数理解析研究所講究録
711巻 1989年 14-21

D. H. Fremlinの定理と周辺

静岡大・教育　大田春外（Haruto Ohta）

1. 我々の問題. 位相空間 X は，任意の zero-sets の和集合の閉包がまた zero-set になるという性質を持つとき，Klebanov 空間とよばれる。例えば，完全正規空間，距離空間の任意積（[7]），compact K-metric 空間（[13]）などは Klebanov 空間である。この空間に関する我々（＝玉野研一，酒井政美，森下和彦さんと私）の研究の中で，次の問題が起った。「Klebanov 空間の稠密な部分空間はまたKlebanov 空間か？」 この問題は，1989夏のサマー・セミナーで発表された様に，酒井政美さん[9]によって否定的に解決されたが，私もまた D.H. Fremlin の論文[4]の中に，否定解を見つけた。そこで，その内容と周辺の問題を述べる。

2. Fremlinの定理. 集合 X に対して，

$$l^1(X) = \{ x \in \mathbb{R}^X : \sum_{t \in X} |x(t)| < +\infty \}$$

とする。$l^1(X)$ はノルム $\|x\| = \sum_{t \in X} |x(t)|$ によって Banach

空間である。いま，このBanach空間を $(\ell^1(X), \text{norm})$ で表わし，弱位相を与えた $\ell^1(X)$ を $(\ell^1(X), \text{weak})$ とかく。また空間 E に対し，$Bo(E)$（$Ba(E)$）は，E のBorel集合（Baire集合）全体からなる σ-algebra を表わす。他方，$P(X)$ は X の巾集合を表わし，$P(X) \otimes P(X)$ は $\{A \times B : A, B \in P(X)\}$ から生成される σ-algebra を表わす。さて，D. H. Fremlin は [4] で次の定理を証明した。

D. H. Fremlin の定理 (F). 無限集合 X に対し，次の2つの等式 (a), (b) は互いに同値である。

a) $P(X \times X) = P(X) \otimes P(X)$,

b) $Bo(\ell^1(X), \text{norm}) = Ba(\ell^1(X), \text{weak})$.

なぜ，この結果が，我々の問題に否定解を与えるかを述べるためには，次の B. V. Rao [11] の結果が必要である。

B. V. Rao の定理 (R). $|X| = \omega_1$ ならば，$P(X \times X) = P(X) \otimes P(X)$ が成立する。

定理 (F) と (R) から，$|X| = \omega_1$ である集合 X をとれば，

$$Bo(\ell^1(X), \text{norm}) = Ba(\ell^1(X), \text{weak}) \qquad (1)$$

が成立する。また $(\ell^1(X), weak)$ は正規空間でない。これは H. H. Corson [2] の次の結果から導びかれる： もし，$(E, weak)^2$ が discrete な非可算閉集合を含めば，$(E, weak)$ は正規ではない。実際，各 $t \in X$ に対し，

$$\chi_t(t') = \begin{cases} 1 & \text{if } t' = t, \\ 0 & \text{if } t' \neq t. \end{cases}$$

とおけば，$\{\chi_t : t \in X\}$ は $(\ell^1(X), weak) \approx (\ell^1(X), weak)^2$ の discrete な非可算閉集合である。結果として，$(\ell^1(X), weak)$ は zero-set でない閉集合 F をもつ。ところが，(1) より $(\ell^1(X), weak)$ の各点は zero-set だから，F は zero-sets の和として表わされる。従って，$(\ell^1(X), weak)$ は Klebanov 空間でない。一方，弱位相の性質から，$(\ell^1(X), weak)$ は実数空間 $\mathbb{R}$ の直積，即ち Klebanov 空間，に稠密に埋蔵される。

3. 等式 $Bo(\ell^1(X), norm) = Ba(\ell^1(X), weak)$ の周辺。

一般に，Banach 空間 E に対し，次の関係がある。

$$\begin{array}{ccccc} Bo(E, norm) & \underset{(a)}{\supset} & Bo(E, weak) & \underset{(b)}{\supset} & Ba(E, weak) \\ \parallel & & & & \\ Ba(E, norm) & & & & \end{array}$$

$(E, norm)$ が separable の場合，(a) と (b) は等号である。

なぜなら（E, weak）は，このとき cosmic 空間だから，(b) は等号である。更に，その可算 net として（E, norm）の closed balls からなるものを選べば，Alaoglu の定理から，各 closed ball は（E, weak）でも閉集合である。これらのことから，(a) も等号になる。そもそも，定理 (F) は E が norm-separable でない場合にも，(a)(b) が等号になり得ることを示すために証明された。norm-separability を弱めて，E を WCG Banach 空間とすると，(a) は等号であるが (b) の等号は保証されない（G. A. Edger [3]）。一方，$E = \ell^\infty$ に対しては，(a)(b) は共に等号ではない（M. Talagrand [14]）。ところが次の問題は十分に答えられていない。

問題 1（D. H. Fremlin）。 どの様な場合に，(b) は等号になるか？

一般の位相空間 X に対しても，等式

$$Bo(X) = Ba(X) \tag{2}$$

が成り立つための条件は，殆んど研究されていない。X が完全正規ならば (2) は成り立つが，逆に (2) から X の完全正規性が導びかれるかどうかは，M. Katětov [5] の古典的

な問題である。今のところ，この問題に対する反例は，上で述べた（$\ell^1(X)$, weak）だけの様である。そこで，次の問題が起る。

問題２． 完全正規でない位相空間 X で，$Bo(X)=Ba(X)$ となる他の例を与えよ。

弱位相を持つ Banach 空間について述べたが，点ごと収束の位相を持つ関数空間 $C_p(X)$ の Borel 集合と Baire 集合の間には，どの様な関係があるか。$C_p(X)$ に興味を持つ人は考えてみると面白いかも知れない。例えば，問題２の答えは $C_p(X)$ を使って与えられるか。

4．等式 $P(X\times X)=P(X)\otimes P(X)$ の周辺． B. V. Rao の定理（R）から，$|X|=\omega_1$ のときこの等式は成立するが，$|X|>2^\omega$ のときは成立しない（[12]）。CH を否定したとき，$\omega_1<|X|\leq 2^\omega$ である X に対し，いつこの等式が成立するかは集合論の問題である（例えば，A. W. Miller [8] を見よ）。ここでは，$Ba(X)\otimes Ba(Y)$ を $\{A\times B : A\in Ba(X), B\in Ba(Y)\}$ から生成される σ-algebra として，等式

$$Ba(X\times Y)=Ba(X)\otimes Ba(Y) \tag{3}$$

が成立するための条件について述べる。(3)が成立するための次の様な十分条件が知られている。

(a) $X\times Y$ は pseudo-compact ([1]),

(b) $X\times Y$ は Lindelöf ([1],[6]),

(c) X は局所 compact, σ-compact で, Y は separable ([6]),

(d) X は separable 距離空間, 又はより一般に, cosmic 空間 ([1],[6]).

次の問題は未解決である。

問題3 (H. G. Kellerer [6]). $X\times Y$ が separable ならば, (3)は成立するか？

以上の結果と問題は, いずれも X, Y にある種の可算性を要求している。しかし定理(R)によれば, $|X|=\omega_1$ である離散空間 X の直積 $X\times X$ に対しても(3)は成り立つ。そこで次の問題が起る。

問題4. 定理(R)を含むような, (3)に対する十分条件を与えよ。

位相空間 X の部分空間 Y の任意の Baire 集合 (zero-set) B に対し, $A\cap Y=B$ となる X の Baire 集合 (zero-set) A が存在するとき, Y は X で Baire-embedded (z-embedded) であるという。いま, 条件

(Z) $X\times Y$ は $\beta X\times\beta Y$ で z-embedded,

(B) $X\times Y$ は $\beta X\times\beta Y$ で Baire-embedded,

を考える。このとき, 上に挙げた十分条件 (a)-(d) と等式 (3) の間には, 次の様な関係がある:

$$\begin{tikzcd}
(a) \arrow[rr, leftrightarrow] & & \beta(X\times Y)=\beta X\times\beta Y \arrow[dd] \\
& (b) \arrow[dr] & \\
& & (Z) \arrow[ddd] \\
& (c) \arrow[ur] & \\
(d) \arrow[dr] & & \\
& (3) \arrow[r, leftrightarrow] & (B)
\end{tikzcd}$$

$|X|=\omega_1$ である離散空間 X は (Z)→(B) の逆が成立しないことを示す。また (Z) をみたさない様な, separable 距離空間 X と separable 空間 Y の例を与えることも出来る ([10]).
(3) で Baire 集合を Borel 集合に変えた等式については, 殆んど何も知られていない様である.

参考文献

1. A. G. Babiker and J. D. Knowles, Functions and measures on product spaces, Mathematika, 32 (1985), 60-67.
2. H. H. Corson, The weak topology of a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., 101 (1961), 1-15.
3. G. A. Edger, Measurability in a Banach space I, II, Indiana Univ. Math. J., 26 (1977), 663-677; 28 (1979), 559-579.
4. D. H. Fremlin, Borel sets in non-separable Banach spaces, Hokkaido Math. J., 9 (1980), 179-183.
5. M. Katětov, Measures in fully normal spaces, Fund. Math., 38 (1951), 73-84.
6. H. G. Kellerer, Baire sets in product spaces, Springer Lecture Notes 794 (1980), 38-44.
7. B. S. Klebanov, Remarks on subsets of cartesian products of metric spaces, Comment. Math. Univ. Carolina, 23:4 (1982), 769-784.
8. A. W. Miller, On the length of Borel hierarchies, Ann. Math. Logic, 16 (1979), 233-267.
9. K. Morishita and M. Sakai, 関数空間の Klebanov 性 in preparation.
10. H. Ohta, Extensions of zero-sets in the product of topological spaces, to appear in Topology Appl.
11. B. V. Rao, On discrete Borel spaces and projective sets, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 614-617.
12. __________, On discrete Borel spaces, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 22 (1971), 197-198.
13. E. V. Ščepin, On κ-metrizable spaces, Math. USSR Izvestija, 14 (1980), 407-440.
14. M. Talagrand, Comparaison des Boreliens d'un espace de Banach pour les topologies fortes et faibles, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 1001-1004.