開した "digit" 達を上のように並べて一つの r 進小数 θ_r と見るわけである．いま $N_r(m; b_1\cdots b_\ell)$ で自然数 m の r 進展開に $b_1\cdots b_\ell$ というブロックが現れる回数を表せば

[定理1] $r, l, b_1 \cdots b_l$ は上記のものとし $g(y)$ がもし $g(y) \in \mathbb{R}[y^{\wedge}\mathbb{R}_+] \setminus \mathbb{R}[y]$ ならば（つまり $\beta, \beta_1, \cdots, \beta_d$ の少くも一つが $\notin \mathbb{N}$ (>0) ならば）

$$\sum_{n \leqq x} N_r\left([g(n)]\,;\, b_1 \cdots b_l\right) = \frac{1}{r^l}\, x \cdot \log_r g(x) + O_{r,l,g}(x)$$
$$(x \to \infty)$$

となる.（[7]）

[定理2] 同じくもし $g(y) \in \mathbb{R}[y]$ ならば

$$\sum_{n \leqq x} N_r\left([g(n)]\,;\, b_1 \cdots b_l\right) = \frac{1}{r^l}\, x \cdot \log_r g(x) + O_{r,l,g}(x \cdot \log\log x)$$
$$(x \to \infty)$$

となる.（[7′]）

ここで，$n = [x]$ のときの $[g(1)][g(2)] \cdots [g(n)]$ を r 進表示と見たときの"桁数"は $[x] \cdot \log_r g([x]) + O([x]) = x \cdot \log_r g(x) + O(x)$ であるから θ_r について

[系1] 定理1の条件下に

$$\frac{1}{n} N_r(\theta_r\,;\, b_1 \cdots b_l\,;\, n) = \frac{1}{r^l} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \quad (n \to \infty),$$

[系2] 定理2の条件下に

$$\frac{1}{n} N_r(\theta_r\,;\, b_1 \cdots b_l\,;\, n) = \frac{1}{r^l} + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right) \quad (n \to \infty).$$

を得るので，$g(y) \in \mathbb{R}[y^{\wedge}\mathbb{R}_+]$ について θ_r は r-進正規数となる.

例として．任意の $\alpha > 0$，$\beta > 0$ について

$$\theta_r = 0.[\alpha][\alpha \cdot 2^{\beta}][\alpha \cdot 3^{\beta}][\alpha \cdot 4^{\beta}] \cdots$$

は r 進正規数である．

特に $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ のときは Schiffer [8] は

$$\sum_{n \leqq x} N_r([g(n)]; b_1 \cdots b_\ell) = \frac{1}{r^\ell} x \cdot \log_r g(x) + O_{r,\ell,g}(x)$$

を得ている。また簡単に Minsky [6] $(\ell = 1)$ の

$$\sum_{n < r^k + r^{k-1}} N_r(n; 1) = \frac{1}{r} \cdot (k r^k + (k-1) r^{k-1}) + r^{k-1}$$

より定理の error-term は一般には $\cdots + o(x)$ ではないことがわかる。

残された問題は

[?1] 定理2で $g(y) \in \mathbb{R}[y] \setminus \mathbb{Q}[y]$ について，誤差項を $\cdots + O(x)$ とせよ．

[?2] 誤差項が $\cdots + o(x)$ となるような $g(y)$ (の subclass) はあるか．

§3. Lemma 達

I. M. Vinogradov の指数和に関する評価 ([11], Lemma 6.12) をやり直して

[Lemma 1] $k, Q, N (\in \mathbb{N})$; $k \geqq 2$, $Q \geqq 2$, $Q \geqq N \geqq 1$; $P \in \mathbb{Z}$ および λ, δ を

$$\begin{cases} 0 < \lambda < 1/2 c_0(k+1) \\ \lambda \leqq \dfrac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t) \leqq c_0 \lambda & (P+1 \leqq t \leqq P+Q) \\ 0 < \delta \leqq k \\ Q^{-(k+1-\delta)} \leqq \lambda \leqq Q^{-1} & (c_0 \text{ は定数}) \end{cases}$$

とすると
$$\left|\sum_{n=p+1}^{p+N} e(f(n))\right| \ll_{(C_0,k,\delta)} Q^{1-\rho}$$
を得る。ただし $e(\xi) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\xi)$ であり，また
$$\begin{cases} R = 1 + \left[\log\left(\delta^{-1}k(k+1)^2\right) \big/ \log\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\right], \\ L = 1 + \left[\frac{1}{4}k(k+1) + kR\right], \\ \rho = \delta \big/ 16L(k+1) \end{cases}$$
とおいた．

およびWeyl和の評価として

[Lemma 2] $f(t) = A\cdot t^b + \cdots \in \mathbb{R}[t]$ ($A \neq 0$, At^b 最高次項)

$\frac{a}{q}$ 既約分数， $\left|A - \frac{a}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^2}$，

V 実数 $\geqq 1$

について，$b \geqq 2$ のとき
$$\left|\sum_{n=1}^{Q} e(f(n))\right| \ll_{\text{abs.}} Q \times \left(\frac{1}{Q} + \frac{(\log Q)^B}{V} + V\cdot\left(\frac{1}{q} + \frac{\log q}{Q} + \frac{1}{Q^{b-1}} + \frac{q\cdot\log q}{Q^b}\right)\right)^{\delta}$$
を得る．ただし，$\delta = \frac{1}{2^{b-1}}$ であり，B は $\sum_{n \leqq x}\left(\tau_{b-1}(n)\right)^2 \ll x\cdot(\log x)^B$ (as $x \to \infty$) を満す正定数（例えば $B = (b-1)^2 - 1$）である．

[系] Lemma 2 において $b \geqq 1$，および
$$(\log Q)^H \ll q \ll Q^b\cdot(\log Q)^{-B}$$
ならば
$$\left|\sum_{n=1}^{Q} e(f(n))\right| \ll Q\cdot(\log Q)^{-G}$$

を得る．ただし $H = B + 2^{s-1} \cdot 2G + 1$ である．

§4. 定理達の証明方針.

自然数 j ($\geq j_0 \gg 1$) について，自然数 n_j (≥ 1) を

$$r^{j-2} \leqq g(n_j) < r^{j-1} \leqq g(n_j + 1) < r^j$$

となるようにとる．つまり

$$n_j < n \leqq n_{j+1} \Rightarrow [g(n)] \text{ は } r \text{ 進 } j \text{ 桁}$$
$$(r^{j-1} \leqq g(n) < r^j)$$

となっている．大きさとしては

$$n_j \fallingdotseq r^{j/\beta},$$
$$n_{j+1} - n_j \fallingdotseq r^{j/\beta}$$

である．$x \longrightarrow +\infty$ に対し $J \in \mathbb{N}$ を $n_J < x \leqq n_{J+1}$ ($J = \log_r g(x) + O(1)$) とする．また $X_j = n_{j+1} - n_j$ ($j < J$) および $X_J = x - n_J$ とおくと $N_r(g(n)) = N_r([g(n)]; b_1 \cdots b_\ell)$ は

$$\sum_{n \leqq x} N(g(n)) = \sum_{j=j_0}^{J} \sum_{n;\, n_j < n \leqq n_j + X_j} N(g(n)) + O(1)$$

となる．周期 1 の関数

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k}{r^k} \leqq t - [t] < \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k}{r^k} + \frac{1}{r^\ell} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を使い

$$\sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} N(g(n)) = \sum_{m=\ell}^{j} \sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} I\left(\frac{g(n)}{r^m}\right)$$

と表して，次に，$I(t)$ を $I_-(t) \leqq I(t) \leqq I_+(t)$，

$$I_\pm(t) = \frac{1}{r^l} \pm \frac{1}{j} + \sum_{\nu=-\infty,\ \nu\neq 0}^{\infty} A_\pm(\nu)\cdot e(\nu t),$$

$$|A_\pm(\nu)| \ll \min\left(\frac{1}{|\nu|}, \frac{j}{|\nu|^2}\right)$$

におきかえて

$$\sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} N(g(n)) = \frac{j}{r^l} X_j + O(X_j) +$$

$$+ O\left(\sum_{m=l}^{j} \sum_{\nu=1}^{j^2} \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{j}{\nu^2}\right)\cdot\left|\sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} e\left(\frac{\nu}{r^m} g(n)\right)\right|\right)$$

となる．以下

$$S(j,m,\nu) = \sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} e\left(\frac{\nu}{r^m} g(n)\right)$$

とおく．

定理1については次のように細く場合分けして右辺最後の $\cdots + O(\cdots)$ が $\cdots + O(X_j)$ である事を示し証明了となる．以下 $\delta = 0+$（正定数，十分小）を表すものとする．

（Case 1）$\beta \notin \mathbb{N}$ (>0) のとき．

$(l \leqq)\ m \leqq \frac{j}{\beta}(\beta-\delta)$ なら Lemma 1 を $f(t) = \frac{\nu}{r^m} g(t)$ と $k = [\beta]+2$ に適用して

$$|S(j,m,\nu)| \ll r^{\frac{j}{\beta}(1-\rho)}$$

となる．他方 $\frac{j}{\beta}(\beta-\delta) \leqq m\ (\leqq j)$ なら f' についての van der Corput の Lemma（[11], Lemma 4.8 と 4.2）により

$$|S(j,m,\nu)| \ll \frac{1}{\nu} r^{\frac{j}{\beta}+m-j}$$

を得るので，これでよい．

(Case 2) $\beta, \beta_1, \cdots, \beta_{h-1} \in \mathbb{N}$, $\beta_h \notin \mathbb{N}$ (>0) $(h \geqq 1)$ のとき．仮に $b = \beta$ $(\in \mathbb{N})$，$r = \beta_h$ (>0) とおいて

$(l \leqq)$ $m \leqq \frac{j}{b}(r-\delta)$ ならLemma 1 を $f^{(b+1)}$ に適用して

$$|S(j, m, \nu)| \ll \nu^{\frac{j}{b}(1-\rho)}$$

となる。次に $\frac{j}{b}(b-1+\delta) < m$ $(\leqq j)$ なら，f' についてのv.d. Corput の Lemma により

$$|S(j, m, \nu)| \ll \frac{1}{\nu} \cdot \nu^{\frac{j}{b}+m-j}$$

となる．更に $b \geqq 2$ で $\frac{j}{b}(b-2+\delta) \leqq m \left(\leqq \frac{j}{b}(b-1+\delta)\right)$ ならば，f'' についての v.d. Corput の Lemma ([11], Lemma 4.7 と 4.4) により

$$|S(j, m, \nu)| \ll \frac{1}{\sqrt{\nu}} \cdot \nu^{\frac{j}{b}+\frac{1}{2}(m-j)} + \nu^{\frac{j}{b}(1-\frac{\delta}{4})}$$

となる．更にまた，$b \geqq 3$ で $\frac{j}{b}(r-\delta) \leqq m \leqq \frac{j}{b}(b-2+\delta)$ については Lemma 1 の証明を直接 $S(j, m, \nu)$ に適用して $(k=b-1)$

$$|S(j, m, \nu)| \ll \left(\nu^{\frac{j}{b}}\right)^{1-\rho}$$

を得るのでこれで定理 1 は了る．

定理 2 については，次の $(*)$ のような (m, ν) 以外は Lemma 2 の系を適用すればよい．今 $g(t) = \alpha \cdot t^b + \cdots$ とおいて

$$(*) \quad (\nu, m) ; \begin{cases} \frac{\nu}{\nu^m}\alpha \text{ は有理数近似 } \frac{a}{q} \text{ で} \\ \quad (a, q)=1, \quad \left|\frac{\nu}{\nu^m}\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^2} \\ \quad (\log X_j)^H < q \leqq X_j^b \cdot (\log X_j)^{-H} \end{cases}$$

$\left\{\right.$ となるものは存在しない。

という条件について，こういう (v, m) は order $X_j^6 (\log X_j)^{-H}$ の Farey 近似分数を考えれば，十分大きい正定数 C_1 により

$$(j \geq)\quad m > j - C_1 \log j$$

または

$$C_1 \log j > m \quad (\geq \ell)$$

となることがわかるので，関数 $I(t)$ を利用した段階で，そういう m を自明な評価にて $\cdots + O(X_j \log j) = \cdots + O(X_j \log\log x)$ として除いておくことにより証明を了る。

$g(t)$ が $g \in \mathbb{R}[t] \setminus \mathbb{Q}[t]$ のとき，係数に少し条件をつければ [?1] は示せるが条件なしで示す事は考察中である。

REFERENCES

[1] A.H.Copeland and P.Erdős, Note on normal numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 52(1946), 857-860.

[2] H.Davenport and P.Erdős, Note on normal decimals, Canadian J. Math., 4 (1952), 58-63.

[3] L.-K. Hua, Additive Theory of Prime Numbers, Translations of Mathematical Monographs, Vol.13(1965), American Math. Soc., Providence, Rhode Island.

[4] A.A.Karatuba, Foundations of Analytic Number Theory, Second Edition, Nauka(1983), (in Russian).

[5] L.Kuipers and H.Niederreiter, Uniform Distribution of Sequences, John Wiley and Sons(1974), New York.

[6] L.Mirsky, A Theorem on representations of integers in the scale of r, Scripta Math., 15(1947), 11-12.

[7] Y.-N.Nakai and I.Shiokawa, A class of normal numbers, to appear.

[7'] " " , " II, to appear.

[8] J.Schiffer, Discrepancy of normal numbers, Acta Arith.,47(1986), 175-186.

[9] I.Shiokawa, Asymptotic distributions of digits in integers, to appear.

[10] R.G.Stoneham, A general arithmetic construction of transcendental non-Liouville normal numbers from rational fractions, Acta Arith., 16(1970), 239-253.

[11] E.C.Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford Univ.Press (1951).

[12] R.C.Vaughan, The Hardy-Littlewood Method, Cambridge Tracts in Mathematics, 80(1981), Cambridge Univ. Press, London.