数理解析研究所講究録
711巻 1989年 22-38

積空間 $X\times X$ の次元と $E(X,\mathbb{R}^{2n})$ の $C(X,\mathbb{R}^{2n})$ における稠密性

山口大・教育　服部 泰直 (Yasunao Hattori)

§1 Introduction.

ここで考える空間は、すべて距離空間とする。

<u>定義1.1</u> 空間 X から n 次元立方体 I^n への写像 $f: X\to I^n$ は、$f|_{f^{-1}(\partial I^n)} = g|_{f^{-1}(\partial I^n)}$ となる写像 $g: X\to \partial I^n$ が存在しないとき、<u>*essential*</u> と呼ばれる。このことは、f の任意の *admissible deformation* が *surjective* であることと、同等である。

<u>定義1.2.</u> 写像 $f: X\to I^n$ と X の部分集合 A に対して、$f|_A: A\to I^n$ が *essential* となるとき、A を f の <u>*membrane*</u> という。

よく知られているように、I^2 の2つの *subcontinuum* A と B で、A が I^2 の一組の *opposite faces* と交わり、B

が、もう一方の opposite faces と交わるならば、$A \cap B \neq \phi$ である。ここで、$\pi_1 : I^2 \to I$ を I^2 から第一座標への射影とし、$\pi_2 : I^2 \to I$ を I^2 から第二座標への射影とする。このとき、上のことは、次のように言い換えることができる。

「A を π_1 の compact membrane，B を π_2 の compact membrane とすると、$A \cap B \neq \phi$ である。」

McCullough－Rubin [8] は、この結果を、より高い次元で成り立つかどうか考えた。即ち、次の問題を考えた。

McCullough－Rubin の問題　$f = (f_1, f_2) : X \to I^m \times I^n$ を同相写像とし、A, B をそれぞれ f_1, f_2 の compact membranes とする。このとき、$A \cap B \neq \phi$ が成り立つであろうか？

そして彼らは、次の定理を発表した。

定理A（McCullough－Rubin [8]）．m, n を正の整数とし、$p_1 : I^m \times I^n \to I^m$，$p_2 : I^m \times I^n \to I^n$ を射影とする。更に、A, B をそれぞれ p_1, p_2 の compact membranes とする。このとき、$\dim A = m$，$\dim B = n$ ならば、$A \cap B \neq \phi$ である。

空間Xに対して

$$C(X, \mathbb{R}^{2n}) = \{ f \mid f : X \to \mathbb{R}^{2n} \text{ is continuous} \}$$
with the sup-norm topology

とし、

$$E(X, \mathbb{R}^{2n}) = \{ f \mid f \in C(X, \mathbb{R}^{2n}) \text{ and } f \text{ is an homeo. embedding} \}$$

とする。さて、McCullough - Rubin は、定理Aを使って次を証明した。

<u>定理B.</u> (McCullough - Rubin [8, Thm. 3.7]).
compactum Xに対し、$E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ で稠密であることと、$\dim X < n$ であることが同等である。

ところが、最近 Krasinkiewicz - Lorentz は、[7] の中に誤りを見つけ、定理Aに対する反例を構成した。

<u>定理C</u> (Krasinkiewicz - Lorentz [7]). 任意の $m \geq 2$, $n \geq 2$ に対し、$A \cap B = \phi$ なる m-dimensional compact membrane A of $p_1 : I^m \times I^n \to I^m$ と n-dimensional compact membrane B of $p_2 : I^m \times I^n \to I^n$ が、存在する。

従って、次に定理Bの真偽も問われることになった。これについても最近、McCullough - Rubin 自身により否定されることになった。

<u>定理D</u>（McCullough - Rubin [9]）．任意の $n \geqq 2$ に対し、$E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ において稠密である n 次元 compactum X が存在する。

<u>注意</u>　$n = 1$ の場合については、定理Bは正しいことに注意しておく。すなわち、

$\dim X = 0 \Leftrightarrow E(X, \mathbb{R}^2)$ は $C(X, \mathbb{R}^2)$ で稠密

そこで、彼らは n 次元 compactum X について "$E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ で稠密である" という条件が "$\dim X \times X < 2n$" という条件となんらかの関係がないだろうか？という問題を提起した。ここでは、この問題に1つの解答を与えた Krasinkiewicz の結果について解説する。

§2. 定理とその証明

本稿で解説する結果は、次である。

<u>定理 2.1</u> (Krasinkiewicz [6, Thm 1.1]) $n \geqq 1$ とし、X を $\dim X = n$ なる compactum とする。このとき、$E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ で稠密であるならば、$\dim X \times X < 2n$ である。

定理を証明するには、いくつかの補題が必要である。

<u>補題 2.1</u> ([7, Lemma 2.2]) 写像 $f = (f_1, f_2): X \to I^m \times I^n$, $g = (g_1, g_2): Y \to I^m \times I^n$ が $f(X) \cap g(Y) = \emptyset$ を満たすとする。このとき、$f_1 \times g_2: X \times Y \to I^m \times I^n$ は inessential である。

証明　今 $f_1 \times g_2$ が essential であると仮定する。このとき $f_1 \times g_2$ は universal である, i.e. 任意の写像 $h: X \times Y \to I^m \times I^n$ に対し $(f_1 \times g_2)(x, y) = h(x, y)$ となる $(x, y) \in X \times Y$ が存在する。さて、$T: X \times Y \to Y \times X$ を $T(x, y) = (y, x)$ により定義する。$(g_1 \times f_2) \circ T: X \times Y \to I^m \times I^n$ に対し $f_1 \times g_2$ の universality を適用すると、$(f_1(x), g_2(y)) = (g_1(y), f_2(x))$

なる $(x, y) \in X \times Y$ が存在する。従ってこのとき、$f_1(x) = g_1(y)$ でかつ $f_2(x) = g_2(y)$。故に $(f_1(x), f_2(x)) = (g_1(y), g_2(y))$ これは $f(X) \cap g(Y) = \phi$ なる仮定に反する。従って、$f_1 \times g_2$ は inessential である。

<u>定義 2.1</u>　D^n を R^n の中の closed unit ball とする。$f: X \to D^m$，$g: Y \to D^n$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) をみたす写像 $F: X \to D^m \times D^n$ と $G: Y \to D^m \times D^n$ が存在するとき、f は <u>g に関して transversely trivial</u> であるといわれる。

(i) $F|f^{-1}(\partial D^m) = (f, 0)|f^{-1}(\partial D^m)$,

(ii) $G|g^{-1}(\partial D^n) = (0, g)|g^{-1}(\partial D^n)$,

(iii) $F(X) \cap G(Y) = \phi$,

ただし 0 は $(0, 0, \cdots, 0) \in R^k$ への定値写像とする。

そして f が g に関して transversely trivial でないとき、f と g は <u>transversely essential</u> であるといわれる。写像 f はそれ自身に関して transversely trivial であるとき、単に <u>transversely trivial</u> と呼ばれる。

<u>補題 2.2</u>　$f \times g : X \times Y \to D^m \times D^n$ が essential

ならば、f と g は transversely essential である。

証明　f と g が transversely trivial と仮定する。このとき、定義 2.1 の条件 (i), (ii), (iii) をみたす 2 つの写像 $F=(f_1, f_2): X \to D^m \times D^n$ と $G: Y \to D^m \times D^n$ が存在する。(iii) と補題 2.1 より $f_1 \times g_2: X \times Y \to D^m \times D^n$ は inessential。また (i), (ii) より

$$f_1|f^{-1}(\partial D^m) = f|f^{-1}(\partial D^m),$$
$$g_2|g^{-1}(\partial D^n) = g|g^{-1}(\partial D^n)。$$

従って、$f_1 \times g_2$ は $f \times g$ の admissible deformation である。従って [5, Proposition 1.1 (b)] より $f \times g$ は inessential とならなければならない。これは我々の仮定に反する。故に、f と g は transversely essential である。

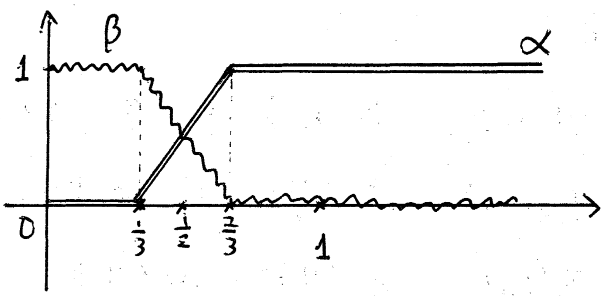
<u>補題 2.3</u>　$f: X \to D^m$ と $g: Y \to D^n$ が transversely essential であるとする。このとき、次をみたす正数 ε が存在する：任意の 2 つの写像 $F: X \to R^m \times R^n$ と $G: Y \to R^m \times R^n$ が、$d(F, (f, 0)) < \varepsilon$, $d(G, (0, g)) < \varepsilon$ をみたすならば、$F(X) \cap G(Y) \neq \emptyset$

証明　$\varepsilon = 1/6$ とする。F と G を上の仮定をみたす任

意の写像とする。次のような2つの写像 $\alpha, \beta : [0,\infty) \to [0,1]$ を考える。

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 , & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 6t-3 , & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 1 , & t \geqq \frac{2}{3} \end{cases} ,$$

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 , & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -6t+4 , & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 0 , & t \geqq \frac{2}{3} \end{cases} .$$



さて、$F' : X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $G' : Y \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ を次のように定義する。

$$F'(x) = \left((1-\alpha(|f_1(x)|))\, f_1(x) + \alpha(|f_1(x)|)\, f(x) ,\ \beta(|f_1(x)|)\, f_2(x) \right)$$

$$G'(y) = \left(\beta(|g_2(y)|)\, g_1(y) ,\ (1-\alpha(|g_2(y)|))\, g_2(y) + \alpha(|g_2(y)|)\, g(y) \right)$$

このとき、次が成り立つ：

$$\operatorname{im} F' \cup \operatorname{im} G' \subset D^m \times D^n ,$$

$$F' | f^{-1}(\partial D^m) = (f, 0) | f^{-1}(\partial D^m) ,$$

$$G' | g^{-1}(\partial D^n) = (0, g) | g^{-1}(\partial D^n)$$

ところで f と g は transversely essential であったの

で、$F'(X) \cap G'(Y) \neq \phi$ とならなければならない。故に $F'(x) = G'(y)$ となる $x \in X$ と $y \in Y$ が存在する。そこで $F'(x)$ と $G'(y)$ の第一座標を比較すると、

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha(|f_1(x)|)f_1(x) + \alpha(|f_1(x)|)f(x)| \\
&= |\beta(|g_2(y)|)\ g_1(y)| \\
&\leq |g_1(y)| \\
&< 1/6
\end{aligned}
$$

故に、$|f_1(x)| < 1/2$ がわかる。同様に、$|g_2(y)| < 1/2$ を得る。従って、

$$F'(x) = (f_1(x),\ f_2(x)) = F(x),$$
$$G'(y) = (g_1(y),\ g_2(y)) = G(y)$$

より、$F(x) = F'(x) = G'(y) = G(y)$。

<u>補題 2.4.</u> X を compactum とし、$E(X, R^{2n})$ が $C(X, R^{2n})$ において稠密であるとする。このとき、互いに交わらない任意の2つの X の閉部分集合 X_1, X_2 と任意の写像 $f_1 : X_1 \to D^n$, $f_2 : X_2 \to D^n$ に対し、f_1 と f_2 は transversely trivial である。従って、補題 2.2 より、特に $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to D^n \times D^n$ は inessential である。

証明　今、f_1 と f_2 が transversely essential であると仮

定する。このとき、$f=f_1$, $g=f_2$ に対して補題2.3の条件をみたす $\varepsilon>0$ が存在する。$h: X\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ を $h|X_1=(f_1,0)$, $h|X_2=(0,f_2)$ なる写像とする。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[ddrr, bend right, "h"'] & \supset & X_1 \arrow[d, "{(f_1,0)}"] & \oplus & X_2 \arrow[d, "{(0,f_2)}"] \\
 & & D^n\times(0,\cdots 0) & \cup & (0,\cdots 0)\times D^n \\
 & & & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \arrow[u, phantom, "\cap"] &
\end{tikzcd}
$$

さて、$E(X,\mathbb{R}^{2n})$ が $C(X,\mathbb{R}^{2n})$ で稠密であるから、$d(h,F)<\varepsilon$ なる $F\in E(X,\mathbb{R}^{2n})$ が存在する。そこで、$F_1=F|X_1$, $F_2=F|X_2$ とおくと、$d(F_1,(f_1,0))<\varepsilon$, $d(F_2,(0,f_2))<\varepsilon$。従って、$\varepsilon$ のとり方より、$F_1(X_1)\cap F_2(X_2)\neq\emptyset$。故に、$F(X_1)\cap F(X_2)=\emptyset$,
これは、F が embedding であることに反する。

<u>補題2.5.</u> n 次元 compactum X に対して次は同値である。

(1) $\dim X\times X<2n$

(2) 任意の写像 $f: X\to D^n$ に対し、

$f \times f : X \times X \to D^n \times D^n$ が inessential

(3) 互いに交わらない任意の X の閉部分集合 X_1, X_2 と任意の写像 $f_1 : X_1 \to D^n$, $f_2 : X_2 \to D^n$ に対し、$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to D^n \times D^n$ が inessential である。

証明 <u>(1) ⇒ (2)</u> : well - known

<u>(2) ⇒ (3)</u> : X_1, X_2, f_1, f_2 を (3) の条件をみたすものとする。$f : X \to D^n$ を $f|_{X_1} = f_1$, $f|_{X_2} = f_2$ なる写像とする。このとき、(2) より $f \times f : X \times X \to D^n \times D^n$ は inessential である。それ故、$f_1 \times f_2 = (f \times f)|_{X_1 \times X_2}$ は inessential。

<u>(3) ⇒ (1)</u> : $\dim X \times X = 2n$ と仮定する。このとき、

(a) 任意の ε_0 - mapping $F : X \times X \to Y$ に対し、$\dim F(X \times X) \geqq 2n$ となる $\varepsilon_0 > 0$ が存在する。

この ε_0 に対し

(b) 任意の η - mapping $f : X \to P$ (P は適当な多面体) に対し $f \times f : X \times X \to P \times P$ が ε_0 - mapping となる $\eta > 0$ が存在する。

さて、今 $\dim X = n$ であるから n 次元多面体 P と、X から P への η - mapping $f : X \to P$ が存在する。

(c) $\operatorname{diam} A < \varepsilon_1$ なる $P \times P$ の任意の部分集合 A に対して
$\operatorname{diam}(f \times f)^{-1}(A) < \varepsilon_0$ なる $\varepsilon_1 > 0$ をとる。

K を $|K| = P$ となる finite simplicial complex とし
$K \times K$ を $\Delta_1 \times \Delta_2$, $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ なる形の cells 全てからなる cell complex とする。このとき、K の cell を十分小さくとることにより

(d) $\operatorname{diam}(\operatorname{St}(\sigma, K \times K)) < \varepsilon_1$ がすべての
$\sigma \in K \times K$ について成り立つようにできる。

我々は、次に

(e) ある $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ に対し、
$(f \times f)|_{(f \times f)^{-1}(\Delta_1 \times \Delta_2)} : (f \times f)^{-1}(\Delta_1 \times \Delta_2) \to \Delta_1 \times \Delta_2$
が essential となる

ことを示す。

そのために、(e) が成り立たないと仮定する。このとき、任意の $z \in X \times X$ に対し $F(z)$ と $(f \times f)(z)$ が $K \times K$ の同じ cell に属するような写像 $F : X \times X \to |(K \times K)^{2n-1}|$ が存在する。このとき、(c), (d) より F が ε_0-mapping であることがわかる。従って (a) より $\dim F(X \times X) \geqq 2n$。ところが、$F(X \times X) \subset |(K \times K)^{2n-1}|$ より $\dim F(X \times X) < 2n$。矛盾。故に (e) が示された。

さて、$\Delta_1, \Delta_2 \in K$ を (e) の条件をみたすものとする。

2つのn-単体$\tau_1 \subset \sigma_1$, $\tau_2 \subset \sigma_2$で$\tau_1 \cap \tau_2 = \phi$なるものをとる。$X_1 = f^{-1}(\tau_1)$, $X_2 = f^{-1}(\tau_2)$とおく。このとき、X_1とX_2は互いに交わらないXの閉部分集合である。そして、$f_1 = f|_{X_1} : X_1 \to \tau_1$, $f_2 = f|_{X_2} : X_2 \to \tau_2$とする。このとき、(e)と[5, Theorem 1.9]より$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to \tau_1 \times \tau_2$がessentialであることがわかる。これは(3)の仮定に反する。故に$\dim X \times X < 2n$となり、証明は完了した。

<u>定理2.1の証明</u>　補題2.4と補題2.5より明らか。

n次元compactum Xにおける"$E(X, \mathbb{R}^{2n})$が$C(X, \mathbb{R}^{2n})$の中で稠密である"という条件は、次の形で特徴付けられる。

<u>定理2.2</u>　$n \geq 1$とするとき、n次元compactum Xに対し、次は同値である。

(1) 任意の2つの写像$f, g : X \to \mathbb{R}^{2n}$がdisjoint images propertyを持つ。ここで、写像$f, g : X \to \mathbb{R}^{2n}$が<u>disjoint images property</u>を持つとは、任意の$\varepsilon > 0$に対し、$d(f, f') < \varepsilon$, $d(g, g') < \varepsilon$であり、かつ$f'(X) \cap g'(X) = \phi$なる2つの写像

$f', g' : X \to \mathbb{R}^{2n}$ が存在するときをいう。

(2) 任意の2つの写像 $f, g : X \to D^n$ が transversely trivial である。

(3) 任意の写像 $f : X \to D^n$ が transversely trivial である。

(4) X の中の互いに交わらない任意の2つの閉部分集合 X_1, X_2 と、それ上の任意の写像 $f_1 : X_1 \to D^n$, $f_2 : X_2 \to D^n$ に対し、f_1 と f_2 が transversely trivial である。

(5) $E(X \times [0,1], \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X \times [0,1], \mathbb{R}^{2n})$ において稠密である。

(6) $E(X \times C, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X \times C, \mathbb{R}^{2n})$ において稠密である。ここで、C は Cantor set を表わすものとする。

(7) $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ において稠密である。

証明略

§3. Concluding remarks

Krasinkiewicz の この論文 [6] が書かれた後、Karno-Krasinkiewicz [4] が $\dim X \times X < 2n$ なる具体的ないくつかの compacta に対し、定理 2.1 の逆が成り立つことを確めた。そして、その後、Spiez [10], [11] により、$n \geqq 2$ に対し、定理 2.1 の逆が成立することが証明された。従って、結局次が成立する。

<u>定理 3.1</u> $n \geqq 2$ とし、X を n 次 compactum とする。このとき、$\dim X \times X < 2n$ なることと、$E(X, \mathbb{R}^{2n})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ において稠密になることとは、同等である。

<u>注意</u> 先に注意しておいたように $n=1$ に対しては、$E(X, \mathbb{R}^2)$ が $C(X, \mathbb{R}^2)$ で稠密になることは、$\dim X < 0$ なることと同等である。

定理 3.1 をより詳細にする次の問題を問うことが、できる。

<u>問題</u> $n \geqq 2$, $1 \leqq k \leqq n$ とする。このとき、$E(X, \mathbb{R}^{2n-k+1})$ が $C(X, \mathbb{R}^{2n-k+1})$ で稠密であることと $\dim X \times X \leqq 2n-k$ であることとは、同等であるか？

最後に、定理3.1と同じ結果を最近、Dranišnikov, Repovš, Ščepin 等が Krasinkiewicz, Spież とは独立に証明したことを注意しておく。(これについては [1], [2], [3] を見よ。)

REFERENCES

[1] A. N. Dranišnikov, D. Repovš and E. V. Ščepin, A criterion for approximation of maps of 2-dimensional compacta into R^4 by embeddings, Abstracts of papers presented to the Amer. Math. Soc., 10 (4), 1989, 313 (89T-54-132).

[2] A. N. Dranišnikov and V. Repovš, On unstable intersections of 2-dimensional compacta in euclidean 4-space, Abstracts of papers presented to the Amer. Math. Soc., 10 (5), 1989, 411 (89T-54-188).

[3] ——————, ——— and E. V. Ščepin, Approximation of mappings of compacta by embeddings, Abstracts of papers presented to the Amer. Math. Soc., 10 (5), 1989, 411 (89T-54-200).

[4] Z. Karno and J. Krasinkiewicz, On some famous examples in dimension theory, Fund. Math. (to appear).

[5] J. Krasinkiewicz, Essential mappings onto products of manifolds, Geometric and Algebraic Topology, Banach Center Publications, PWN, Warszawa, 1986, 377-406.

[6] ——————, Imbeddings into R^n and dimension of products, Fund. Math. (to appear).

[7] —————— and K. Lorents, Disjoint membranes in cubes, Bull. Polish Acad. Sci. (to appear).

[8] D. McCullough and L. Lubin, Intersections of separators and essential

[8] D. McCullough and L. Lubin, Intersections of separators and essential submanifolds of I^N, Fund. Math. 116 (1983), 131-142.

[9] ————, ————, Some m-dimensional compacta admitting a dence set of imbeddings into R^{2m}, Fund. Math. (to appear).

[10] S. Spież, Imbeddings in R^{2m} of m-dimensional compacta with dim(XxX) 2m, Fund. Math. (to appear).

[11] ————, Imbeddings in R^4 of 2-dimensional compacta with dim (XxX) 4, Fund. Math. (to appear).