数理解析研究所講究録
710巻 1989年 54-67

負曲率閉曲面の測地流に対応する Anosov微分同相写像について

東大 理　橋口 徳一
Norikazu HASHIGUCHI

1. INTRODUCTION.

ここでは、負曲率をもつ有向閉曲面の測地流に対応する Birkhoff's section とその上の Anosov 微分同相写像について論ずる。

Birkhoff は、[B] において、Lagrange の運動方程式の解の位相的な性質を研究する中で、surface of section (= Birkhoff's section) を定義した。その後 [F] において、Fried が、負曲率をもつ閉曲面の測地流に対する Birkhoff's section を構成し、この section についての first return map から測地流を再構成する方法を示した。最近になって Ghys がこの first return map が hyperbolic toral automorphism と半共役であることを示し、更にその行列の trace を計算している。ここでは、その行列の共役類を決定し、Fried の方法を用いて測地流をその行列から具体的に構成する。

2. BIRKHOFF'S SECTION.

Σ_g : 種数 $g\ (\geqq 2)$ の有向閉曲面で負曲率をもつ metric を決めておく.

$F_t : T_1\Sigma_g \longrightarrow T_1\Sigma_g \quad (t \in \mathbb{R})$: その metric についての測地流

($T_1\Sigma_g$ は単位接ベクトル束)

Fried は F_t についての Birkhoff's section を以下のように構成した。

$G_1, G_2, \cdots, G_{2g+2}$ を図1に示す単純閉測地線とおく。

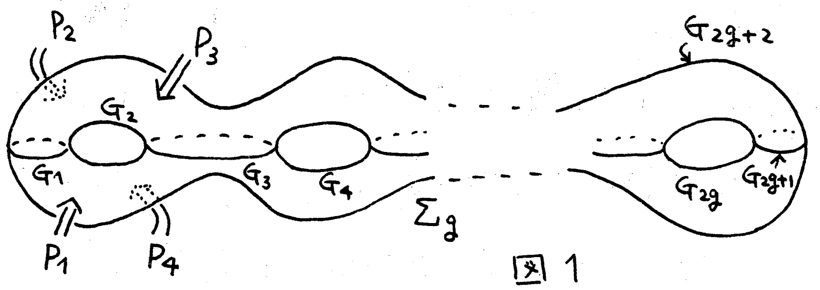

図1

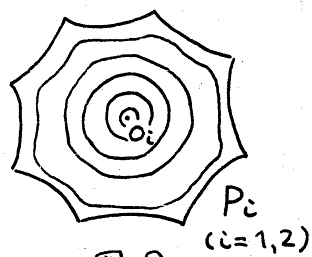

図2

これらの測地線によって Σ_g は 4つの $2g+2$ 角形に分割される。図1のように P_1, P_2, P_3, P_4 と呼ぶ。更に P_1, P_2 上に図2のような1個だけ特異点を持つ、凸で滑らかな単純閉曲線の族 C_1, C_2 を考える(特異点を O_1, O_2 とする。) 今、

$S = \{ C_1, C_2$ の各閉曲線に接する長さ1のベクトル$\}$ の $T_1\Sigma_g$ における閉包

と定義する。S は次のような性質を持っている。

1. S は滑らかな有向曲面で、F_t の $\underbrace{\text{閉軌道}}_{4g+4\text{個の}}$ からなる境界を持っている。

2. S の内部 $S \setminus \partial S$ は F_t と横断的に交わり、first return map $F: S \setminus \partial S \longrightarrow S \setminus \partial S$ は S の微分同相写像 $\tilde{F}: S \to S$ へ拡張する。

3. S の Euler 数は $-(4g+4)$ である。

従って S は、2次元トーラス T^2 から $4g+4$ 個の開円板を取り除いた曲面と微分同相である。

今後必要となるので、S についてもう少し詳しく述べる。

$S_i = S \cap p_0^{-1}(P_i)$ $(i=1,2)$ とおく。（ここで $p_0: T_1\Sigma_g \to \Sigma_g$ は projection である。）S_i は O_i 上の fibre を中心線とする円筒である。D を Σ_g の普遍被覆である Poincaré disk とし、その単位接ベクトル束の自然な自明化 $t: T_1 D \to D \times S^1$ を $v \in T_1 D$ に対して $t(v) = (p(v), e(v))$ と定義する。

（ここで $p: T_1 D \to D$ は projection，
$e: T_1 D \to S^1 = \partial D$ は、$v \in T_1 D$ に対して $p(v)$ を v 方向に出発した測地線が達する ∂D の点を対応させる写像

∂D には反時計回りの向きを与え、P_i の D への lift を図3のように固定しておく。すると、D は被覆変換によって P_i のいずれかと同一視される無限個の $2g+2$ 角形に分割される。

C_{i+} と C_{i-} $(i=1,2)$ を C_i の閉曲線にそれぞれ反時計回り，時計回りの向きを与えた、特異点を1個もつ有向閉曲線の族とする。円筒 S_i を $T_1 D$ に含まれると考えて、次のように座標を

定める。$\delta_{i\pm}$ を S_i の境界成分で $C_{i\pm}$ の境界に対応しているものとする。$\delta_{i\pm}$ は ある閉測地線 G_k の T_iD への lift に含まれる部分 $h_{i\pm}^{j}$ とそうでない部分 $v_{i\pm}^{j}$ $(j=1,2,\dots,2g+2)$ の $4g+4$ 個の線分に分割できる。そして S_1 と S_2 から S を得るには v_{1+}^{j} と $v_{2-}^{j'}$, $v_{2+}^{j''}$ と $v_{1-}^{j'''}$ とを貼り合わせれば良い。従って $\{h_{i\pm}^{j}\}_{i=1,2,\ j=1,2,\dots,2g+2}$ は S の境界となる部分である。

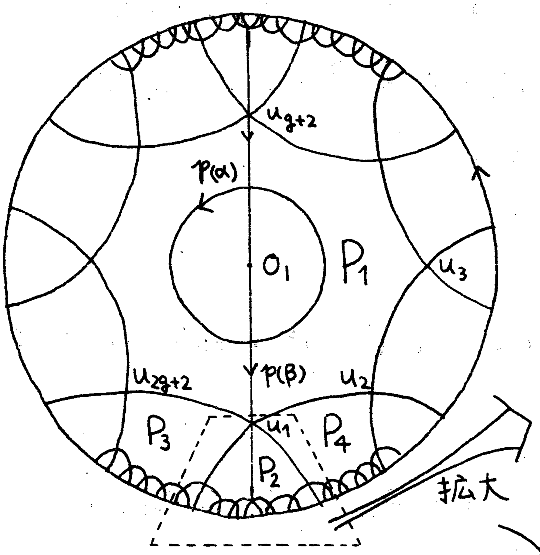

図3.

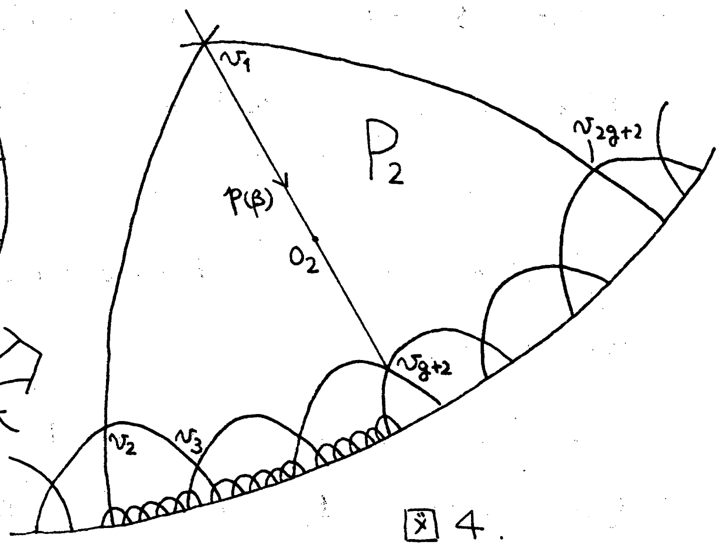

図4.

$m_i : S_i \longrightarrow S^1$ を e を S_i に制限した写像とする。$S_i \setminus \partial S_i$ は、開区間 $m_i^{-1}(a)$ $(a \in S^1)$ に分割される。$S_i \setminus \partial S_i$ と $(0,1)\times S^1$ の同一視を $m_i^{-1}(a)$ が $(0,1)\times\{a\}$ に対応し、$\{t\}\times S^1$ $(t\in(0,1),\ t \neq \frac{1}{2})$ は $0<t<\frac{1}{2}$ の時 C_{i+} の閉曲線の lift と対応し、$\frac{1}{2}<t<1$ の時 C_{i-} の閉曲線の lift と対応するように定める。$k_i : S_i \setminus \partial S_i \longrightarrow (0,1)$ をその projection とする。

$\hat{S}_i$ を S_i の各境界をそれぞれ1点につぶして得られる円筒とする。k_i の拡張を $\hat{k}_i : \hat{S}_i \to [0,1]$ と書く。又、m_i は各境界を1点に写していたので m_i の拡張 $\hat{m}_i : \hat{S}_i \to S^1$ も定義できて $\hat{k}_i \times \hat{m}_i : \hat{S}_i \to [0,1] \times S^1$ なる同一視が得られる。

$\hat{S}$ を S の各境界成分を1点につぶして得られる2次元トーラスとし $\hat{F} : \hat{S} \longrightarrow \hat{S}$ は $\tilde{F}$ から得られる $\hat{S}$ の同相写像とする。この時 Ghys は次を示した。([G])

Theorem A. $\hat{F}$ は hyperbolic toral automorphism と位相共役である。

すなわち $A_g \in SL(2,\mathbb{Z})$ $|\mathrm{trace}\, A_g| > 2$ があって、更に 同相写像 $H : T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \hat{S}$ によって

$$\hat{A_g} = H^{-1} \circ \hat{F} \circ H$$

と書ける。(ここで $\hat{A_g}$ は A_g が $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ へひきおこす微分同相写像である。)

筆者は A_g の $SL(2,\mathbb{Z})$ における共役類を決定した。

(注) Ghys は A_g の trace をも計算しているが、$SL(2,\mathbb{Z})$ の共役類は trace では決まらない。([S-F])

<u>Theorem B.</u>　$\hat{S}$ のある basis の下で A_g は次の形に書ける。

$$A_g = \begin{pmatrix} 2g^2-1 & 2g(g-1) \\ 2g(g+1) & 2g^2-1 \end{pmatrix} = \left(- \begin{pmatrix} g & g-1 \\ g+1 & g \end{pmatrix} \right)^2$$

3. Theorem B. の証明のあらすじ.

A_g の成分を求めるには、次の事を行う。T^2 の basis $\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle$ を $\pi_1(T^2)$ の生成元となる単純閉曲線の組とする。$\hat{A}_g$ の $\pi_1(T^2)$ への作用を $\hat{A}_{g*}$ とするとき

$$\hat{A}_{g*}[\tilde{\alpha}] = a[\tilde{\alpha}] + b[\tilde{\beta}]$$
$$\hat{A}_{g*}[\tilde{\beta}] = c[\tilde{\alpha}] + d[\tilde{\beta}] \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

（$[\tilde{\alpha}], [\tilde{\beta}]$ は $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ の代表する $\pi_1(T^2)$ の元）

と書けているならば、A_g は次の様になる。

$$A_g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

まず $\hat{S}$ の basis を決める。初めに、C_{1+} の元で O_1 の近くの単純閉曲線を選び、その $T_1\Sigma_g$ への lift を α とおくと、α は $S \setminus \partial S$ の中の単純閉曲線である。P_1 と P_2 の頂点を図 3, 4 に示すように反時計回りにそれぞれ $u_1, u_2, \cdots, u_{2g+2}$ と $v_1, v_2, \ldots, v_{2g+2}$ と呼ぶことにする。このとき $u_{g+2}, O_1, u_1 = v_1, O_2, v_{g+2} = u_{g+2}$ をこの順に通過する $P_1 \cup P_2$ 内の単純閉曲線

の $\pi_1\Sigma_g$ への lift を β とおく。(この lift は実際には、線分 $(u_{g+2}, 0_1)$ の持ち上げが $k_1^{-1}(0, \frac{1}{2})$ に存在するものと、$k_2^{-1}(\frac{1}{2}, 1)$ に存在するもの の 2通りあるが 今は $k_1^{-1}(0, \frac{1}{2})$ へ $(u_{g+2}, 0_1)$ が持ち上がっている方 を考える。) β は $S \setminus \partial S$ 内の単純閉曲線である。α, β ともに $S \setminus \partial S$ に含まれるので、$\hat{S}$ 内の単純閉曲線 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を表す。

<u>Lemma.</u> $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は $\hat{S}$ の basis をなす。

$\because$ α と β は $S \setminus \partial S$ において 横断的にただ1度だけ交わっている。$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ も $\hat{S}$ において同様のことを満たし 従って $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は $\pi_1(\hat{S})$ の生成元を表している。//

$\hat{S}$ を得るときに、S_1 と S_2 の $\nu^{1}_{i\pm}$ と $\nu^{2}_{i\pm}$ をはり合わせて S をつくり ∂S の各成分を 1点につぶす 操作を行った。従って 順序を逆にして、$\hat{S}_1$ と $\hat{S}_2$ をそれらの境界 $\hat{\delta}_{i\pm}$ ではり合わせても $\hat{S}$ を得ることができる。$\hat{m}_i$ を $\hat{\delta}_{i\pm}$ に制限すると、S^1 の向きを保つ同相写像となるが、これによって $\hat{\delta}_{i\pm}$ と $\partial D = S^1$ とを同一視する。$\hat{\delta}_{1+}$ と $\hat{\delta}_{2-}$, $\hat{\delta}_{2+}$ と $\hat{\delta}_{1-}$ のはり合わせの写像は、∂D の同相写像と見ることができる。又, $\hat{k}_1^{-1}(0) = \hat{\delta}_{1+}$, $\hat{k}_2^{-1}(1) = \hat{\delta}_{2-}$, $\hat{k}_2^{-1}(0) = \hat{\delta}_{2+}$, $\hat{k}_1^{-1}(1) = \hat{\delta}_{1-}$,

であるので、$k : \hat{S} \longrightarrow S^1 = [0,2]/0\sim 2$ なる写像を

$$\begin{cases} \hat{k}_1(x) & x \in \hat{S}_1 \\ \hat{k}_2(x)+1 & x \in \hat{S}_2 \end{cases}$$

と定義できる。

C_i の単純閉曲線は なので m_1 を α に制限した写像 $m_1|\alpha$ は向きを保つ同相写像である。又、β は S において δ_{1+} の点を出発し $p^{-1}(O_1)$, $\delta_{1-} = \delta_{2+}$, $p^{-1}(O_2)$ $\delta_{2-} = \delta_{1+}$ を横切る。$p(\beta)$ は C_i の元と横断的に交わるので、$\tilde{\beta}$ も $k^{-1}(a)$ ($a \in S^1 = [0,2]/0\sim 2$) と横断的に交わっている。従って $k|\tilde{\beta}$ も向きを保つ同相写像である。

以上のことから次のことがわかる。

◎ γ を $\hat{S}$ の閉曲線としたとき、$\pi_1(\hat{S})$ において

$$[\gamma] = a[\tilde{\alpha}] + b[\tilde{\beta}] \qquad a, b \in \mathbb{Z}$$

が成立していることと以下は同値である。

まず $k(\gamma)$ が $S^1 = [0,2]/0\sim 2$ を b 回巻いている。(ここで $S^1 = [0,2]/0\sim 2$ には自然な向きを与えておく。)

次に γ' を $\hat{S}_1$ の閉曲線で $\pi_1(\hat{S})$ において $[\gamma] - b[\tilde{\beta}]$ を表しているものとすると、$\hat{m}_1(\gamma')$ は $S^1 = \partial D$ を a 回巻いている。

(ここでは $\pi_1(\hat{S})$ と free homotopy class $[S^1, \hat{S}]$ とを区別していない。)

この手順に従って $\hat{F}(\tilde{\alpha})$, $\hat{F}(\tilde{\beta})$ が $\pi_1(\hat{S})$ の元としてどのように表されるかを求めることができる。実際に計算してみると

$$\hat{F}_*[\tilde{\alpha}] = (2g^2-1)\,[\tilde{\alpha}] + 2g(g+1)\,[\tilde{\beta}]$$
$$\hat{F}_*[\tilde{\beta}] = 2g(g-1)\,[\tilde{\alpha}] + (2g^2-1)\,[\tilde{\beta}]$$

となる。これで Theorem B. は示された。

4. F_t の再構成.

Fried は、ある条件を満たす擬 Anosov 写像から、3次元閉多様体上の transitive な Anosov 流を構成した。ここでは、彼の方法を用いて A_g から測地流 F_t を具体的に構成する。

$x_1, x_2, \cdots, x_{4g+4} \in T^2$ を $\hat{A}_g : T^2 \to T^2$ の固定点とし、$T_0 = T^2 \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_{4g+4}\}$ とおく。T は T_0 の自然な compact 化とする。$\hat{A}_g|T_0$ によって $\dot{A}_g : T \longrightarrow T$ なる同相写像が得られ、それは各境界の S^1 を自分自身に写している。$\dot{A}_g$ の mapping torus を M^*, $\dot{A}_g$ の suspension flow を $\phi_t^* : M^* \longrightarrow M^*$ とおく。M^* の境界は、$x_1, x_2, \cdots, x_{4g+4}$ に対応して $4g+4$ 個のトーラス $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{4g+4}^*$ から成る。各 x_i^* には $\underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_1(x_i^*)}}$ の座標系を次のように与える。

i) 1番目の生成元は meridian $m \in H_1(x_i^*)$ で、
$\phi_t^*|x_i^*$ の閉軌道の1つが代表している。

ii) 2番目の生成元は longitude $l \in H_1(x_i^*)$ で、
mapping torus $M^* \longrightarrow S^1$ の fibre の境界に時計回りの向きを与えた閉曲線が代表している。(図5)

x_i^* は、$\phi_t^*|x_i^*$ の全ての軌道と横断的に交わり $H_1(x_i^*)$ において $m+l$ を代表する S^1 を葉とするfoliationを持っている。このfoliationの各葉を1点につぶすことによって新しいflow $\phi_t : M \longrightarrow M$ が得られ、実はこの ϕ_t は測地流 F_t と位相共役である。このようにして $x_1, x_2, \cdots, x_{4g+4}$ をうまく選べば F_t が位相的に再構成されるのである。

(注) 位相的に考えれば、M は $\hat{A}_g$ の mapping torus に $4g+4$ 回 $(1,1)$-Dehn surgery を行って得られた。

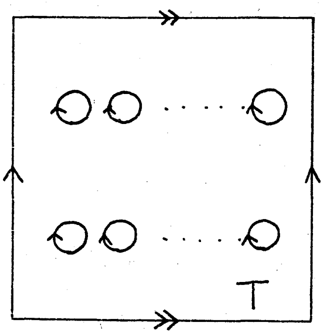

図5.

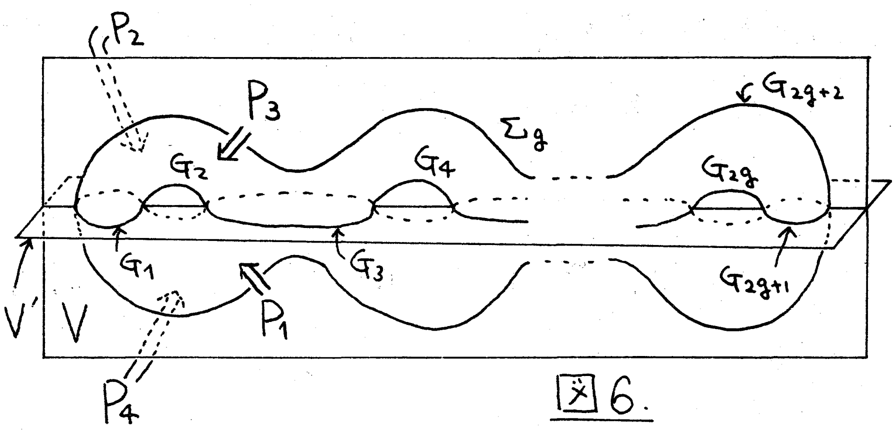

図6.

そこで、$4g^2-4$ 個ある $\hat{A}_g$ の固定点の中から $x_1, x_2, \ldots, x_{4g+4}$ を選び出す。そのためには、A_g が $B_g = \begin{pmatrix} -g & -(g-1) \\ -(g+1) & -g \end{pmatrix}$ の2乗の形をしている理由を知ることが有効である。V を図6に示す様な、$G_2, G_4, \ldots, G_{2g+2}$ を含む平面とする。V についての対称変換 $\tau : \Sigma_g \to \Sigma_g$ とおく。$\tau(P_1)=P_4$, $\tau(P_2)=P_3$ となっている。P_3、P_4 の単純閉曲線の族をそれぞれ $C_3=\tau(C_2)$, $C_4=\tau(C_1)$ で定義する。C_1, C_2 の時と同様に C_3, C_4 から P_3、P_4 上の F_t に対する section $S_3, S_4 \subset T_1\Sigma_g$ が得られ $S' = S_3 \cup S_4$ は F_t に対する Birkhoff's section となる。S と S' は互いの境界部分が貼り合わさって $S \cup S'$ は閉曲面であり $F' : S\cup S' \longrightarrow S \cup S'$ を F_t に対する "first return map" から得られる写像とする。C_i $(i=1,2,3,4)$ の閉曲線は だったので $F'(S)=S'$, $F'(S')=S$ であり、$F=(F'|S')\circ(F'|S)$ が成立する。τ が単位接ベクトル束へ誘導する写像を $T_1\tau : T_1\Sigma_g \to T_1\Sigma_g$ とおくと、$(T_1\tau)\circ(T_1\tau)=id_{T_1\Sigma_g}$, $T_1\tau(S)=S'$ を満たす。測地流 F_t と $T_1\tau$ は、V をうまく取れば可換なので次が成立する。

<u>Lemma.</u> F' と $T_1\tau$ は可換である。すなわち $F'\circ(T_1\tau)=(T_1\tau)\circ F'$.

従って $F'|S' = (T_1\tau|S')\circ(F'|S)\circ(T_1\tau|S)^{-1} = (T_1\tau|S')\circ(F'|S)\circ(T_1\tau|S')$.

$$F=(F'|S')\circ(F'|S)=(T_1\tau|S')\circ(F'|S)\circ(T_1\tau|S')\circ(F'|S)=\{(T_1\tau|S')\circ(F'|S)\}^2.$$

$\hat{S}'$ を S' の各境界成分を1点につぶして得られる2次元トーラスとし $\widehat{T_1\tau}|\hat{S}'$, $\hat{F}'|\hat{S}$ を $T_1\tau|S'$, $F'|S$ から誘導される写像とする。すると、上の事から $\hat{F}=\{(\widehat{T_1\tau}|\hat{S}')\circ(\hat{F}'|\hat{S})\}^2$ となる。従って $\hat{B}_g$ を B_g が $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ へひきおこす微分同相写像とすると、$\{H^{-1}\circ(\widehat{T_1\tau}|\hat{S}')\circ(\hat{F}'|\hat{S})\circ H\}^2=\hat{A}_g=(\hat{B}_g)^2$ が成立するので、次は容易にわかる。

Proposition. $H^{-1}\circ(\widehat{T_1\tau}|\hat{S}')\circ(\hat{F}'|\hat{S})\circ H=\hat{B}_g$.

V' を図6に示す様な、$G_1, G_3, \cdots, G_{2g+1}$ を含む平面とし $\tau': \Sigma_g \longrightarrow \Sigma_g$ を V' についての対称変換、$T_1\tau': T_1\Sigma_g \longrightarrow T_1\Sigma_g$ を τ' から得られる写像、$\widehat{T_1\tau'}|\hat{S}'$ は $T_1\tau'|S'$ が誘導する写像とする。$\hat{B}_g(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ を アフィン写像 $\begin{pmatrix} B_g & \begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix} \\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ へひきおこす微分同相写像とすると Proposition を成立させる普遍被覆 $\pi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2$ の下で、上と同様にして次が示される。

$$H^{-1}\circ(\widehat{T_1\tau'}|\hat{S}')\circ(\hat{F}'|\hat{S})\circ H=\hat{B}_g\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right).$$

閉測地線 G_i は、2通りの向きを持ち得るので、$T_1\Sigma_g$ への lift は2通りあるが、それを $+G_i$, $-G_i$ と書く。$\{x_1, x_2, \cdots, x_{4g+4}\}$

は S の境界に対応する $\hat{S}$ の点である。$\partial S = \{\pm G_1, \pm G_2, \cdots, \pm G_{2g+2}\}$ であり、$\{\pm G_1, \pm G_3, \cdots, \pm G_{2g+1}\}$ は、$(\hat{T}_{1\tau}^{-1}|\hat{S}^{-1}) \circ (\hat{F}^{-1}|\hat{S})$ の固定点に対応し、$\{\pm G_2, \pm G_4, \cdots, \pm G_{2g+2}\}$ は $(\hat{T}_{1\tau}|\hat{S}^{-1}) \circ (\hat{F}^{-1}|\hat{S})$ の固定点に対応している。従って、T^2 で考えると、$\{x_1, x_2, \cdots, x_{4g+4}\}$ は、$\hat{B}_g$、$\hat{B}_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の固定点となっている訳だが、$\hat{B}_g$、$\hat{B}_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の固定点の数はともに $2g+2$ 個であり、共通な固定点はないので

$$\begin{aligned}\{x_1, x_2, \cdots, x_{4g+4}\} &= \mathrm{Fix}(\hat{B}_g) \cup \mathrm{Fix}(\hat{B}_g(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) \\ &= \{\pi(\frac{a}{2(g+1)}, b)\ ;\ b = 0, \tfrac{1}{2}\quad a = 0, 1, 2, \cdots, 2g+1\}.\end{aligned}$$

従って

<u>Theorem. C.</u>　行列 A_g から測地流 F_t を構成するためには、次のことを行えば良い。

1. まず $\hat{A}_g$ の suspension flow を作る。
2. 次に $\{\pi(\frac{a}{2(g+1)}, b) \in T^2 ; b = 0, \frac{1}{2}\quad a = 0, 1, 2, \cdots, 2g+1\}$ に対応する、suspension flow の閉軌道について、Fried の $(1,1)$-Dehn surgery を行う。

こうしてできた 3次元閉多様体上の flow は測地流 F_t と位相共役である。

References

[A] Anosov, D.V., Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature, Proc. Steklov Inst. Math. 90, 1-235 (1967).

[B] Birkhoff, G.D., Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom, Trans. Amer. Math. Soc. 18, 199-300 (1917).

[F] Fried, D., Transitive Anosov Flows and Pseudo-Anosov Maps, Topology vol. 22, no. 3, 299-303 (1983).

[G] Ghys, E., Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey, Ann. Inst. Fourier 37, 59-76 (1987).

[S-F] Sakamoto, K. and Fukuhara, S., Classification of T^2 bundles over T^2, Tokyo J. Math. vol. 6, no. 2, 311-327 (1983).