数理解析研究所講究録
708巻 1989年 107-112

形式的巾級数環の Hadamard 積

(Algebraic elements in formal power series rings II)

原瀬 巍 (Takashi Harase) (東工大.理)

SECTION 0. この稿では巾級数の Diagonal map, Hadamard 積 などについての最近の結果をまとめて述べる。

まず次の classical な proposition を考える. (cf. [2])

(*) Every algebraic function $\phi(z)$ is a coutour integral of a rational function of two variables: $\phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma} R(z,w)dw$.

(∵) $P(z,w)$ を $P(z,\phi(z))=0$, $\dfrac{\partial P}{\partial w}(0,0)\neq 0$ を満たす多項式とするとき $R(z,w)=\dfrac{w\frac{\partial P}{\partial w}}{P}$ とすればよい。 なぜならば $P(z,w)=(w-\phi(z))g(z,w)$ とおくと $\dfrac{w\frac{\partial P}{\partial w}}{P} = \dfrac{w}{w-\phi(z)} + \dfrac{w}{g(z,w)}$, $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{w}{g(z,w)}\, dw = 0$, $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{w}{w-\phi(z)}\, dw = 2\pi i\phi(z)$. □

さて、 $f(x,y)\in C(x,y)$ が等式 $\dfrac{w\frac{\partial P}{\partial w}}{P}=f(w,\frac{z}{w})\frac{1}{w}$ を満たすものとする。 このとき、 $f(x,y)=\sum_{n,m\geqq 0} a_{n,m}x^n y^m\in C[[x,y]]$ とすると $\phi(z)=\sum_{n\geqq 0} a_{n,n}z^n$ と書ける。 一般に Diagonal map $\mathcal{D}:k[[x_1\ldots x_m]]\to k[[x]]$ を $\mathcal{D}(\sum a_{n_1,\ldots,n_m}x_1^{n_1}\ldots x_m^{n_m})=\sum a_{n,\ldots,n}x^n$ で定義すると、次の定理がなりたつ。

Theorem(Furstenberg). Let $\phi\in k[[x]]$ be algebraic over $k(x)$, then ϕ is a diagonal of some rational $R(x,y)\in k(x,y)$. (k:field)

この定理の一般化、および逆をもとめることが以後の問題となった。

次に $f=\sum_{n\geqq 0} a_n x^n$, $g=\sum_{n\geqq 0} b_n x^n \in k[[x]]$ にたいして Hadamard, Hurwitz, Lamperti product をそれぞれつぎのように定義する。

$$f*g=\sum_{n\geqq 0} a_n b_n x^n,$$

$$f(H)g=\sum_{n\geqq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a_k b_{n-k}\right)x^n,$$

$$f(L)g=\sum_{n\geqq 0} c_n x^n,$$

ここで $c_n=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}a^i\, b^j\, c^k\, a_{i+k}\, b_{j+k}$ 。

このときあきらかに $f*g=\mathcal{D}(fg)$。

SECTION 1.

k を characteristic が 0 の体、x を indeterminate, $X/k(x)$を proper smooth variety とする。よくしられているように de Rham cohomology $H^i_{DR}(X)$ には "Gauss-Manin" connection が定義される：

$$\nabla : H^i_{DR}(X) \to H^i_{DR}(X) \otimes \Omega^1_{k(x)/k} \text{ 。}$$

このとき $\dim_{k(x)} H^i_{DR}(X)=l<\infty$ とすれば 各 $\omega \in H^i_{DR}(X)$ にたいして、

$$\left[\left(\nabla\left(\frac{d}{dx}\right)\right)^m-\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_j\left(\nabla\left(\frac{d}{dx}\right)\right)^j\right]\omega=0\ ,\ \gamma_j\in k(x)$$

となるγ_j (depend on ω) がある。 γ_j の denominator の 最小公倍数を $\delta\in k[x]$ とする。

さてこの δ にたいして $k[x,\frac{d}{dx}]$ の元 $\delta\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m-\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_j\left(\frac{d}{dx}\right)^j\right]$ の形の元の直和因子の積を geometric differential equation(g.d.e) ということにする。 また g.d.e. の解となる巾級数も g.d.e. とあらわす ことにする。

数体 K 上の巾級数 $f=\sum_{n\geqq 0} a_n x^n (a_n\in K)$ はつぎの 条件をみたすとき G-function という。

1. a_n の conjugates と l.c.m.{den(a_l); l ≦ n} の absolute values は c^n の order,

2. f は k(x) 上の homogeneous linear differential equation の解。

K が数体、一変数 (m=1) の場合 Hadamard 積についてしられていることを表にすると次のようになる。

*	rational	algebraic	g.d.e.	G-function
rational	rational	algebraic	g.d.e.	G-function
algebraic	algebraic	g.d.e.	g.d.e.	G-function
g.d.e.	g.d.e.	g.d.e.	g.d.e.	G-function
G-function	G-function	G-gunction	G-function	G-function

注意１。 最近 Woodcock-Sharif は m=2 のとき rational*rational=algebraic を証明したが、一般の m については rational*rational も未知である。
注意２。 上の表の証明は Andre [1] 参照。 Hadamard 積 および Diagonal に関して多数の予想があるが、あまりにおおすぎるので、全て省略する。

SECTION 2.

k を char(k)=p>0 の 体 f,g は $k[[x_1,\dots,x_m]]$ の元 とするとき Hadamard 積 f*g について考える。 標数 0 の場合と異なって次の表はふしぎなことに m(m>0)-変数の形式的巾級数環でなりたつ。

*	rational	algebraic	?
rational	(rational)	algebraic	?
algebraic	algebraic	algebraic	?
?	?	?	?

(rational) は m=1 のとき rational、 m>1 のとき algebraic を意味する。
Hurwitz,Lamperti 積についても同様。 また $f \in k[[x_1,\dots,x_m]]$ が algebraic/$k(x_1,\dots,x_m)$ ならば $\mathcal{D}$(f) も algebraic/k(x) である。

上の結果は以前得た次の定理から出る。(cf.[3])

Theorem 0'. The following conditions are equivalent.

(a) f is algebraic

(b) f is contained in A-stable $k(\mathbf{x})$-finite submodule $M \subset K$.

(c) f is contained in A-stable k-finite suspace $V \subset K$.

ここで $K=k((\mathbf{x}))=k((x_1,\ldots,x_m))$ とする。 また q を p のべき、 $\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_m)$, $0<r_i<q$ とするとき。

$f=\sum a_{\mathbf{n}}x^{\mathbf{n}}$ にたいして $A_{\mathbf{r}}(\mathbf{f})=\sum (a_{q\mathbf{n}+\mathbf{r}})^{1/q}x^{\mathbf{n}}$ とする。 また subset $M\subset k((\mathbf{x}))$ が A-stable とは $f\in M \Rightarrow A_{\mathbf{r}}(f)\in M$ で定義する。

この定理を見直すことによってつぎの定量的な結果を得た。(cf.[4]) ここで $\mathrm{size}(f)=\max_i\{\deg_{x_i}(f)\}$ とする。

Theorem 0''. Let f and g be elements in $k[[\mathbf{x}]]=k[[x_1,\ldots,x_m]]$.

(a) If f is an element in $k((\mathbf{x}))$ of degree at most d and size at most s then the diagonal $\mathcal{D}(f)$ is algebraic of degree at most

$$p^{d[(p^{d-2}+1)(p^{d+1}-1)/(p-1)-s(p^{d-2}+1)p^{-w}(d^2-1)+1]^m}$$

where w is the smallest integer with $p^w \geq d$.

(b) If f (resp. g) is algebraic of degree d_1 (resp. d_2) and size s_1 (resp. s_2) then the Hadamard product $f*g$ is algebraic of degree at most

$$\exp\{\log(p)\cdot d_1 d_2$$
$$[s_1(p^{d_1-2}+1)(p^{d_1+1}-1)/(p-1)-s_1(p^{d_1-2}+1)p^{-w_1}(d_1^2-1)+1]^m$$
$$[s_2(p^{d_2-2}+1)(p^{d_2+1}-1)/(p-1)-s_2(p^{d_2-2}+1)p^{-w_2}(d_2^2-1)+1]^m\}.$$

where w_i is the smallest integer with $p^{w_i} \geq s_i$.

証明の概略。 Th.0' の証明は (a)=>(c)=>(b)=>(a) の順で行った。その際次の事実があった。

(1) $\dim_k(V) \geqq \dim_{k(\mathbf{x})}(M)$,

(2) M contains all q^i -th powers of f,

(3) If f sutisfies a nontrivial equation $a_d f^{q^d} + a_{d-1} f^{q^{d-1}} + \dots + a_0 f = 0$ with $a_i \in k[\mathbf{x}]$ and size$(a_i) \leqq c$, then $\dim_k(V) \leqq d \cdot (q^{d-2}+1)c+1)^m$.

更に、次の Lemma を新たに用意する。

Lemma. If f is algebraic with degree d and size s, then f sutisfies the following non-trivial equation over $k[\mathbf{x}]$:

(*) $c_d f^{q^d} + c_{d-1} f^{q^{d-1}} + \dots + c_0 f = 0$ size$(c_j) \leqq c$ where $c = s[(q^{d+1}-1)/(q-1) - q^{-w}(d^2-1)]$.

さて f が Lemma の条件をみたすとすると、この Lemma から c が上から評価出来る。(3) から $\dim_k(V)$ が評価出来るので diagonal $\mathscr{D}(f)$ をふくむ $\mathscr{D}(V)$ の次元が評価出来る。 $\mathscr{D}(V)$ に対して (1), (2) を用いることによって $\mathscr{D}(f)$ の k(x) 上の degree を上から評価できる。 Hadamard, Hurwitz, Lamperti 積などついても同様である。

注意３。 geometric differential equation は characteristic が p>0 のときも 定義できるが、その解の例である hyper geometric functions は mod p で（それが定義できるとき） algebraic になってしまう。

注意４。 上記の表で ？ は 何か？ それが？である。

REFERENCES

[1] Andre Y.:G-functions and geometry, Aspect of Math. E13, Vieweg, Wiesbaden (1989).

[2] Furstenberg H.: Algebraic function over finite field", J. of Alg. vol.7.

[3] Harase T.: Algebraic elements in formal power series rings, Israel J. of Math, vol.63, No.3, 1988.

[4] –: Algebraic elements in formal power series rings II, to appear.