Title	Grothendieck群へのFrobenius写像の作用について (Frobenius写像の可換環論への応用)
Author(s)	蔵野, 和彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1990), 713: 45-52
Issue Date	1990-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/101718
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第713巻 1990年 45-52

Grothendieck 群への Frobenius 写像の作用について

蔵野和彦 (Kazuhiko Kurano)

東京都立大学理学部

最近、Dutta multiplicity や Hilbert-Kunz function など、Frobenius 写像を使って定義される標数 $p>0$ の環やその上の加群の invariant に関する研究が盛んに行われている。このノートでは、intersection theory とそれらの invariant との関連についての解説を行い、特殊な場合の計算をすることにする。

1 Riemann-Roch map と Frobenius 写像

S を regular scheme、(X,g) を S 上 of finite type の S-scheme (構造射 $g: X \to S$ が of finite type) であるとき、Fulton-Riemann-Roch の定理 ([1] の Theorem 18.3) により、構造射 g によって定まる同型写像

$$\tau_g : \mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathrm{A}_* X_{\mathbf{Q}}$$

が構成できる (この写像のことを Riemann-Roch map という)。ここで、$\mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}}$ は有理係数の X 上の coherent sheaf の Grothendieck 群、$\mathrm{A}_* X_{\mathbf{Q}}$ は、有理係数の X の Chow group である。また、S-scheme の間の proper 射 $l:(X,g) \to (Y,h)$ が与えられれば、

$$\begin{CD} \mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}} @>{\tau_g}>> \mathrm{A}_* X_{\mathbf{Q}} \\ @V{l_*}VV @VV{l_*}V \\ \mathrm{K}_0 Y_{\mathbf{Q}} @>{\tau_h}>> \mathrm{A}_* Y_{\mathbf{Q}} \end{CD}$$

が可換となる。

以下、k を標数 $p>0$ の代数的閉体、$A = k[[x_1, \ldots, x_t]]$ を k 上の形式的巾級数環、$S = \mathrm{Spec}(A)$ とする。さらに、$B = A/I$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $i: X \to S$ を closed immersion とする。$f : B \to B$ を Frobenius 射 ($f(x) = x^p$) とし、それに対応する affine scheme の射を ${}^a f : X \to X$ とする。このとき、${}^a f$ は finite 射となり、$({}^a f)^m \cdot i : X \to S$ も X に S-scheme の構造を与える。(X, i) と $(X, ({}^a f)^m \cdot i)$ は S-scheme として見れば、構造射が異なっているので同型ではない。しかし、簡単に次のことがわかる。

命題 1 任意の自然数 m に対して、$\tau_i = \tau_{({}^a f)^m \cdot i}$

証明 M を有限生成 B 加群とする。$\mathbf{F}.$ を M の A 加群としての極小自由分解とすれば、Riemann-Roch map τ_i の定義より、

$$\tau_i([M]) = \mathrm{ch}_X^S(\mathbf{F}.) \cap [S]$$

となる。

また、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

は可換であることから、$({}^a f)^m \cdot i = i \cdot ({}^a f)^m$ となる。

A は、正則局所環であるから、$\mathrm{K}_0 S_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}[A]$ となり、[1] の Theorem 18.3 により、$\mathrm{A}_* S_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}[S]$ で、$\tau_{({}^a f)^m}([A]) = [S]$ となることがわかる。このとき、local Riemann-Roch formula ([1] の Example 18.3.12) により、

$$\tau_{i \cdot ({}^a f)^m}([M]) = \mathrm{ch}_X^S(\mathbf{F}.) \cap \tau_{({}^a f)^m}([A]) = \mathrm{ch}_X^S(\mathbf{F}.) \cap [S]$$

となり、$\tau_i = \tau_{({}^a f)^m \cdot i}$ がわかる。 **Q.E.D.**

上の命題により、任意の自然数 m に対して、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\tau_i} & \mathrm{A}_* X_{\mathbf{Q}} \\ \downarrow ({}^a f)_*^m & & \downarrow ({}^a f)_*^m \\ \mathrm{K}_0 Y_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\tau_i} & \mathrm{A}_* Y_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

が可換となることがわかった。

$c \in \mathrm{A}_j X_{\mathbf{Q}}$ とすると、proper push-forward の定義より $({}^a f)_*^m(c) = p^{jm} c$ となる。また逆に、

$$\mathrm{A}_j X_{\mathbf{Q}} = \{c \in \mathrm{A}_* X_{\mathbf{Q}} \mid ({}^a f)_*^m(c) = p^{jm} c\}$$

で特徴づけられる。

このことから、

$$L_j \mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}} = \{c \in \mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}} \mid ({}^a f)_*^m(c) = p^{jm} c\}$$

と定義すると、$\tau_i(L_j \mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}}) = \mathrm{A}_j X_{\mathbf{Q}}$ が成立する。つまり、τ_i は自然な分解

$$\mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}} = \oplus_j L_j \mathrm{K}_0 X_{\mathbf{Q}}$$

を定めている。(数理研でお話しした様に、この様な分解が存在することは、代数的に簡単に証明できる。上の命題により、この分解が Fulton-Riemann-Roch の同型写像 τ_i の正体である。)

2 Grothendieck 群の分解について

以下、環 B の有理係数の有限 B-加群の Grothendieck 群を単に $\mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}}$ と書く。finite 射 $g : B \to C$ があれば、$g^* : \mathrm{K}_0 C_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}}$ が誘導される。

以下この section では、B は係数体が標数 $p > 0$ の代数的閉体である complete local ring とする。

$\dim B = d$ とすると、$\mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}} = \oplus_j^d L_j \mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}}$ と書ける。それ故に、

$$[B] = c_d + c_{d-1} + \cdots + c_0, \quad c_j \in L_j \mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}}$$

と分解する。$f : B \to B$ を Frobenius 射とすれば、定義より、

$$(f^*)^m([B]) = p^{md} c_d + p^{m(d-1)} c_{d-1} + \cdots + c_0$$

となる。このことから、

$$c_d = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{p^{md}} (f^*)^m([B])$$

となる。このとき、次のことが成立する。

注意 2 G. : $0 \to G_n \to \cdots \to G_0 \to 0$ を finite free B-complex で、任意の i に対して、$l_B(\mathrm{H}_i(\mathrm{G.})) < \infty$ とする。このとき、有限生成 B-加群 M に対して、$\chi_{\mathbf{G}.}([M]) = \sum_i (-1)^i l_B(\mathrm{H}_i(\mathrm{G.} \otimes M))$ と定めることにより、

$$\chi_{\mathbf{G}.} : \mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{Q}$$

という射が構成できる。このとき、

$$
\begin{aligned}
& \chi_{\mathbf{G}.}(c_d) \\
= & \sum_i (-1)^i l_B(\mathrm{H}_i(\mathbf{G}. \otimes \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}}(f^*)^m([B]))) \\
= & \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} \sum_i (-1)^i l_B(\mathrm{H}_i(\mathbf{G}. \otimes (f^*)^m([B]))) \\
= & \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} \sum_i (-1)^i l_B(\mathrm{H}_i(F^m\mathbf{G}.))
\end{aligned}
$$

ここで、$F^m\mathbf{G}.$ は $\mathbf{G}.$ の boundary map の各成分を p^m 乗したものである。一番下の式は、complex $\mathbf{G}.$ の Dutta multiplicity と呼ばれている。また、[1] の Theorem 18.3 の (5) により、

$$\tau(B) = [\mathrm{Spec}(B)] + (\text{次元が } d \text{ 未満のサイクル})$$

となることから、$\tau(c_d) = [\mathrm{Spec}(B)]$ となることがわかる。このことと、local Riemann-Roch formula ([1] の Example 18.3.12) より、

$$\chi_{\mathbf{G}.}(c_d) = \mathrm{ch}^{\mathrm{Spec}(B)}_{\mathrm{Spec}(k)}(\mathbf{G}.) \cap [\mathrm{Spec}(B)]$$

となり、これが、Dutta multiplicity を表す。(k は、B の剰余体。)

上の式の右辺を見れば、Dutta multiplicity は実は環の標数に依らずに定義されていることがわかる。(上で $\mathbf{G}.$ の長さが d で $\mathrm{ch}(B) = p > 0$ の場合、$\chi_{\mathbf{G}.}(c_d) > 0$ であることが [4] の中で示されている。)

$[B] = c_d + c_{d-1} + \cdots + c_0$ とすると、$\tau([B]) = \tau(c_d) + \tau(c_{d-1}) + \cdots + \tau(c_0)$ であり、$\tau(c_j) \in \mathrm{A}_j\mathrm{Spec}(B)_{\mathbf{Q}}$ となる。このことから、$\tau([B])$ の Chow group の中での分解の様子がわかれば、$[B]$ の Grothendieck 群の中での分解がわかる。

補題 3　$[B] = c_d + c_{d-1} + \cdots + c_0$, $c_j \in L_j\mathrm{K}_0B_{\mathbf{Q}}$ としたとき、

- B が regular local ring のとき、$[B] = c_d$,
- B が complete intersection のとき、$[B] = c_d$,
- B が Gorenstein のとき、$c_{d-1} = c_{d-3} = \cdots = 0$,
- B が Cohen-Macaulay のとき、$[K_B] = c_d - c_{d-1} + c_{d-2} - c_{d-3} + \cdots$

となる。

証明 B が正則局所環であるとき、Kunz の定理より $f^*(B)$ は B 自由加群となる。故に $f^*(B) = p^d B$ となり、このことより直ちに $c_{d-1} = \cdots = c_0 = 0$ となることがわかる。

B が complete intersection のときは、[1] の Corollary 18.1.2 より $[B] = c_d$ となる。

B が Gorenstein 環のときの式は Cohen-Macaulay 環のときの特別な場合である。

B を Cohen-Macaulay 環とする。$B = A/I$、ただし A は正則局所環とする。このとき、B の A 加群としての極小自由分解を $\mathbf{F}.$ とすれば、$\mathbf{F}.^*$ は K_B の極小自由分解となる。このとき、$\mathbf{F}.$ と $\mathbf{F}.^*$ に関する localized chern character の公式 ([1] の Example 18.1.2) と Riemann-Roch map τ の定義から $[K_B] = c_d - c_{d-1} + c_{d-2} - \cdots$ となる。 **Q.E.D.**

環の次元が低い場合は、次の様に $c_0, \ldots, c_d$ が計算できる場合がある。

例 4 B を 2 次元の正規環とする。$[B] = c_2 + c_1 + c_0$、$c_j \in L_j \mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}}$ とおく。このとき、$L_0 \mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}} = 0$ より $c_0 = 0$、補題 3 により $[K_B] = c_3 - c_2$ である。このことから

$$c_2 = \frac{[B] + [K_B]}{2}, \quad c_1 = \frac{[B] - [K_B]}{2}$$

となる。それ故に、

$$f^{*m}([B]) = p^{2m} c_2 + p^m c_1 = \frac{p^{2m} + p^m}{2}[B] + \frac{p^{2m} - p^m}{2}[K_B]$$

となることがわかる。

注意 5 B を正規環とし、$[B] = c_d + c_{d-1} + \cdots + c_0$ とする。このとき、[1] の Example 18.1.2 と Theorem 18.3 (5) より、

$$[K_B] = c_d - c_{d-1} + (\text{次元が } d-2 \text{ 以下のサイクル})$$

と分解される。このとき、$L_{d-1} \mathrm{K}_0 B_{\mathbf{Q}} \simeq \mathrm{Cl}(B) \otimes \mathbf{Q}$ であり、$2c_{d-1}$ が $\mathrm{cl}(K_B)$ に対応している。

3 可換環論への応用例

以下の命題で、環が complete intersection とある部分は全て 2 次元以下の Cohen-Macaulay 環、または、3 次元以下の Gorenstein 環で置き換えても成立する。(証明はほとんど complete intersection の場合と同じである。ただし、1 次元のサイクル c_1 の部分を処理する為に、first localized chern character の vanishing theorem [3] を使わなければならない。)

命題 6 $(A, \mathbf{m})$ を標数 $p > 0$ の complete intersection で、$\dim A = d$ とする。J が $\mathbf{m}$ 準素イデアルで $\mathrm{pd}_A J < \infty$ であれば、

$$l_A(A/J) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(A/J^{[p^m]})$$

が成立する。

証明 A は complete local ring で、係数体 $A/\mathbf{m}$ は代数的閉体の場合に示せばよい。また、

$$l_A(A/J) = \sum_i (-1)^i l_A(\mathrm{Tor}_i^A(A/J, A))$$

に注意する。$\mathbf{P}.$ を A/J の A 上の極小自由分解とし、$[A] = c_d \in L_d \mathrm{K}_0 A_{\mathbf{Q}}$（補題 3）とする。すると、

$$\begin{aligned} & l_A(A/J) \\ = & \sum_i (-1)^i l_A(\mathrm{H}_i(\mathbf{P}. \otimes A)) \\ = & \sum_i (-1)^i l_A(\mathrm{H}_i(\mathbf{P}. \otimes c_d)) \\ = & \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} \sum_i (-1)^i l_A(\mathrm{H}_i(F^m \mathbf{P}.)) \\ = & \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(\mathrm{H}_i(F^m \mathbf{P}.)) \\ = & \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(A/J^{[p^m]}) \end{aligned}$$

となる。 **Q.E.D.**

上の命題から直ちに次のことがわかる。

命題 7 $(A, \mathbf{m})$ を標数 $p > 0$ の complete intersection とする。I が $\mathbf{m}$ 準素イデアルで、

$$I^* \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq I$$

であり、$\mathrm{pd}_A J_1 < \infty$, $\mathrm{pd}_A J_2 < \infty$ とするこのとき、$J_1 = J_2$（ただし、I^* は I の tight closeure とする）。

証明 命題 6 より、

$$\begin{aligned} & l_A(J_1/J_2) \\ = & l_A(A/J_2) - l_A(A/J_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(A/J_2^{[p^m]}) - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(A/J_1^{[p^m]}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(J^{[p^m]}/J_2^{[p^m]}) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(I^{*[p^m]}/I^{[p^m]})
\end{aligned}
$$

となるが、tight closure の length criterion ([2] の Theorem 8.17) より、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(I^{*[p^m]}/I^{[p^m]}) = 0$$

であるから、$J_1 = J_2$ がわかる。 **Q.E.D.**

$(A, \mathbf{m})$ が $\mathrm{ch}(A) = p > 0$ の局所環で、$\dim A = d$ とする。I を $\mathbf{m}$ 準素イデアル、M を有限生成 A 加群としたとき、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(M/I^{[p^m]}M)$$

は実数値に収束することが知られている ([5])。

この極限値は一般に Hilbert-Kunz function と呼ばれている。

命題 8 $(A, \mathbf{m})$ を標数 $p > 0$ の complete intersection 整域で $\dim A = d$ とする。I が $\mathbf{m}$ 準素イデアルで、$\mathrm{pd}_A I < \infty$ とする。このとき、有限生成 A 加群 M に対して

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(M/I^{[p^m]}M) = (\mathrm{rank}_A M) \cdot l_A(A/I)$$

となる。特に、この極限値は非負整数となる。

証明 $r = \mathrm{rank}_A M$ とする。このとき、

$$0 \to A^r \longrightarrow M \longrightarrow N \to 0$$

という A 加群の完全列が存在して、$\mathrm{rank}_A N = 0$ となる。また、

$$\mathbf{P}. : \quad 0 \to P_d \to \cdots \to P_0 \to 0$$

を A/I の A 上の 極小自由分解とする。このとき、$F^m\mathbf{P}.$ は、$A/I^{[p^m]}$ の A 上の極小自由分解となり、これより、

$$\cdots \to \mathrm{H}_1(F^m\mathbf{P}. \otimes N) \to (A/I^{[p^m]})^r \to M/I^{[p^m]}M \to N/I^{[p^m]}N \to 0$$

という完全列が存在する。これらの加群は全て長さ有限であり、

$$\left| r \cdot l_A(A/I^{[p^m]}) - l_A(M/I^{[p^m]}) \right| \leq l_A(N/I^{[p^m]}) + l_A(\mathrm{H}_1(F^m\mathbf{P}. \otimes N))$$

が成立する。

ここで、$\dim N < d$ より、直ちに

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(N/I^{[p^m]}N) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(\mathrm{H}_1(F^m\mathbf{P}.\otimes N)) = 0$$

がわかる（[4] または [5]）。

このことから、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(M/I^{[p^m]}M) = \lim_{m\to\infty} r \cdot \frac{1}{p^{md}} l_A(A/I^{[p^m]}) = r \cdot l_A(A/I)$$

がわかる。 **Q.E.D.**

参考文献

[1] W. Fulton, *Intersection Theory,* Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

[2] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem I,* preprint.

[3] P. Roberts, *The MacRae invariant and the first local Chern character,* Trans. of Amer. Math. Soc. **300**, 1987, 583-591.

[4] P. Roberts, *Intersection theorems,* preprint.

[5] G. Seibert, *Complexes with homology of finite length and Frobenius functors,* J. of Alg. **125**, 1989, 278-287.