

Orthosymplectic Lie super algebra の夢見るもの —— super unitary 表現

東京電機大学 理工 西山享 (Kyo NISHIYAMA)

Lie super algebra は物理学者によって最初に注目され、有限次元単純 Lie super algebra が V.Kac [10] によって分類されてからは多くの数学者たちの興味も惹きつけてきた。物理的には Lie super algebra の “unitary 表現” に興味があるのだが、最近ようやく Lie super algebra の unitary 表現の数学的な研究が始まったばかりである。これについては [6]、[5] 及び [4] などを参照せられたい。一方 [4] などに見られる如く、物理学者の興味は特に orthosymplectic algebra の unitary 表現に集中している。そこでこの論説では、単純 Lie super algebra の一列である orthosymplectic algebra の unitary 表現についてその構成と分類の大部分を述べる。なおここに挙げた結果のほとんどは著者の一連の論文 [12]、[13]、[14]、[15] で得られたものである。

1 Lie super algebra と orthosymplectic algebra

Lie super algebra の定義をまずしよう。 \mathbb{Z}_2 -graded ベクトル空間 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ が次の (0)–(2) を満たすような双線形な積 $[\ , \]$ を持つ時 *Lie super algebra* と呼ぶ。

(0) \mathfrak{g} は \mathbb{Z}_2 -graded algebra である。即ち $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ が成り立つ。

(1) *super symmetry* が成り立つ。

$$[x, y] = -(-1)^{\deg(x)\deg(y)}[y, x] \quad (x, y \in \mathfrak{g} : \text{homogeneous})$$

(2) *super Jacobi identity* が成り立つ。

$$(-1)^{\deg(x)\deg(z)}[x, [y, z]] + (\text{cyclic terms}) = 0 \quad (x, y, z \in \mathfrak{g} : \text{homogeneous})$$

この定義から特に $\mathfrak{g}_1 = (0)$ の時には $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$ は通常の Lie 環であることに注意しておこう。我々は \mathfrak{g}_0 を \mathfrak{g} の偶部分 (even part)、 \mathfrak{g}_1 を奇部分 (odd part) と呼ぶ。

Lie super algebra の一番基本的な例は次のようなものである。 $V = V_0 \oplus V_1$ を \mathbb{Z}_2 -graded vector 空間とする。このとき V 上の線形変換全体には自然な \mathbb{Z}_2 -grading がはいる。つまり $i \in \mathbb{Z}_2$ に対して

$$\mathfrak{gl}(V)_i = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid xV_j \subset V_{i+j} \ (j = 0, 1)\}$$

とおけばよい。bracket 積は $[x, y] = xy - (-1)^{\deg(x)\deg(y)}yx$ で与える。super Jacobi identity だけが自明ではないが、計算により確かめられて $\mathfrak{gl}(V)$ は Lie super algebra になる。

定義 1.1 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ を Lie super algebra とする。 \mathfrak{g} から Lie super algebra $\mathfrak{gl}(V)$ への準同型を \mathfrak{g} の V 上の表現という。表現が既約であるとは V が自明でない斉次不変部分空間を含まないときに言う。

この論説では主に表現空間 V は複素ベクトル空間、Lie super algebra \mathfrak{g} は実数体上考えることとする。

定義 1.2 実数体上定義された Lie super algebra \mathfrak{g} の表現が *super unitary* であるとは V 上に super Hermite 形式¹ $(,)$ が存在して次の (0)–(2) を満たすときに言う。

$$(0) \ (V_0, V_1) = 0$$

(1) V_0 上では $(,)$ は正定値であって V_1 上では表現だけによる定数 $\delta = \pm 1$ が存在して $\delta\sqrt{-1}(,)$ が正定値になる。この定数 δ を表現の *associated constant* とよぶ。

(2) \mathfrak{g} は super Hermite 形式 $(,)$ を不変にする。つまり

$$(Xv, w) + (-1)^{\deg(X)\deg(v)}(v, Xw) = 0 \ (X \in \mathfrak{g}, v, w \in V)$$

が \mathfrak{g}, V の各斉次元に対して成り立つ。

以後この論説では super unitary 表現のことを単に unitary 表現と呼ぶことにする。

¹半双線形形式 (sesquilinear form) $(,)$ が super Hermite 形式であるとは $(v, w) = (-1)^{\deg(v)\deg(w)}(w, v)$ が成り立つときに言う。

以下では主に $\mathfrak{gl}(V)$ の部分代数である orthosymplectic Lie super algebra について述べて行きたい。orthosymplectic algebra は単純な Lie super algebra であって、V.Kac [10] の記号では $B(m, n)$ 、 $C(n)$ 及び $D(m, n)$ と記される三つの大きな系列を占めている。まず一般的な orthosymplectic algebra の定義をしておく。

$b(,)$ を $V = V_0 \oplus V_1$ 上の super skew symmetric な双線型形式で非退化なものとする。ここで $b(,)$ が super skew symmetric とは

$$b(v, w) = -(-1)^{\deg(v)\deg(w)}b(w, v) \quad (v, w \in V : \text{homogeneous})$$

及び

$$b(v, w) = b(w, v) = 0 \quad (v \in V_0, w \in V_1)$$

が成立することである。このとき $\mathfrak{gl}(V)$ の元で $b(,)$ を不変にするもの全体を $\mathfrak{osp}(b)$ と書き、orthosymplectic algebra と呼ぶ。 $b(,)$ の非退化性から必然的に V_0 は偶数次元になることに注意しておく。今 $\dim V_0 = 2L, \dim V_1 = M$ とおき、 $(2L + M) \times (2L + M)$ -行列 B を

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1_L & 0 \\ -1_L & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1_M \end{array} \right]$$

で定める。 V_0, V_1 の基底をこの順序で並べて B を V 上の線形変換とみなす。このとき、

$$B(v, w) = {}_v B w \quad (v, w \in V)$$

は V 上の非退化な双線形形式を定め、しかも super skew symmetric である。但し、 $v, w \in V$ は縦ベクトルとみなしている。我々は $\mathfrak{osp}(B)$ のことを $\mathfrak{osp}(2L, M)$ と書き、更に V が体 F 上のベクトル空間であって体 F を明示したいときは $\mathfrak{osp}(2L, M; F)$ と書くことにする。

2 Oscillator 表現

この節では $\mathfrak{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ の特殊な unitary 表現で oscillator 表現と呼ばれるものを構成する。そのために super Heisenberg algebra と Clifford-Weyl algebra を

導入しよう。\$V\$上の super skew symmetric な双線形形式 \$b(,)\$ が与えられたとき、\$(V, b)\$ の Clifford-Weyl algebra \$C(V, b)\$ とは \$V\$ の元を生成元に持ち関係式

$$xy - (-1)^{\deg(x)\deg(y)}yx = b(x, y) \quad (x, y \in V : \text{homogeneous})$$

を満たすような普遍的な非可換代数である。\$C(V, b)\$ は \$V\$ の \$\mathbb{Z}_2\$-grading から決まる標準的な \$\mathbb{Z}_2\$-grading を持っていることに注意する。つまり \$C(V, b)\$ は super algebra である。

命題 2.1 \$b\$ が非退化ならば \$\text{osp}(b)\$ は \$C(V, b)\$ の部分代数として実現される。

証明 斉次ベクトル \$x, y \in V\$ に対して

$$m(x, y) = xy + (-1)^{\deg(x)\deg(y)}yx \in C(V, b)$$

とおく。すると \$L(b) = \langle m(x, y) \mid x, y \in V : \text{homogeneous} \rangle / \text{vector space}\$ は \$C(V, b)\$ の標準的な bracket 積

$$[u, v] = uv - (-1)^{\deg(u)\deg(v)}vu \quad (u, v \in C(V, b))$$

によって閉じていることがわかり \$L(b)\$ は有限次元 Lie super algebra になる。更に \$\text{ad } X = [X, \cdot]\$ (\$X \in L(b)\$) は \$V\$ を保つことが容易に確かめられる。これにより

$$L(b) \ni X \longrightarrow (\text{ad } X)|_V \in \text{gl}(V)$$

という \$L(b)\$ の \$V\$ 上の表現が得られるが、この表現は \$b\$ が非退化ならば忠実であり、しかも \$L(b)\$ の像は \$b(,)\$ を不変にしていることがわかる。従って

$$L(b) \hookrightarrow \text{osp}(b)$$

であるが、両者の次元を比較することによりこの表現が \$L(b)\$ と \$\text{osp}(b)\$ の同型を与えていることが証明される。

証明終わり。

この命題より \$C(V, b)\$ の代数としての表現が得られれば \$\text{osp}(b)\$ の表現が得られることがわかる。一方 \$C(V, b)\$ の表現は super Heisenberg algebra と呼ばれる可解な Lie super algebra の表現を介して構成できる。

定義 2.2 (V, b) を super skew symmetric な双線形形式を持つベクトル空間とする。 (V, b) に付随した super Heisenberg algebra $H(V, b)$ とは、 \mathbb{Z}_2 -grading

$$H(V, b)_0 = V_0 \oplus Fz, \quad H(V, b)_1 = V_1$$

及び bracket 積

$$[x, y] = b(x, y)z \quad (x, y \in V), \quad [H(V, b), z] = [z, H(V, b)] = 0$$

より決まる Lie super algebra である。ここに z は不定元、 V は体 F 上のベクトル空間とする。

命題 2.3 $U(H)$ を $H = H(V, b)$ の展開環とする。すると環準同型 $\psi: U(H) \rightarrow C(V, b)$ で、 $\psi(x) = x$ ($x \in V$), $\psi(z) = 1$ となるものが一意的存在する。

証明 一意性は明かである。存在も $U(H)$ の普遍性より容易に証明できる。

証明終わり。

系 2.4 \mathcal{X} を $H(V, b)$ の既約表現で z を 1 に写すもの全体とする。すると \mathcal{X} と $C(V, b)^\wedge = (C(V, b) \text{ の既約表現全体})$ との間には自然な同型が存在する。

注意 非可環代数の表現と言ったときこの論説では常に 1 は 1 に写しているものとする。

証明は H の既約表現と $U(H)$ の既約表現が一対一に対応していることと上の命題から容易に分かる。以上のことより、結局

$$\varphi: \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} C(V, b)^\wedge \rightarrow (\text{osp}(b) \text{ の表現})$$

という写像が得られるが、この φ について次の命題が成り立つ。

命題 2.5 (ρ', E) を $H(V, b)$ の既約 unitary 表現で $\rho'(z) = \sqrt{-1}$ となるものとする。

(1) $\rho(x) = \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})\rho'(x)$ ($x \in V$), $\rho(z) = 1$ とおくと $(\rho, E) \in \mathcal{X}$ である。

(2) (1) で得られた $(\rho, E) \in \mathcal{X}$ から上のようにして構成した $\text{osp}(b)$ の表現 $(\varphi(\rho), E)$ は unitary である。

証明 E 上の unitary 内積を $(,)$ と書く。 $x \in V_\xi, y \in V_\eta$ (ξ, η は 0 又は 1) をとると ρ' は unitary であるから、 $v \in E_\nu, w \in E_\omega$ に対して、

$$\begin{aligned} (\rho(x)v, w) &= (\exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})\rho'(x)v, w) = -\exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})(-1)^{\xi\nu}(v, \rho'(x)w) \\ &= -\sqrt{-1}(-1)^{\xi\nu}(v, \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})\rho'(x)w) = \sqrt{-1}(-1)^{\xi\nu}(v, \rho(x)w) \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{aligned} (\rho(x)\rho(y)v, w) &= \sqrt{-1}(-1)^{\xi(\eta+\nu)}(\rho(y)v, \rho(x)w) \\ &= -(-1)^{\xi(\eta+\nu)}(-1)^{\eta\nu}(v, \rho(y)\rho(x)w) \\ &= -(-1)^{(\xi+\eta)\nu}(-1)^{\xi\eta}(v, \rho(y)\rho(x)w) \end{aligned}$$

である。これより $m(x, y) \in L(b) \simeq \text{osp}(b)$ に対して

$$\begin{aligned} (\varphi(\rho)(m(x, y))v, w) &= (\varphi(\rho)(xy + (-1)^{\xi\eta}yx)v, w) \\ &= (\rho(x)\rho(y)v, w) + (-1)^{\xi\eta}(\rho(y)\rho(x)v, w) \\ &= -(-1)^{(\xi+\eta)\nu}(-1)^{\xi\eta}(v, \rho(y)\rho(x)w) - \\ &\quad (-1)^{(\xi+\eta)\nu}(v, \rho(x)\rho(y)w) \\ &= -(-1)^{(\xi+\eta)\nu}(v, \varphi(\rho)(m(x, y))w) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\deg m(x, y) = \xi + \eta$ であるからこれは $\varphi(\rho)$ が unitary であることを示す。

証明終わり。

注意 (1) 上の $\exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$ は $-\exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}) = \exp(\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1})$ でもよい。

(2) $\rho'(z) = -\sqrt{-1}$ の時、上の $\exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$ は $\pm \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$ で置き換えればよい。

以下 §1 で与えた super skew symmetric な双線形形式 $B(,)$ について考える。 $H(V, B)$ の表現 (ρ', E) を次のように与える。 $\mathbb{C}[z_i | 1 \leq i \leq L]$ を不定元 $\{z_i | 1 \leq i \leq L\}$ を持つ多項式環、 $m = [(M+1)/2]$ とおいて $\mathcal{C}(r_j | 1 \leq j \leq m)$ を $\{r_j | 1 \leq j \leq m\}$

と関係式 $r_i r_j + r_j r_i = 2\delta_{ij}$ で生成された Clifford 環とする。このとき表現空間 $E = E_0 \oplus E_1$ は

$$E_k = \mathbb{C}[z_i \mid 1 \leq i \leq L] \otimes \mathcal{C}(r_j \mid 1 \leq j \leq m)_k \quad (k = 0, 1)$$

で与えられる。但し、 $\mathcal{C}(r_j \mid 1 \leq j \leq m)_0$ は $\mathcal{C}(r_j \mid 1 \leq j \leq m)$ のうち $\{r_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ の偶数個の積で生成された部分環、 $\mathcal{C}(r_j \mid 1 \leq j \leq m)_1$ は奇数個の積で生成された部分空間である。 $H(V, B)$ の作用は V の基底を $\{e_i \mid 1 \leq i \leq 2L + M\}$ (e_i は i 番目に 1 があって他は全て 0 となるような列ベクトル) とするとき

$$\begin{aligned} p_i &= e_i & (1 \leq i \leq L), & \quad q_i = e_{L+i} & (1 \leq i \leq L), \\ c_j &= e_{2L+j} & (1 \leq j \leq M) \end{aligned}$$

とおくと、

$$\rho'(z) = \sqrt{-1}$$

$$\rho'(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_i - \frac{\partial}{\partial z_i}) \otimes 1 \quad (1 \leq i \leq L)$$

$$\rho'(q_i) = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(z_i + \frac{\partial}{\partial z_i}) \otimes 1 \quad (1 \leq i \leq L)$$

$$\rho'(c_{2\ell-1}) = 1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})r_\ell \quad (1 \leq \ell \leq [(M+1)/2])$$

$$\rho'(c_{2\ell}) = 1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})\sqrt{-1}r_\ell \alpha_\ell \quad (1 \leq \ell \leq [M/2])$$

で与えられる。ここに α_ℓ は Clifford 環 $\mathcal{C}(r_j \mid 1 \leq j \leq m)$ の自己同型であって、

$$\alpha_\ell(r_j) = (-1)^{\delta_{\ell j}} r_j \quad (1 \leq j \leq m)$$

によって決まるものである。この作用で (ρ', E) が $H(V, B)$ の表現になることは交換関係を直接計算することにより容易に確かめられる。

注意 $\rho'(z) = -\sqrt{-1}$ とおき、 $\exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$ の部分を $\exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$ としてもよい。

命題 2.6 (ρ', E) は $H(V, B)$ の associated constant $\delta = -1$ の unitary 表現である。

証明 unitary 内積を

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{k!}} z^k \otimes r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_t} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^L, 0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq m, t \text{ は偶数} \right\}$$

が E_0 の正規直交基底、

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{k!}} z^k \otimes r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_t} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^L, 0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq m, t \text{ は奇数} \right\}$$

が E_1 の虚正規直交基底となるようにいれればよい。ここに $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_L^{k_L}$ 及び $k! = k_1! k_2! \cdots k_L!$ であって、 $\{v_j\}$ が虚正規直交基底とは基底であって、

$$(v_i, v_j) = \sqrt{-1} \delta_{ij}$$

となることを意味する。

証明終わり。

いままで述べたことと上の命題により、

$$\rho(z) = 1$$

$$\rho(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\pi}{4} \sqrt{-1}\right) \left(z_i - \frac{\partial}{\partial z_i}\right) \otimes 1 \quad (1 \leq i \leq L)$$

$$\rho(q_i) = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\pi}{4} \sqrt{-1}\right) \left(z_i + \frac{\partial}{\partial z_i}\right) \otimes 1 \quad (1 \leq i \leq L)$$

$$\rho(c_{2\ell-1}) = 1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} r_\ell \quad (1 \leq \ell \leq [(M+1)/2])$$

$$\rho(c_{2\ell}) = 1 \otimes \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} r_\ell \alpha_\ell \quad (1 \leq \ell \leq [M/2])$$

とおくと、 $(\rho, E) \in \mathcal{X}$ であって $(\varphi(\rho), E)$ は $\mathfrak{osp}(b)$ の unitary 表現を与える。

定義 2.7 上で与えられた表現を $\mathfrak{osp}(b)$ の *oscillator* 表現と呼ぶ。

oscillator 表現は既約ではなく、実は二つの既約成分を持つことが分かる。

3 一般の unitary 表現について

§2 では oscillator 表現と呼ばれる $\text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ の特殊な unitary 表現を構成したが、この節では unitary 表現についての一般的な結果をまとめておく。

まず $\text{osp}(2L, M; \mathbb{C})$ の実型について述べよう。§1 の B のかわりに

$$B_p = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1_L & 0 & 0 \\ -1_L & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1_{M-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1_p \end{array} \right]$$

を使って実数体上で考えた $\text{osp}(B_p)$ はやはり $\text{osp}(2L, M; \mathbb{C})$ の実型の一つになる。容易にわかるように $\text{osp}(2L, M; \mathbb{C})$ の実型は $\text{osp}(B_p)$ ($0 \leq p \leq [M/2]$) の形で同型をのぞいて尽くされている ([10])。 $\text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ はその中でも compact type と呼んでも良いものであるが、unitary 表現の存在については次の定理が成り立つ。

定理 3.1 orthosymplectic algebra $\text{osp}(B_p)$ ($0 \leq p \leq [M/2]$) は $p \neq 0$ のとき自明でない既約 admissible² unitary 表現を持たない。 $p = 0$ のとき $\text{osp}(B_0) = \text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ は可算個の互いに同値でない既約 admissible unitary 表現を持つ。

$p \neq 0$ の時の証明は、 (ρ, E) が \mathfrak{g} の unitary 表現とすると、任意の $\xi \in \mathfrak{g}_1$ に対して $\rho([\xi, \xi])$ は定数倍することによって正定値作用素になることを用いればさほど難しくなく (定理 3.3 の証明を参照)。 $p = 0$ の時については次節以降で詳しく取り扱う。

この定理より unitary 表現を扱う限りにおいては $\text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ のみを考えれば良いことがわかる。 $\mathfrak{g} = \text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ の偶部分 \mathfrak{g}_0 は極大コンパクト部分環として

$$\mathfrak{k} = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c} A & B & 0 \\ -B & -{}^t A & 0 \\ \hline 0 & 0 & C \end{array} \right] \mid A + \sqrt{-1} B \in \mathfrak{u}(L), C \in \mathfrak{so}(M) \right\}$$

²Lie super algebra \mathfrak{g} の表現 (ρ, E) が admissible とは、 \mathfrak{g}_0 の極大コンパクト Lie 環を \mathfrak{k} としたとき、 \mathfrak{k} の表現として (ρ, E) が有限重複度で既約有限次元表現に直和分解されるときにいう。

を含み、 \mathfrak{k} の Cartan 部分環

$$\mathfrak{h} = \left\{ X = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & E & 0 \\ -E & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & D \end{array} \right] \middle| E = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_L \end{bmatrix}, \right. \\
 \left. D = \begin{bmatrix} b_1 u & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{[M/2]} u & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, a_i, b_j \in \mathbb{R}, u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

(但し行列 D の末尾の 0 は M が奇数の時にのみ現れる。)

はまた \mathfrak{g}_0 の Cartan 部分環でもある。我々はこの \mathfrak{h} を \mathfrak{g} の Cartan 部分環とも呼ぶことにする。

さて、 (ρ, E) を admissible 表現とすると、 (ρ, E) は \mathfrak{k} の表現として有限次元表現の直和に分解され、従ってよく知られた reductive な Lie 環の有限次元表現論より \mathfrak{h} の一次元表現の直和に分解される。則ち

$$E = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*} \oplus E_{\lambda}; \quad E_{\lambda} = \{v \in E \mid \rho(x)v = \lambda(x)v \ (x \in \mathfrak{h})\}$$

となっている。 $E_{\lambda} \neq \{0\}$ のとき $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ を (ρ, E) の weight と呼ぶ。

随伴表現で \mathfrak{g} を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上に表現したとき、この表現は admissible であって、やはり

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha); \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha) = \{y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [x, y] = \alpha(x)y \ (x \in \mathfrak{h})\}$$

と weight 分解されている。このとき $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(0) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ であって、 0 でない weight α を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の根 (root) と呼ぶ。 $\mathfrak{g} = \text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ のときは各根空間 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha)$ ($\alpha \neq 0$) は一次元であって、 $(\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$ かまたは $(\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}}$ に含まれることがわかる。そこで、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha) \subset (\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$ のとき α を偶根 (even root)、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha) \subset (\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}}$ のとき奇根 (odd root) とよぶ。

orthosymplectic algebra の根を具体的に書き下すと次のようになる。 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ の元 $\{e_i \mid 1 \leq i \leq L\}$ 及び $\{f_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ を (1) 式の X に対して

$$e_i(X) = \sqrt{-1} a_i, \quad f_j(X) = \sqrt{-1} b_j$$

で決める。すると $\mathfrak{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ の偶根は

$$\pm 2e_i \quad (1 \leq i \leq L), \quad \pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i \neq j \leq L),$$

$$\pm f_i \pm f_j \quad (1 \leq i \neq j \leq m)$$

(及び M が奇数の時には、 $\pm f_j \quad (1 \leq j \leq m)$)

で与えられ、奇根は

$$\pm e_i \pm f_j \quad (1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq m)$$

で与えられる。偶根の全体を Σ_0 、奇根の全体を Σ_1 と書き、根の全体を $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ と表す。また半単純 Lie 環論と同じように、正根 (positive roots) を

$$\Sigma_0^+ = \{2e_i\} \cup \{e_i \pm e_j \mid i < j\} \cup \{f_i \pm f_j \mid i < j\}$$

(M が奇数の時にはさらに $\{f_j\}$ を加える),

$$\Sigma_1^+ = \{e_i \pm f_j\},$$

(2)

$$\Sigma^+ = \Sigma_0^+ \cup \Sigma_1^+$$

と決める。このとき単純根 (simple roots) は

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq L-1\} \cup \{e_L - f_1\}$$

$$\cup \{f_j - f_{j+1} \mid 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{f_{m-1} + f_m\}$$

(M が奇数の時は $\{f_{m-1} + f_m\}$ のかわりに $\{f_m\}$)

で与えられる。

注意 ここでは V.Kac 他の人々の用語に従って Σ を根系 (root system) と呼ぶことにするが、この Σ は Bourbaki 流の意味 ([2] 参照) での根系にはならないことに

注意しておく。

$\alpha \in \Sigma$ に対して固有値 α の零でない固有ベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を固定しておく。

定義 3.2 orthosymplectic algebra の表現 (ρ, E) が最高 weight 表現 (highest weight module) であるとは、ある斉次元 $v \in E$ が存在して、次の (0) - (2) が成り立つことである。

- (0) E は v から表現として生成される。
- (1) v は $\rho(\mathfrak{h})$ の weight ベクトルである。
- (2) 任意の正根 $\alpha \in \Sigma^+$ に対して $\rho(X_\alpha)v = 0$ が成り立つ。

このとき v のことを最高 weight 元 (highest weight vector) と呼ぶ。

同様にして (2) の正根を負根に変えることにより最低 weight 表現 (lowest weight module) も定義することができる。最高 weight 表現、最低 weight 表現の一般論についてはここで解説している余裕がない。通常 Lie 環の場合 ([8])、Kac-Moody Lie 環の場合 ([9]) 等を参考にしていきたい。また簡単ではあるが [11] にも記述がある。ここでは既約な最低 weight 表現は最低 weight を決めれば一意的に決まることだけを注意しておくにとどめる。

定理 3.3 $\mathfrak{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ の既約 admissible unitary 表現は associated constant δ が、

- (1) $\delta = -1$ のときには最低 weight 表現であり、その最低 weight を

$$\lambda = \sum_{i=1}^L \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^m \mu_j f_j \quad (3)$$

と表すと、 $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$ 及び $\mu_i \pm \mu_j \in \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) (但し、 M が奇数の時は $\mu_i \in \mathbb{Z}$) であって、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_L; \\ \mu_1 &\leq \mu_2 \leq \cdots \leq -|\mu_m|; \quad |\mu_1| \leq \lambda_1 \end{aligned}$$

(但し、 M が奇数の時は $-|\mu_m|$ を $\mu_m \leq 0$ で置き換える。)

が成り立つ。

(2) $\delta = 1$ のときには最高 weight 表現であり、その最高 weight を (3) のように書くと、 $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$ 及び $\mu_i \pm \mu_j \in \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) (但し、 M が奇数の時は $\mu_i \in \mathbb{Z}$) であって、

$$0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_L;$$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq |\mu_m|; \quad \mu_1 \leq |\lambda_1|$$

(但し、 M が奇数の時は $|\mu_m|$ を $\mu_m \geq 0$ で置き換える。)

が成り立つ。

証明 M が偶数の時に (1) のみを証明する。他の場合も同様である。

今 $\xi \in \mathfrak{g}_1$ をとり、 $[\xi, \xi]$ が Cartan 部分環 \mathfrak{h} に属しているとする。 λ を admissible unitary 表現 (ρ, E) の weight とするとき、

$$\delta\sqrt{-1} \lambda([\xi, \xi]) \geq 0 \quad (\delta \text{ は } (\rho, E) \text{ の associated constant})$$

が成り立つ。実際 $v \in E$ を零でない斉次元とすれば E の unitary 内積 $(,)$ を用いて、

$$\begin{aligned} \lambda([\xi, \xi])(v, v) &= (\rho([\xi, \xi])v, v) \\ &= (2\rho(\xi)^2v, v) = -2(-1)^{\deg(v)+1}(\rho(\xi)v, \rho(\xi)v) \end{aligned}$$

となる。もし $v \in E_0$ ならば $(v, v) > 0$, $\delta\sqrt{-1}(\rho(\xi)v, \rho(\xi)v) \geq 0$ より

$$\delta\sqrt{-1} \lambda([\xi, \xi]) = 2 \frac{\delta\sqrt{-1}(\rho(\xi)v, \rho(\xi)v)}{(v, v)} \geq 0$$

がわかる。 $v \in E_1$ のときも同様である。

orthosymplectic algebra $\mathfrak{g} = \text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ を §2 のように $\{p_i, q_i, c_j\}$ をとって Clifford-Weyl algebra の中に実現しておくと、

$$(1) \text{ 式の } X \longleftrightarrow \sum_{i=1}^L \frac{a_i}{4} (m(p_i, p_i) + m(q_i, q_i)) + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{2} m(c_{2j-1}, c_{2j})$$

であることがわかる。一方

$$[m(p_i, c_{j-1}) \pm m(q_i, c_j), m(p_i, c_{j-1}) \pm m(q_i, c_j)] =$$

$$= 2\{m(p_i, p_i) + m(q_i, q_i)\} \pm 4m(c_{j-1}, c_j)$$

であることと $m(p_i, c_{j-1}) \pm m(q_i, c_j) \in \mathfrak{g}_1$ であることから、

$$\delta\sqrt{-1} \lambda(m(p_i, p_i) + m(q_i, q_i)) \pm 2\delta\sqrt{-1} \lambda(m(c_{2j-1}, c_{2j})) \geq 0$$

である。(1) では $\delta = -1$ であるから、これより

$$\lambda_i \geq 0, \quad |\mu_j| \leq \lambda_i$$

がわかり、従って (ρ, E) は最低 weight 表現である。あとは \mathfrak{g} の最低 weight λ が \mathfrak{k} の表現の最低 weight にもなっていることに注意すれば定理の (1) の主張がわかる。

証明終わり。

4 super dual pair

定義 4.1 \mathfrak{a}_1 及び \mathfrak{a}_2 を orthosymplectic algebra $\text{osp}(b)$ の二つの部分 Lie super algebra とする。このとき $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ が *super dual pair* であるとは \mathfrak{a}_1 と \mathfrak{a}_2 が互いに commutant になっていることである。

より正確に言うと

- (0) $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] = 0$ であって、
- (1) $\text{osp}(b)$ の部分 Lie super algebra \mathfrak{b} が $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1] = 0$ を満たせば $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}_2$ 、
- (2) $\text{osp}(b)$ の部分 Lie super algebra \mathfrak{b} が $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_2] = 0$ を満たせば $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}_1$ 、

が成立するとき $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ を *super dual pair* と呼ぶのである。我々の興味は普通の Lie 環の場合と同じように特に \mathfrak{a}_1 及び \mathfrak{a}_2 が単純である場合にある。通常の Lie 環の場合の *super dual pair* については例えば [7] を見られたい。

例 $\mathfrak{osp}(2N, N; \mathbb{R})$ の中で、次の \mathfrak{a}_1 、 \mathfrak{a}_2 を考える。

$$\mathfrak{a}_1 = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} a1_N & b1_N & d1_N \\ c1_N & -a1_N & e1_N \\ -e1_N & d1_N & 0 \end{array} \right] \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{a}_2 = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} A & & \\ & A & \\ & & A \end{array} \right] \mid A \in \mathfrak{so}(N) \right\}.$$

すると $\mathfrak{a}_1 \simeq \mathfrak{osp}(2, 1; \mathbb{R})$ 、 $\mathfrak{a}_2 \simeq \mathfrak{so}(N)$ はそれぞれ $\mathfrak{osp}(2N, N; \mathbb{R})$ の単純な部分 Lie super algebra であって、 $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ は super dual pair である。

一般に上の例にあるようなタイプの super dual pair を考えて oscillator 表現をその super dual pair に制限することにより orthosymplectic algebra の新しい unitary 表現を得ることができる。これは次節で扱うことにして、まず上の super dual pair の例を一般化して、 $\mathfrak{osp}(2LN, MN; \mathbb{R})$ の中に super dual pair : $\mathfrak{osp}(2L, M; \mathbb{R}) \times \mathfrak{so}(N)$ を構成することから始めよう。

今 $(2L, M)$ -次元³ の実 super space $U = U_0 \oplus U_1$ と U 上の super skew symmetric 形式 B_U を考える。ここに B_U は U の適当な基底 $\{u_i \mid 1 \leq i \leq 2L + M, \deg u_i = 0 (1 \leq i \leq 2L), \deg u_{2L+j} = 1 (1 \leq j \leq M)\}$ に対して

$$(B_U(u_i, u_j))_{1 \leq i, j \leq 2L+M} = \begin{bmatrix} 0 & 1_L & 0 \\ -1_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_M \end{bmatrix}$$

で与えられているものとする。また $W = W_0$ を N 次元実ベクトル空間で、 W 上の正定値対称形式 B_W と、正規直交基底 $\{w_j \mid 1 \leq j \leq N\}$ が与えられているものとする。このとき $V = U \otimes W$ に対して、

$$V_0 = U_0 \otimes W_0, \quad V_1 = U_1 \otimes W_0$$

³一般に super space $U = U_0 \oplus U_1$ が (ℓ, m) -次元とは $\dim U_0 = \ell$ 、 $\dim U_1 = m$ となる時に言う。

で Z_2 -grading を入れ、更に V 上の super skew symmetric 形式 B を

$$B(u \otimes w, u' \otimes w') = B_U(u, u')B_W(w, w')$$

で決める。すると明らかに $\text{osp}(B; V) \simeq \text{osp}(2LN, MN; \mathbb{R})$ であるので、以下我々は $\text{osp}(B; V)$ 及び $\text{osp}(2LN, MN; \mathbb{R})$ を同一視することにする。

命題 4.2 上の記号の下に

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \{X \otimes 1_W \mid X \in \text{osp}(B_U; U)\}, \\ \mathfrak{a}_2 &= \{1_U \otimes Y \mid Y \in \text{so}(B_W; W)\} \end{aligned}$$

とおくと、 $\mathfrak{a}_1 \simeq \text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ 、 $\mathfrak{a}_2 \simeq \text{so}(N)$ であって、 $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ は $\text{osp}(2LN, MN; \mathbb{R})$ の super dual pair である。

証明は $\text{osp}(B_U; U)$ 及び $\text{so}(B_W; W)$ がそれぞれ U 及び W 上既約に作用していることから容易に従う。

次節以降で用いるため、上に挙げた $\mathfrak{g} = \text{osp}(2LN, MN; \mathbb{R})$ の super dual pair $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ を Clifford-Weyl algebra の中に実現するとどうなるかを見ておこう。上の記号をそのまま使って、

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= u_i, \quad \bar{q}_i = u_{L+i} \quad (1 \leq i \leq L) \\ \bar{c}_i &= u_{2L+i} \quad (1 \leq i \leq M) \end{aligned}$$

とおく。また

$$\begin{aligned} p_{ij} &= u_i \otimes w_j, \quad q_{ij} = u_{L+i} \otimes w_j \quad (1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N) \\ c_{ij} &= u_{2L+i} \otimes w_j \quad (1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N) \end{aligned}$$

とする。このとき

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &\simeq \langle m(u_i, u_j) \mid 1 \leq i, j \leq 2L + M \rangle / \mathbb{R} \subset C(U, B_U) \\ \mathfrak{a}_2 &\simeq \langle m(w_i, w_j) \mid 1 \leq i, j \leq N \rangle / \mathbb{R} \subset C(W, B_W) \end{aligned}$$

であるが、包含写像 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \hookrightarrow \mathfrak{g}$ は

$$m(u_i, u_j) \mapsto \sum_{k=1}^N m(u_i \otimes w_k, u_j \otimes w_k)$$

及び

$$m(w_i, w_j) \mapsto \sum_{k=1}^L \{-m(p_{ki}, q_{kj}) + m(p_{kj}, q_{ki})\} + \sum_{i=1}^M m(c_{ki}, c_{kj})$$

で与えられている。実際

$$w = \sum_{k=1}^N B_W(w_k, w) w_k \quad (w \in W),$$

$$u = \sum_{k=1}^L \{-B_U(q_k, u) p_k + B_U(p_k, u) q_k\} + \sum_{k=1}^M B_U(c_k, u) c_k \quad (u \in U)$$

となっていることから上の式は計算により容易に確かめられる。或いは行列表示から直接求めても良い。

5 oscillator 表現の super dual pair への制限

\mathfrak{g} の oscillator 表現 (ρ, E) を super dual pair $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ に制限すると $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ の表現の直和に分解するが、 $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ の既約表現は $\tau \otimes \sigma$ ($\tau \in \widehat{\mathfrak{a}}_1, \sigma \in \widehat{\mathfrak{a}}_2$) の形に書けることがわかる。明らかに τ は $\mathfrak{a}_1 \simeq \mathfrak{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ の unitary 表現でもあるので、こうして我々は $\mathfrak{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ の新しい既約 unitary 表現を得ることができる。

まだ一般の場合には完全な分解定理は得ていないが、低階数の場合にはいくつか完全な計算を行うことができた。そのひとつをここに紹介しておく。

命題 5.1 $N = 2n$ とする。このとき $\mathfrak{osp}(2N, 2N; \mathbb{R})$ の oscillator 表現 (ρ, E) は $\mathfrak{osp}(2, 2; \mathbb{R}) \times \mathfrak{so}(N)$ の表現として次のように分解する。

$$(\rho, E) \simeq \left\{ \tau(n; 0) \otimes \sigma^+(0, n) \oplus \sum_{k=-n}^n \oplus \tau(n; k) \otimes \sigma(0, n - |k|) \right\} \oplus$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \oplus \left\{ \tau(l+n; 0) \otimes \sigma^+(l, n) \oplus \sum_{k=1-n}^{n-1} \oplus \tau(l+n; k) \otimes \sigma(l, n - |k|) \right\},$$

ここに $\tau(l; k)$ は $\mathfrak{osp}(2, 2; \mathbb{R})$ の最低 weight $(l; k)$ の既約最低 weight 表現、 $\sigma(l, k)$ は $\mathfrak{so}(N)$ の最低 weight $(-l-1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{k-1 \text{ 回}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k \text{ 回}})$ の既約最低 weight 表現、また $\sigma^+(l, n)$ は最低 weight $(-l-1, -1, \dots, -1, 1)$ の既約最低 weight 表現である。

証明は計算による。詳しくは [12] を参照されたい。

系 5.2 $\text{osp}(2, 2; \mathbb{R})$ の admissible 既約 unitary 表現で、

(a) associated constant が $\delta = -1$ 、

(b) $Sp(2, \mathbb{R}) \times SO(2)$ の表現に持ち上げ可能であるもの

は最低 weight $(\ell; k)$ ($\ell \geq |k|, \ell, k \in \mathbb{Z}$) の既約最低 weight 表現で尽くされる。

証明 定理 3.3 より既約 unitary 表現で associated constant $\delta = -1$ のものは最低 weight が $(\ell; k)$ ($\ell \geq |k|, \ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$) の既約最低 weight 表現でなければならない。更に条件 b) より $\ell, k \in \mathbb{Z}$ がわかる。逆にこのような最低 weight 表現で ℓ 及び k が整数になるものは命題 5.1 より unitary である。

証明終わり。

以後簡単のため、 $M = 2m \geq 4, N = 2n \geq 2$ を常に仮定する。また §4 でやったように $\text{osp}(2L, M; \mathbb{R}) \times \text{so}(N)$ を super dual pair として $\mathfrak{g} = \text{osp}(2LN, MN; \mathbb{R})$ に埋め込み $\mathfrak{a}_1 = \text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ 、 $\mathfrak{a}_2 = \text{so}(N)$ と書くことにする。

さて、一般の場合に oscillator 表現を完全に分解することに成功していないのは前述の通りであるが、 (ρ, E) に含まれる $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ の表現の族は大部分が判明している。そのことから次の定理を得る。

定理 5.3 orthosymplectic algebra : $\text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ ($L \geq 1, M = 2m \geq 4$) の最低 weight $\lambda = \sum_{i=1}^L \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^m \mu_j f_j$ ((3) 式参照) の既約最低 weight 表現は λ が次の (a) (b) の条件を満たせば unitary 化可能である。

(a) $0 \leq \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k < \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_L$ は非負整数であって、 $L \leq \lambda_1 + k$ を満たす。

(b) $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq -|\mu_m| \leq 0$ は非正整数であって、 $L - (\lambda_1 + k) \leq \mu_1$ を満たす。

更に上の (a) (b) を満たす λ を最低 weight に持つ既約最低 weight 表現は $N = 2\lambda_1$ として $\text{osp}(2LN, MN; \mathbb{R})$ の oscillator 表現の部分表現として実現できる。

証明 $\text{osp}(2LN, MN; \mathbb{R})$ の oscillator 表現 (ρ, E) を表現空間 E として

$$E = \mathbb{C}[z_{ij} \mid 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N] \otimes \mathcal{C}(r_{ij} \mid 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq n)$$

をとり、その作用を

$$\rho(p_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})(z_{ij} - \frac{\partial}{\partial z_{ij}}) \otimes 1 \quad (1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N)$$

$$\rho(q_{ij}) = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})(z_{ij} + \frac{\partial}{\partial z_{ij}}) \otimes 1 \quad (1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N)$$

$$\rho(c_{i,2\ell-1}) = 1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} r_{i,\ell} \quad (1 \leq i \leq M, 1 \leq \ell \leq m)$$

$$\rho(c_{i,2\ell}) = 1 \otimes \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} r_{i,\ell} \alpha_{i,\ell} \quad (1 \leq i \leq M, 1 \leq \ell \leq m)$$

として実現しておく (§2 参照)。

このとき E の中で $\text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ 及び $\text{so}(N)$ の双方について同時に最低 weight 元になっているベクトルを見つければ、その最低 weight をそれぞれ λ, ω として $\tau_\lambda \otimes \sigma_\omega$ は E の部分表現として現れることがわかる。ここに τ_λ は最低 weight λ の $\text{osp}(2L, N; \mathbb{R})$ の、また σ_ω は最低 weight ω の $\text{so}(N)$ の既約最低 weight 表現である。

前節でやったように super dual pair $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \simeq \text{osp}(2L, N; \mathbb{R}) \times \text{so}(N)$ を $\mathfrak{g} = \text{osp}(2LN, MN, \mathbb{R})$ に埋め込み、負の単純根に対応する根ベクトルの作用を計算すれば、結局次の形のベクトル u は $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ の最低 weight ベクトルであることがわかる。

$$u = \prod_{\ell=1}^k \Lambda_\ell^{i_\ell} \otimes \prod_{t=1}^n v(j_t; t),$$

$$\begin{cases} \Lambda_\ell = \det(z_{L-i+1, 2j-1} - \sqrt{-1} z_{L-i+1, 2j})_{1 \leq i, j \leq \ell}, \\ v(\ell; t) = \prod_{j=1}^{\ell} (r_{2j-1, t} - \sqrt{-1} r_{2j, t}) \prod_{j=\ell+1}^m r_{2j-1, t} r_{2j, t} \end{cases}$$

ここに i_ℓ, j_t は整数で、

$$i_\ell \geq 0, \min(L, n) \geq k \geq 0,$$

$$0 = j_1 = j_2 = \cdots = j_k \leq j_{k+1} \leq j_{k+2} \leq \cdots \leq j_n \leq m$$

を満たしているものとする。更に u の $\text{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ -weight は、計算により

$$\lambda_i = \sum_{L-i+1}^k i_\ell + n \quad (1 \leq i \leq L);$$

$$\mu_j = -\#\{t \mid j_t \geq j\} \quad (1 \leq j \leq m)$$

であることが確かめられる。あとは i_t, j_t を上の条件の範囲で自由に動かして定理の形にまとめれば良い。

証明終わり。

注意 定理の (a) を満たす λ は当然 $\mathfrak{sp}(2L, \mathbb{R})$ の unitary 最低 weight 表現の最低 weight になっている。[3] における $\mathfrak{sp}(2L, \mathbb{R})$ の unitary 既約最高 weight 表現の分類とあわせて見ると興味深いと思われる。

6 離散系列表現の指標公式

この節では §5 で与えた unitary 最低 weight 表現の指標を与えることを目標とする。

まず $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{osp}(2L, M; \mathbb{C})$ に \mathbb{Z} -grading を入れることから始めよう。偶根の全体 Σ_0 は $\mathfrak{sp}(2L, \mathbb{R}) \times \mathfrak{so}(M)$ の根系と一致するが、そのうち compact 根 Σ_c と non-compact 根 Σ_n を

$$\Sigma_c = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq L\} \cup \{\pm f_i \pm f_j \mid 1 \leq i \neq j \leq m\}$$

$$\Sigma_n = \{e_i + e_j \mid 1 \leq i, j \leq L\}$$

とおく。この用語は半単純 Lie 環の普通の用語と一致している。また我々は $M = 2m$ を偶数と仮定していることにも注意しておく。正根 Σ_c^+, Σ_n^+ を (2) 式と適合するようにとっておく。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(i)$ ($-2 \leq i \leq 2$) を

$$\mathfrak{g}(\pm 2) = \text{root-space}(\Sigma_n^{\pm})$$

$$\mathfrak{g}(\pm 1) = \text{root-space}(\Sigma_1^{\pm})$$

$$\mathfrak{g}(0) = \text{root-space}(\Sigma_c)$$

で定義する。ここに $\text{root-space}(A)$ は A に含まれる根に対応する根空間から生成された $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分空間、 $\Sigma_n^- = -\Sigma_n^+$ 、 $\Sigma_1^- = -\Sigma_1^+$ である。このとき

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \sum_{i=-2}^2 \oplus \mathfrak{g}(i)$$

は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の \mathbb{Z} -grading を与えることがわかる。 \mathfrak{k} を \mathfrak{g} の偶部分 \mathfrak{g}_0 の極大コンパクト部分環とすると、 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}(0)$ となっていることにも注意しておく。

$$\mathfrak{q} = \sum_{i=-2}^0 \mathfrak{g}(i) \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

とおくと、 \mathfrak{q} は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の放物型部分環⁴ となりその簡約可能部分は $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ である。 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ の座標表示を (3) 式のように

$$\lambda = \sum_{i=1}^L \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^m \mu_j f_j = (\lambda_1, \dots, \lambda_L; \mu_1, \dots, \mu_m)$$

と書く。 \mathfrak{g} の偶部分 $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{sp}(2L, \mathbb{R}) \times \mathfrak{so}(2m)$ に対応する線型 Lie 群 $Sp(2L, \mathbb{R}) \times SO(2m)$ を考え、 λ が $Sp(2L, \mathbb{R}) \times SO(2m)$ の正則離散系列表現の最低 weight で、しかも定理 5.3 の条件を満たしているとする。則ち具体的には、

- a) λ_i ($1 \leq i \leq L$) と μ_j ($1 \leq j \leq m$) はすべて整数であって、
- b) $L \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_L$; $-\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq -|\mu_m|$ が成り立つ、

とする。すると λ は $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の既約有限次元表現の最低 weight でもあるので、その有限次元表現を $\tau(\lambda)$ と書こう。 $\tau(\lambda)$ は $\mathfrak{g}(0)$ の表現であるが、 $\mathfrak{g}(-2) \oplus \mathfrak{g}(-1)$ の部分は零とおいて \mathfrak{q} の表現に拡張できる⁵。その表現をやはり $\tau(\lambda)$ と記すことにする。

定義 6.1 λ を上の条件 (a) (b) を満たす $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ の元、 $\tau(\lambda)$ を対応する \mathfrak{q} の表現とする。このとき \mathfrak{g} の表現

$$D(\lambda) = \text{Ind}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} \tau(\lambda) = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{q})} \tau(\lambda)$$

を $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2L, M; \mathbb{R})$ の離散系列表現と呼ぶ。ここに $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 、 $U(\mathfrak{q})$ はそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 及び \mathfrak{q} の展開環である。

$D(\lambda)$ を離散系列表現と呼ぶことの正当性の一つは次の定理にある。

⁴ \mathfrak{q} が放物型部分環とは Borel 部分環を含むときに言う。

⁵ \mathfrak{q} は Lie super algebra であるからその表現空間は超空間 $U = U_0 \oplus U_1$ であるが、今の場合 $U_0 = (\tau(\lambda)$ の表現空間)、 $U_1 = (0)$ と思っている。

定理 6.2 $D(\lambda)$ を $\text{osp}(2L, 2m; \mathbb{R})$ の離散系列表現とする。もし λ が

$$\prod_{\beta \in \Sigma_1^+} \langle \beta, \lambda \rangle \neq 0 \quad (4)$$

を満たせば $D(\lambda)$ は既約な admissible unitary 最低 weight 表現でその最低 weight は λ である。ここに $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathfrak{g} の Killing 形式から誘導された $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ 上の双線型形式である。

証明には Laplace-Casimir 作用素に関する詳細な情報が必要である。Laplace-Casimir 作用素については F.A.Berezin [1] による非常に興味深い研究があるがここでは割愛せざるを得ない。詳しくは [12] を参照されたい。

この定理より $D(\lambda)$ は λ が (4) 式の条件を満たしていれば §5 で扱っていた unitary 表現に一致していることがわかる。以下では $D(\lambda)$ の指標を計算する。まず指標の定義をしておく。

定義 6.3 (ω, F) を Lie super algebra \mathfrak{g} の admissible な unitary 表現とし、 \mathfrak{h} を \mathfrak{g} の Cartan 部分環とする。このとき $x \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\text{Ch}(\omega)(x) = \text{Ch}((\omega, F))(x) = \text{trace}(\exp \omega(x))$$

を (ω, F) の指標 (character)、

$$\text{s-Ch}(\omega)(x) = \text{s-Ch}((\omega, F))(x) = \text{s-trace}(\exp \omega(x))$$

を超指標 (super character) と呼ぶ。ここに s-trace は super trace を意味する。

さて、ベクトル空間として $D(\lambda)$ はその定義から

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{q})} \tau(\lambda) = U(\mathfrak{g}(2) + \mathfrak{g}(1)) \otimes_{\mathbb{C}} \tau(\lambda) \\ &\simeq S(\mathfrak{g}(2)) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge \mathfrak{g}(1) \otimes_{\mathbb{C}} \tau(\lambda) \end{aligned}$$

である。ここに $S(\cdot)$ は対称テンソルのなす代数、 $\wedge(\cdot)$ は外積代数を表す。Weyl の指標公式により

$$\text{Ch}(\tau(\lambda)) = \frac{\sum_{w \in W(\Sigma_c)} \det w \exp w(\lambda - \delta_c)}{\exp(-\delta_c) \prod_{\alpha \in \Sigma_1^+} (1 - \exp \alpha)}$$

であることがわかる。記号中 $W(\Sigma_c)$ は根系 Σ_c の Weyl 群、

$$\delta_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma_c^+} \alpha$$

である。また明らかに

$$\text{Ch}(S(\mathfrak{g}(2)) \otimes \wedge \mathfrak{g}(1)) = \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} (1 - \exp \alpha)} \prod_{\beta \in \Sigma_1^+} (1 + \exp \beta)$$

であるから結局 $\text{Ch}(D(\lambda)) = \text{Ch}(\tau(\lambda)) \cdot \text{Ch}(S(\mathfrak{g}(2)) \otimes \wedge \mathfrak{g}(1))$ はまとめると次のようになる。

命題 6.4 離散系列表現 $D(\lambda)$ の指標は次の式で与えられる。

$$\text{Ch}(D(\lambda)) = \frac{\sum_{w \in W(\Sigma_c)} \det w \exp w(\lambda - \delta)}{\exp(-\delta) \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} (1 - \exp \alpha)} \cdot \prod_{\beta \in \Sigma_1^+} (1 + \exp \beta)$$

ここに $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma_0^+} \alpha - \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Sigma_1^+} \beta$ である。

命題 6.5 離散系列表現 $D(\lambda)$ の超指標は次の式で与えられる。

$$s\text{-Ch}(D(\lambda)) = \frac{\sum_{w \in W(\Sigma_c)} \det w \exp w(\lambda - \delta)}{\exp(-\delta) \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} (1 - \exp \alpha)} \cdot \prod_{\beta \in \Sigma_1^+} (1 - \exp \beta)$$

証明は命題 6.4 とまったく同じである。

Weyl の分母 (Weyl denominator) Δ 、Weyl の超分母 (Weyl super denominator) $s\text{-}\Delta$ をそれぞれ

$$\Delta = \exp(-\delta) \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} (1 - \exp \alpha) \prod_{\beta \in \Sigma_1^+} (1 + \exp \beta)^{-1},$$

$$s\text{-}\Delta = \exp(-\delta) \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} (1 - \exp \alpha) \prod_{\beta \in \Sigma_1^+} (1 - \exp \beta)^{-1},$$

とおくと、 $\text{Ch } D(\lambda)$ 、 $s\text{-Ch } D(\lambda)$ は通常の半単純 Lie 群の離散系列表現の指標とまったく同じ形をしていることがわかる。我々が $D(\lambda)$ を離散系列表現と呼ぶ理由の二つめはこの指標公式である。なお通常の半単純 Lie 群の離散系列表現の代数的な性質は Harish-Chandra によって詳しく研究されたが [16] にわかりやすくまとめられている。またこれらの半単純 Lie 群の正則離散系列表現の研究は我々の議論の原点であることにも注意しておく。

参考文献

- [1] F.A. Berezin. *Introduction to Superanalysis*. Reidel, 1987.
- [2] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbre de Lie, Chap. IV-VI*. Masson, 1981.
- [3] T. Enright, R. Howe, and N. Wallach. A classification of unitary highest weight modules. In *Representation Theory of Reductive Groups*, pages 97–143, Birkhäuser, 1983.
- [4] C. Fronsdal, editor. *Essays on Supersymmetry*. Reidel, 1986.
- [5] H. Furutsu. Representations of Lie superalgebras, II. Unitary representations of Lie superalgebras of type $A(n, 0)$. preprint.
- [6] H. Furutsu and T. Hirai. Representations of Lie super algebras, I. Extensions of representations of the even part. *J. Math. Kyoto Univ.*, 28:695–749, 1988.
- [7] R. Howe. Reciprocity laws in the theory of dual pairs. In *Representation Theory of Reductive Groups*, pages 159–175, Birkhäuser, 1983.
- [8] J.C. Jantzen. *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren*. Springer-Verlag, 1983.
- [9] V.G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras, 2nd ed.* Cambridge Univ. Press, 1985.
- [10] V.G. Kac. Lie superalgebras. *Adv. in Math.*, 26:8–96, 1977.
- [11] V.G. Kac. Representations of classical Lie superalgebras. *LNM*, 676:597–626, 1977.
- [12] K. Nishiyama. Characters and super characters of discrete series representations for orthosymplectic Lie super algebras. preprint.
- [13] K. Nishiyama. Oscillator representations and a super dual pair for orthosymplectic algebras. preprint.

- [14] K. Nishiyama. Oscillator representations for orthosymplectic algebras. preprint.
- [15] K. Nishiyama. Super dual pairs and unitary highest weight modules of orthosymplectic algebras. preprint.
- [16] V.S. Varadarajan. Infinitesimal theory of representations of semisimple Lie groups. In *Harmonic Analysis and Representations of Semisimple Lie Groups*, pages 131–255, Reidel, 1983.