

## Réciprocité de Frobenius pour des groupes de Lie résolubles exponentiels

Hidénori FUJIWARA

Faculté de Technologie à Kyushu, Université de Kinki

### §1. Désintégration d'une représentation induite

Soit  $G$  un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Cela signifie que l'application exponentielle est un difféomorphisme de  $\mathfrak{g}$  sur  $G$ : nous le notons  $G = \exp \mathfrak{g}$ . Nous commençons cette note par nous intéresser aux représentations monomiales de  $G$ . Soient  $H$  un sous-groupe connexe de  $G$  et  $\chi$  son caractère unitaire. Notre but est de décrire dans le cadre de la méthode des orbites la désintégration centrale canonique de la représentation induite  $\tau = \text{ind}_H^G \chi$ . Soit  $\mathfrak{h}$  l'algèbre de Lie de  $H$ . Alors il existe  $f \in \mathfrak{g}^*$ , une forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$ , telle que  $f$  s'annule sur l'algèbre dérivée  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$  de  $\mathfrak{h}$  et que  $\chi$  s'écrive  $\chi(\exp X) = e^{i f(X)}$  ( $i = (-1)^{1/2}$ ,  $X \in \mathfrak{h}$ ). Dans cette situation,  $\tau$  se notera  $\tau_f$ . Après que l'on avait vigoureusement étudié le cas essentiel où  $\mathfrak{h}$  était une polarisation en  $f$ , vers '72 Grélaud [12] et Quint [22] ont mis fin au cas où  $\mathfrak{h}$  était un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

De plus, Quint a laissé des conjectures suivantes. Soit  $\mu$  une mesure positive finie sur l'espace affine  $E = f + \mathfrak{h}^\perp$ ,  $\mathfrak{h}^\perp$  désignant l'annihilateur de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}^*$ , équivalente à la mesure de Lebesgue sur  $E$ . On regarde  $\mu$  comme une mesure sur  $\mathfrak{g}^*$  et prend son image  $\nu$  par l'application de Kirillov-Bernat  $\theta = \theta_G: \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{G}$ , le dual unitaire de  $G$ .  $\hat{G}$  s'obtient comme l'espace des orbites coadjointes  $\mathfrak{g}^*/G$  de  $G$  au moyen de l'isomorphisme borélien induite  $\bar{\theta} = \bar{\theta}_G: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  (cf. [4], [12]). Pour  $\pi \in \hat{G}$  on note  $\Omega(\pi)$  l'orbite associée. Soit  $Z(E)$  l'ensemble des  $\zeta \in E$  telles que l'orbite  $G \cdot \zeta$  atteint la dimension maximum parmi les orbites rencontrant  $E$ .

Conjectures de Quint [22]: (i) Pour toute  $\zeta \in Z(E)$ , chaque composante connexe de  $E \cap G \cdot \zeta$  est une variété différentielle de dimension supérieure ou égale à  $1/2 \dim G \cdot \zeta$ .

(ii)  $\tau = \text{ind}_\mu^G \chi_f = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} m(x) \chi dx$ . Ici la multiplicité  $m(x)$  est égale au nombre des composantes connexes de  $\mathbb{E} \cap \Omega(x)$  si chaque composante est une variété de dimension  $1/2 \dim \Omega(x)$ , sinon  $m(x) = \infty$ .

Depuis ont été faits des travaux fondamentaux, par Benoist [2], [3] pour le cas symétrique et par Corwin-Greenleaf/Grélaud [7], [13] pour le cas nilpotent, établissant les conjectures de Quint à condition d'une petite modification sans importance: dans (i), "toute  $\zeta \in Z(\mathbb{E})$ " doit être remplacé par " $\mu$ -presque toute  $\zeta \in \mathbb{E}$ ". On voit encore des résultats dus à Lipsman [15], [16], [17] qui contiennent la désintégration de  $\tau$  pour le cas complètement résoluble. En plus ils ont montré que la multiplicité  $m(x)$  était retrouvée comme le nombre des H-orbites incluses dans  $\mathbb{E} \cap \Omega(x)$ . Ici nous nous proposons d'établir les conjectures.

Soient  $G = \exp \mathfrak{g}$  et  $f \in \mathfrak{g}^*$ . On note  $S(f, \mathfrak{g})$  l'ensemble des sous-algèbres  $\mathfrak{f}$  de  $\mathfrak{g}$  subordonnées à  $f$ , c'est-à-dire que  $\mathfrak{f}$  est un sous-espace totalement isotrope pour la forme bilinéaire alternée  $B_f$  sur  $\mathfrak{g}$  définie par  $B_f(X, Y) = f([X, Y])$ .

Théorème 1 ([10]). Soient  $\mathfrak{k}$  un idéal de  $\mathfrak{g}$ ,  $f \in \mathfrak{k}^*$  et  $\mathfrak{f} \in S(f, \mathfrak{k})$ . On note  $\mathfrak{f}^{\perp, \mathfrak{k}}$  l'annihilateur de  $\mathfrak{f}$  dans  $\mathfrak{k}^*$ ,  $\mu$  mesure positive finie sur  $\mathfrak{k}^*$  équivalente à la mesure de Lebesgue sur  $f + \mathfrak{f}^{\perp, \mathfrak{k}}$  et  $\nu$  l'image de  $\mu$  par l'application canonique de  $\mathfrak{k}^*$  sur l'espace des G-orbites  $\mathfrak{k}^*/G$ . Pour  $\nu$ -presque toutes les orbites  $\Omega \in \mathfrak{k}^*/G$ ;

- (i) Chaque composante connexe  $C$  de  $(f + \mathfrak{f}^{\perp, \mathfrak{k}}) \cap \Omega$  est une variété.
- (ii) L'espace tangent de  $C$  au point  $\zeta \in C$  est égal à  $\mathfrak{g} \cdot \zeta \cap \mathfrak{f}^{\perp, \mathfrak{k}}$ .
- (iii) Si l'on désintègre  $\mu$  par rapport à  $\nu$ ,  $\mu = \int \mu_\Omega d\nu(\Omega)$ , la mesure de fibre  $\mu_\Omega$  restreinte à une carte  $(U; x_1, \dots, x_m)$  de  $C$  est équivalente à  $dx_1 \cdots dx_m$ .

Corollaire 1. Soient  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{f} \in S(f, \mathfrak{g})$  et  $\mathbb{E} = f + \mathfrak{f}^{\perp}$ .

(i) Pour  $\nu$ -presque toutes les orbites coadjointes  $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ , le support de la mesure  $\mu_\Omega$  est égal à  $\mathbb{E} \cap \Omega$  tout entier.

(ii) Pour  $\nu$ -presque toutes les orbites coadjointes  $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ , chaque composante connexe  $C$  de  $\mathbb{E} \cap \Omega$  est une variété ayant la dimension supérieure ou égale à  $1/2$

$\dim \mathcal{Q}$ .

(ii) On a  $\dim C = 1/2 \dim \mathcal{Q}$  si et seulement si  $H \cdot \zeta = C$  pour toute  $\zeta \in C$ . S'il en est ainsi,  $\mathfrak{f} + \mathcal{Q}(\zeta)$  est un sous-espace lagrangien pour  $B_\zeta$ .

Pour donner la désintégration des représentations monomiales de  $G$ , notre méthode sera différente de celle de Lipsman [17]. Dans ce qui suit, on confondra parfois les classes d'équivalence des représentations unitaires avec leurs représentants et liera deux représentations équivalentes par le symbole  $\simeq$  ou même par le signe d'égalité. Avant d'énoncer le théorème, on se prépare un lemme concernant des groupes à petite dimension.

Lemme. (i) Soit  $G = \exp \mathfrak{g}_2$ ,  $\mathfrak{g}_2 = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} = RX + RY$ :  $[X, Y] = Y$ . Soient  $f \in \mathfrak{g}_2^*$ ,  $\mathfrak{f} = RX$  et  $H = \exp \mathfrak{f}$ . Alors  $\text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_f \simeq \text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_{Y^*} + \text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_{-Y^*}$  avec  $H' = \exp(RY)$ .

(ii) Soit  $G = \exp \mathfrak{g}_3(a)$ ,  $\mathfrak{g}_3(a) = \langle T, Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ :  $[T, Y_1] = Y_1 - aY_2$ ,  $[T, Y_2] = Y_2 + aY_1$  ( $0 \neq a \in \mathbb{R}$ ). Soient  $f \in \mathfrak{g}_3(a)^*$ ,  $\mathfrak{f} = RT$  et  $H = \exp \mathfrak{f}$ . Alors

$$\text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_f \simeq \int_{[0, 2\pi]}^{\oplus} \text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_{\hat{\theta}} d\theta$$

avec  $H' = \exp(RY_1 + RY_2)$ ,  $\hat{\theta} = (\cos \theta)Y_1^* + (\sin \theta)Y_2^* \in \mathfrak{g}_3(a)^*$ .

(iii) Soit  $G = \exp \mathfrak{g}_4$ ,  $\mathfrak{g}_4 = \langle T, X, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ :  $[X, Y] = Z$ ,  $[T, X] = -X$ ,  $[T, Y] = Y$ . Soient  $f = \alpha T^* + \beta Z^* \in \mathfrak{g}_4^*$  ( $\beta \neq 0$ ),  $\mathfrak{f} = \langle T, X, Z \rangle_{\mathbb{R}}$  et  $H = \exp \mathfrak{f}$ . Alors  $\text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_f \simeq \text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_{f'}$  avec  $H' = \exp \mathfrak{f}'$ ,  $\mathfrak{f}' = \langle T, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ .

(iv) Soit  $G = \exp \mathfrak{g}_6$ ,  $\mathfrak{g}_6 = \langle T, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ :  $[X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ),  $[T, X_1] = -X_1 - aX_2$ ,  $[T, X_2] = -X_2 + aX_1$ ,  $[T, Y_1] = Y_1 - aY_2$ ,  $[T, Y_2] = Y_2 + aY_1$  ( $0 \neq a \in \mathbb{R}$ ). Soient  $f = \beta T^* + \gamma Z^* \in \mathfrak{g}_6^*$  ( $\gamma \neq 0$ ),  $\mathfrak{f} = \langle T, X_1, X_2, Z \rangle_{\mathbb{R}}$  et  $H = \exp \mathfrak{f}$ . Alors  $\text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_f \simeq \text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_{f'}$  avec  $H' = \exp \mathfrak{f}'$ ,  $\mathfrak{f}' = \langle T, Y_1, Y_2, Z \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Revenant au cas général, nous reprenons les notations précédentes: soient  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe de Lie résoluble exponentiel,  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{f} \in S(f, \mathfrak{g})$ ,  $H = \exp \mathfrak{f}$  et  $\tau = \text{ind}_{\mathbb{H}}^G \lambda_f$ . Soient encore  $\mu$  une mesure positive finie sur  $\mathbb{E} = f + \mathfrak{f}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$  équivalente à la mesure de Lebesgue et  $\nu$  son image par l'application  $\theta$  de Kirillov-Bernat.

Théorème 2 ([10]). La désintégration de  $\tau$  s'écrit

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi)$$

avec la fonction de multiplicités donnée à la façon suivante:  $m(\pi)$  est le nombre des composantes connexes de  $E \cap \Omega(\pi)$  si chaque composante est une variété de dimension égale à  $1/2 \dim \Omega(\pi)$ . Lorsque cette condition n'est pas remplie,  $m(\pi)$  est égale à  $+\infty$ . En tout cas  $m(\pi)$  s'obtient comme le nombre des H-orbites contenues dans  $E \cap \Omega(\pi)$ .

Les groupes de Lie résolubles exponentiels étant monomiales, le théorème 2 nous permet de connaître la désintégration centrale canonique des représentations induites. Soit  $\sigma$  une représentation unitaire irréductible d'un sous-groupe connexe H de G. Soient  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de H et  $p = p(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  l'application restriction. Il existe sur sous-variété  $p^{-1}(\Omega_{\mathfrak{h}}(\sigma))$  de  $\mathfrak{g}^*$  une mesure  $\mu$  bien déterminée par la mesure canonique sur  $\Omega(\sigma) = \Omega_{\mathfrak{h}}(\sigma)$  et par la mesure de Lebesgue sur l'annihilateur  $\mathfrak{h}^{\perp}$  (cf. [15]). On prend une mesure finie  $\tilde{\mu}$  sur  $\mathfrak{g}^*$  équivalente à  $\mu$  regardée comme une mesure sur  $\mathfrak{g}^*$ , et considère son image  $\nu = \nu^G_{\sigma} = (\theta_G)_*(\tilde{\mu})$  sur  $\hat{G}$ .

Théorème 3 ([11]). La représentation induite  $\text{ind}_{\mathfrak{H}}^G \sigma$  de G se désintègre comme suit:

$$\text{ind}_{\mathfrak{H}}^G \sigma \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi),$$

où la multiplicité  $m(\pi)$  est donnée encore par le nombre des H-orbites contenues dans  $\Omega_G(\pi) \cap p^{-1}(\Omega_{\mathfrak{H}}(\sigma))$ .

## §2. Désintégration d'une représentation restreinte

Soient  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de G et H un sous-groupe connexe de G. Nous allons décrire la désintégration centrale canonique de la restriction de  $\pi$  à H, notée  $\pi|_H$ , et observer une réciprocité de Frobenius dans cette situation.

Dans le cadre de la méthode des orbites, le problème a été pris par Kirillov [

14], pleinement étudié par Corwin-Greenleaf [7] pour le cas nilpotent et par Lipsman [15], [18] pour le cas complètement résoluble. On introduit l'orbite coadjointe  $\Omega_G(\kappa) \subset \mathfrak{g}^*$  de  $G$  déterminée par  $\kappa$  et une mesure finie  $\mu_\kappa$  sur  $\mathfrak{g}^*$  équivalente à la mesure canonique sur  $\Omega_G(\kappa)$  (cf. [4]), regardée comme une mesure sur  $\mathfrak{g}^*$ . Enfin on considère la mesure  $\nu = \nu_H^\kappa = (\theta_H \cdot p)_*(\mu_\kappa)$ , l'image de  $\mu_\kappa$  par l'application  $\theta_H \cdot p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{H}$ .

Théorème 4 ([11]). On a

$$\kappa|_H \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} m(\sigma) \sigma d\nu(\sigma),$$

où la multiplicité  $m(\sigma)$  est donnée par le nombre des  $H$ -orbites contenues dans  $\Omega_G(\kappa) \cap p^{-1}(\Omega_H(\sigma))$ .

Soient  $\kappa_j$  ( $j = 1, 2$ ) deux représentations unitaires irréductibles de  $G$ . Le produit de Kronecker extérieur de  $\kappa_1$  et de  $\kappa_2$ , noté  $\kappa_1 \times \kappa_2$ , correspond à l'orbite  $\Omega_{G \times G}(\kappa_1 \times \kappa_2) = (\Omega_G(\kappa_1), \Omega_G(\kappa_2)) \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ . On identifie  $G$  au sous-groupe de  $G \times G$  constitué par les éléments diagonaux.

Corollaire 2. Soit  $p = p(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Alors

$$\kappa_1 \otimes \kappa_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\kappa) \kappa d\nu(\kappa),$$

où  $\nu = (\theta_G \cdot p)_*(\mu_{\kappa_1 \times \kappa_2})$  et où  $m(\kappa)$  s'obtient par le nombre des  $G$ -orbites incluses dans  $(\Omega_G(\kappa_1), \Omega_G(\kappa_2)) \cap p^{-1}(\Omega_G(\kappa))$ .

Corollaire 3. La réciprocity de Frobenius s'établit dans ces situations.

Cette réciprocity avait été obtenue presque partout dans [19]. Ce qui est nouveau ici, c'est, comme déjà remarqué dans [7], de la constater partout.

### §3. Problèmes et exemples

Concernant notre représentation monomiale  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$ , nous laissons deux questions qui remontent à Penney [21]. Pour une représentation unitaire  $\rho$  de  $G$ , on

notera  $H(\rho)$  son espace de Hilbert,  $H(\rho)^\infty$  l'espace des vecteurs  $C^\infty$  muni de la topologie habituelle, et  $H(\rho)^{-\infty}$  son antidual. Etant donnés un sous-groupe fermé  $K$  de  $G$  et son caractère  $c$ , nous posons

$$(H(\rho)^{-\infty})^{K, c} = \{a \in H(\rho)^{-\infty}; \rho(k)a = c(k)a, k \in K\}.$$

Reprenons notre représentation monomiale

$$\tau \simeq \text{ind}_H^G \chi_f = \int_G^\oplus m(\pi) \pi d\nu(\pi).$$

En désignant par  $e$  l'élément neutre de  $G$ , par  $\Delta_G$  la fonction module de  $G$ , nous voyons que la mesure de Dirac

$$\delta_\tau: H(\tau)^\infty \ni \phi \mapsto \overline{\phi(e)} \in \mathbb{C}$$

définit un élément de  $(H(\tau)^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$ , où  $\Delta_{H,G} = \Delta_H / \Delta_G$ . Alors, suivant la désintégration de  $\tau$ ,  $\delta_\tau$  s'écrit

$$\delta_\tau = \int_G^\oplus \left( \sum_{k=1}^{m(\pi)} a_\pi^k \right) d\nu(\pi)$$

avec  $a_\pi^k \in (H(\pi)^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$  (cf. [5], [21]). Ce qui veut dire que, pour toute  $\phi \in C_c^\infty(G)$ ,

$$\phi_H^f(e) = \int_G \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\nu(\pi),$$

où  $\phi_H^f(g) = \int_H \phi(gh) \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh$  avec une mesure de Haar  $dh$  sur  $H$ .

Cela posé, voici nos questions.

- ① Réciprocité: Peut-on choisir  $\dim (H(\pi)^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$  pour la multiplicité  $m(\pi)$ ?
- ② Formule de Plancherel concrète: Explicitez les  $a_\pi^k$  intervenant dans la désintégration de  $\delta_\tau$ .

Depuis que les travaux de Benoist [2], [3] nous ont incités à étudier ces questions, nous en avons envisagé certains cas (cf. [8], [9]). Dans toute la suite on va y ajouter encore quelques exemples.

Exemple 1.  $G = G_3(a) = \exp \mathfrak{G}_3(a)$ ;  $(T, Y_1, Y_2): [T, Y_1] = Y_1 - aY_2, [T, Y_2] = aY_1 + Y_2$ . Soient  $f = Y_1^* \in \mathfrak{G}_3(a)^*$  et  $\mathcal{F} = RY_1$ . Ici  $a$  peut être supposé négatif. Vu que

$$e^t \begin{bmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos at - \lambda \sin at) \\ e^t(\sin at + \lambda \cos at) \end{bmatrix},$$

on a l'expression paramétrée de l'orbite passant

$$\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \in RY_1 + RY_2 ;$$

$$\begin{cases} x(t) = e^t(\cos at - \lambda \sin at) & \dots \textcircled{1} \\ y(t) = e^t(\sin at + \lambda \cos at) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

Si la ligne directe  $x = 1$  est tangente à l'orbite de  $\zeta$ , on voit

$$(dx/dt)_{t=0} = e^t(\cos at - \lambda \sin at - a \sin at - a \lambda \cos at)_{t=0} = 1 - a\lambda = 0,$$

ce qui donne  $\lambda = 1/a$ , noté  $\lambda_0$ . Soit  $t^*$  le premier nombre positif  $t$  vérifiant

$$e^t\{\cos at - (1/a)\sin at\} = 1,$$

et la  $y$ -coordonnée du point d'intersection se notant  $\lambda_1$ , nous prenons

$$\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda_0 \leq \lambda < \lambda_1,$$

comme représentant des orbites qui rencontrent l'espace affine  $f + \mathfrak{g}^\perp$ , où  $\mathfrak{g}^\perp = \{\xi \in \mathfrak{g}^*; \xi|_{\mathfrak{g}} = 0\}$ .

On utilise la paramétrisation de l'orbite  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$ , et cherche, en posant  $e^t(\cos at - \lambda \sin at) = 1$ , des points d'intersection avec  $f + \mathfrak{g}^\perp$ . D'où  $e^t(1 + \lambda^2)^{1/2} \cos(at + \theta) = 1$  avec  $\theta$  tel que  $\sin \theta = \lambda(1 + \lambda^2)^{-1/2}$ ,  $\cos \theta = (1 + \lambda^2)^{-1/2}$ , ce qui entraîne  $e^t(\sin at + \lambda \cos at) = (1 + \lambda^2)^{1/2} e^t \sin(at + \theta) = \tan(at + \theta)$ . On en trouve les points

$$\zeta_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \tan(at_n + \theta) \end{bmatrix}, \quad \zeta_0 = \zeta.$$

Choisissons arbitrairement des  $g_n \in G$  tels que  $g_n : \zeta \rightarrow \zeta_n$ , et fabriquons l'application

$$a_n : \phi \longmapsto \int_{H/H_0 g_n B g_n^{-1}} \overline{\phi(hg_n)} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dv(h), \quad \phi \in H(\pi),$$

ce dernier n'est autre que

$$\overline{\phi(g_n)},$$

ici l'on a noté  $B = \exp \mathfrak{b}$  associé à la polarisation  $\mathfrak{g} = RY_1 + RY_2$ ,  $\pi = \pi_\zeta = \text{ind}_B^G \chi_\zeta$  dont l'espace se notant  $H(\pi)$ . On voit ainsi que  $a_n$  est un vecteur généralisé  $H$ -semi-invariant.

Par suite, pour  $\phi \in C_c^\infty(G)$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \pi(\phi)a_n, \xi \rangle &= \langle a_n, \pi(\phi^*)\xi \rangle = \overline{\pi(\phi^*)\xi(g_n)} = \int_G \phi(g) \overline{\pi(g^{-1})\xi}(g_n) dg \\
&= \int_G \phi(g) \xi(gg_n) dg = \int_G \phi(gg_n^{-1}) \xi(g) \Delta_G^{-1}(g) dg \\
&= \Delta_G^{-1}(g_n) \int_{G/B} \dot{d}g \int_B \phi(\dot{g}bg_n^{-1}) \xi(\dot{g}b) db \\
&= \Delta_G^{-1}(g_n) \int_{G/B} \xi(\dot{g}) \dot{d}g \int_B \phi(\dot{g}bg_n^{-1}) \chi_\zeta(b) db.
\end{aligned}$$

Donc

$$(\pi(\phi)a_n)(g) = \Delta_G^{-1}(g_n) \int_B \phi(\dot{g}bg_n^{-1}) \chi_\zeta(b) db.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\langle \pi(\phi)a_n, a_n \rangle &= \Delta_G^{-1}(g_n) \int_B \phi(\dot{g}bg_n^{-1}) \chi_\zeta(b) db = \int_B \phi(b) \chi_\zeta(g_n^{-1}bg_n) db \\
&= \int_B \phi(b) \chi_{\kappa_n, \zeta}(b) db = \int_R \phi_H^f(\exp sY_2) \exp(\text{istan}(\alpha t_n + \theta)) ds.
\end{aligned}$$

Là, pour  $g \in G$ ,  $\phi_H^f(g) = \int_H \phi(gh) \chi_f(h) \Delta_H^{-1/2}(h) dh$ .

Les formules ① et ② entraînent,  $y(t)$  s'écrivant simplement  $y$ ,

$$(1 - ay)(dt/d\lambda) = e^t \sin \alpha t, \quad \text{--- ③}$$

$$(dy/d\lambda) - (y + a)(dt/d\lambda) = e^t \cos \alpha t. \quad \text{--- ④}$$

D'autre part, d'après  $e^{2t} = (1 + y^2)/(1 + \lambda^2)$ ,

$$\{(1 + \lambda^2)(dt/d\lambda) + \lambda\}(1 + y^2)/(1 + \lambda^2) = y(dy/d\lambda). \quad \text{--- ⑤}$$

Les égalités ③ et ④ impliquent

$$\lambda(dy/d\lambda) + (1 - ay - \lambda y - a\lambda)(dt/d\lambda) = y,$$

$$(dy/d\lambda) + (\lambda ay - \lambda - y - a)(dt/d\lambda) = 1,$$

donc  $(\lambda - y)(dy/d\lambda) + (1 - a\lambda)(1 + y^2)(dt/d\lambda) = 0$ .

Par substitution de ⑤,

$$(\lambda - y)(dy/d\lambda) + (1 - a\lambda)\{y(dy/d\lambda) - \lambda(1 + y^2)/(1 + \lambda^2)\} = 0,$$

c'est-à-dire  $\lambda(1 - ay)(dy/d\lambda) = \lambda(1 + a\lambda)(1 + y^2)/(1 + \lambda^2)$ .

En conséquence, pour  $\lambda$  non nul,

$$(dy/d\lambda) = (1 - a\lambda)(1 + y^2)/(1 - ay)(1 + \lambda^2).$$

La formule à montrer revient à la suivante,  $y_n = y_n(\lambda)$  désignant  $\tan(\alpha t_n + \theta)$ ,

$$\begin{aligned}
\phi_H^f(e) &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \xi(\lambda) d\lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} \kappa(n) \int_R \phi_H^f(\exp sY_2) \exp(\text{istan}(\alpha t_n + \theta)) ds \right) \\
&= (2\pi)^{1/2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \xi(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \kappa(n) (\phi_H^f)^\wedge(y_n) d\lambda
\end{aligned}$$

avec certaines fonctions mesurables  $\xi(\lambda)$  et  $\kappa(n) \geq 0$ , car on multiplie au besoin  $a_n$  par un scalaire, et  $(\phi_H^f)^\wedge$  signifiant la transformée de Fourier inverse de  $\phi_H^f \circ \exp$ .

En effet, soient  $\xi(\lambda) = (1 - a\lambda)/2\pi(1 + \lambda^2)$  et  $\kappa(n) = (1 + y_n^2)/|1 - ay_n|$ , ce qui veut dire qu'on prend  $\{(1 + y_n^2)/|1 - ay_n|\}^{1/2} a_n$ . Alors,

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1/2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_H^f)^\wedge(y_n) \kappa(n) \right) \xi(\lambda) d\lambda \\
&= (2\pi)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\phi_H^f)^\wedge(y_n) (1 - a\lambda)(1 + y_n^2)/|1 - ay_n| (1 + \lambda^2) d\lambda \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_R (\phi_H^f)(s) ds = (\phi_H^f \circ \exp)(0) = \phi_H^f(e).
\end{aligned}$$



Exemple 2. Soit  $G = G_3(a) = \exp \mathfrak{g}_3(a)$  comme dans l'exemple 1. Etant donnée cette fois  $\mathfrak{g} = RT$  et  $f \in \mathfrak{g}_3(a)^*$  arbitraire. Alors  $f + \mathfrak{g}^\perp = f(T)T^* + RY_1^* + RY_2^*$  et l'on y trouve que les orbites générales ont leur représentant  $\lambda(\theta) = (\cos \theta)Y_1^* + (\sin \theta)Y_2^*$  à laquelle s'associe la représentation irréductible  $\pi(\theta) = \text{ind}_B^G \chi(\theta)$  de  $G$ , où  $B$  est le sous-groupe analytique correspondant à la polarisation  $\mathfrak{g} = RY_1 + RY_2$ , et où  $\chi(\theta)$  signifie le caractère unitaire fabriqué par  $\lambda(\theta)$ .

Dans ce cas, notre formule habituelle pour obtenir des vecteurs généralisés H-semi-invariants nous offre

$$a(\theta) : \phi \longmapsto \int_H \overline{\phi(h)} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh.$$

Des raisonnements analogues à ceux faits pour le cas  $ax+b$  montrent que notre  $a(\theta)$  possède les propriétés requises. Il est aisé de voir, pour  $\phi \in C_c^\infty(G)$ ,

$$(\pi(\theta)(\phi)a(\theta))(g) = \int_B \phi_H^f(gb) \chi(\theta)(b) db.$$

Puis

$$\begin{aligned} \langle \pi(\theta)a(\theta), a(\theta) \rangle &= \int_H \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh \int_B \overline{\phi_H^f(hb)} \chi(\theta)(b) db \\ &= \int_H dh \int_B \overline{\phi_H^f(hbh^{-1})} \chi(\theta)(b) db = \int_H \Delta_G(h) dh \int_B \overline{\phi_H^f(b)} \chi_f(b) db \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2t} dt \int_B \overline{\phi_H^f(b)} \chi_f(b) db, \end{aligned}$$

avec la notation  $\zeta = h \cdot \lambda(\theta) = e^t \cos(at + \theta)Y_1^* + e^t \sin(at + \theta)Y_2^*$ ,  $h = \exp tT$ .

Ceci posé,

$$(2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \langle \pi(\theta)(\phi)a(\theta), a(\theta) \rangle d\theta = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathbb{R}} e^{2t} dt \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\phi_H^f(\exp(b_1 Y_1 + b_2 Y_2))} \exp(i e^t (b_1 \cos(at + \theta) + b_2 \sin(at + \theta))) db_1 db_2.$$

Appliquons le changement de variables

$$\begin{cases} x = e^t \cos(at + \theta) \\ y = e^t \sin(at + \theta), \end{cases}$$

dont le Jacobien est

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \theta)} = \begin{vmatrix} e^t \cos(at + \theta) - a e^t \sin(at + \theta) & -e^t \sin(at + \theta) \\ e^t \sin(at + \theta) + a e^t \cos(at + \theta) & e^t \cos(at + \theta) \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$dx dy = e^{2t} dt d\theta.$$

On en déduit que

$$(2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \langle \pi(\theta)(\phi)a(\theta), a(\theta) \rangle d\theta = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \int_{\mathbb{R}} (\phi_H^f)^*(b_1, b_2) \chi \exp(i(xb_1 + yb_2)) db_1 db_2 = (\phi_H^f)^*(0, 0) = \phi_H^f(e),$$

où  $(\phi_H^f)^*(b_1, b_2) = \phi_H^f \circ \exp(b_1 Y_1 + b_2 Y_2)$ .

Exemple 3.  $G = \exp \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g} = RT + RX + RY + RZ$ ;  $[T, X] = X$ ,  $[T, Y] = -Y$ ,  $[X, Y] = Z$  (oscillateur complètement résoluble),  $f(a, \beta) = aT^* + \beta Z^*$  et  $O(a, \beta) = G \cdot f(a, \beta)$  pour  $\beta \neq 0$ . On se donne  $f = f(a_0, \beta_0)$ .

(i) Soit premièrement  $\mathfrak{g} = RT + RX$ . Alors

$$\text{ind}_B^G \chi_f = \int_R \theta(O(a_0, \beta)) d\beta.$$

Au moyen de  $\zeta = f(a_0, \beta) \in O(a_0, \beta) \cap (f + \mathfrak{F}^\perp)$  et d'une polarisation  $\mathfrak{z} = RT + RX + RZ$  en  $\zeta$ , on construit  $\pi(a_0, \beta) = \text{ind}_B^G \chi \simeq \overline{\theta(O(a_0, \beta))}$ . Dans cette situation, la façon usuelle propose  $a(\beta)$  par  $\langle a(\beta), \phi \rangle = \phi(e)$ , qui satisfait clairement aux conditions requises. Comme  $\mathfrak{z} = \mathfrak{F} + RZ$  et que  $Z$  est un élément central,

$$(H(\pi(a_0, \beta))^{-\infty})_{H, \chi_f \Delta_{H, G}^{1/2}} = Ca(\beta).$$

Maintenant pour  $\phi \in C_c^\infty(G)$ ,  $\pi(a_0, \beta)(\phi)a(\beta) = \phi_B^5$  i.e.,

$$(\pi(a_0, \beta)(\phi)a(\beta))(g) = \int_B \phi(gb) \chi_f(b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db,$$

par suite,

$$\langle \pi(a_0, \beta)(\phi)a(\beta), a(\beta) \rangle = \int_B \phi(b) \chi_f(b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db.$$

De tout ce qui précède,

$$(2\pi)^{-1} \int_R \langle \pi(a_0, \beta)a(\beta), a(\beta) \rangle d\beta = (2\pi)^{-1} \int_R d\beta \int_R \phi_H^f(\exp wZ) \exp(i\beta w) dw = \phi_H^f(e).$$

(ii) Deuxièmement soit  $\mathfrak{F} = RT + RZ$ . Posons  $\zeta = f(a, \beta_0) = aT^* + \beta_0 Z^*$ , ce qui nous dit  $(f(a_0, \beta_0) + \mathfrak{F}^\perp) \cap O(a, \beta_0) = a_0 T^* + xX^* + yY^* + \beta_0 Z^*$ ;  $xy = \beta_0(a - a_0)$ . Si la valeur

$(\exp(aX)\exp(bY) \cdot \zeta)(T) = (\exp(bY) \cdot \zeta)(T + aX) = \zeta(T + aX - bY + abZ) = a + ab\beta_0$  est égale à  $f(T)$ , il vient  $a + ab\beta_0 = a_0$  i.e.,  $ab\beta_0 = a_0 - a$ . En modifiant les bases par des scalaires convenables, on peut supposer que  $\beta_0 = 1$ . L'égalité obtenue ci-dessus devient  $ab = a_0 - a$ . Par conséquent, pour  $f(a, \beta_0)$  telle que  $a \neq a_0$ ,  $g_j \cdot f(a, \beta_0) \in f + \mathfrak{F}^\perp$  ( $j = 1, 2$ ) avec  $g_1 = \exp(X)\exp((a_0 - a)Y)$ ,  $g_2 = \exp(-X)\exp((a - a_0)Y)$ . Pareillement au cas (i), on réalise la représentation  $\pi(a, \beta_0) = \text{ind}_B^G \chi(a, \beta_0) \simeq \overline{\theta(O(a, \beta_0))}$ . Pour  $\phi \in H(\pi(a, \beta_0))^\infty$ , nous rappelons la formule familière;

$$\begin{aligned} \langle a_1(a), \phi \rangle &= \int_{H/H_0 \mathfrak{g}_1 B \mathfrak{g}_1^{-1}} \overline{\phi(hg_1) \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h)} dh \\ &= \int_R \overline{\phi(\exp(tT)\exp(X)) \exp(-ita_0)} dt = \int_R \overline{\phi(\exp(e^t X) \exp(it(a - a_0)))} e^{t/2} dt \\ &= \int_0^\infty \overline{\phi(\exp(sX))} s^{i(a - a_0) - 1/2} ds. \end{aligned}$$

L'intégrand de ce dernier est bien intégrable et il est immédiat que

$$a_1(a) \in (H(\pi(a, \beta_0))^{-\infty})_{H, \chi_f \Delta_{H, G}^{1/2}}.$$

De même la formule

$$\begin{aligned} \langle a_2(a), \phi \rangle &= \int_{H/H_0 \mathfrak{g}_2 B \mathfrak{g}_2^{-1}} \overline{\phi(hg_2) \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h)} dh \\ &= \int_0^\infty \overline{\phi(\exp(-sX))} s^{i(a - a_0) - 1/2} ds \end{aligned}$$

définit un élément non nul

$$a_2(a) \in (H(\pi(a, \beta_0))^{-\infty})_{H, \chi_f \Delta_{H, G}^{1/2}}.$$

Soit  $a$  un élément quelconque de celui-ci. La semi-invariance de  $a$  par rapport à  $h = \exp(tT)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , nous donne

$$\langle \exp(it(a_0 - a)) e^{-t/2} a, \phi(\exp(xX)) \rangle = \langle a, \phi(\exp(e^t xX)) \rangle,$$

car  $\langle \pi(\alpha, \beta_0)(h)a, \phi \rangle = \langle a, \pi(\alpha, \beta_0)(h)^{-1}\phi \rangle = \langle a, \phi(\text{hexp}(xX)) \rangle = \langle a, \exp(-iat)e^{i/2}\phi(\exp(xe^tX)) \rangle$ . On en déduit que

$$\langle a, \phi \rangle = c_1 \int_{\mathbb{R}_+} \phi(\exp(xX)) x^{i(\alpha - \beta_0) - 1/2} dx \quad (c_1: \text{constante})$$

si  $\text{supp } \phi \subset \mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R}; s > 0\}$ , c'est-à-dire que  $a = c_1 a_1(\alpha)$  ( $c_1: \text{constante}$ ) sur  $\mathbb{R}_+$ . De même,  $a = c_2 a_2(\alpha)$  ( $c_2: \text{constante}$ ) sur  $\mathbb{R}_- = -\mathbb{R}_+$ .

Supposons maintenant  $\text{supp } a \subset B$ , et écrivant

$$a = \sum_{j=0}^m \lambda_j D_j, \text{ où } \langle D_j, \phi \rangle = (d^j \hat{\phi} / dx^j)(0), \hat{\phi}(x) = \phi(\exp(xX)).$$

Alors en considérant la semi-invariance de  $a$  pour  $h = \exp(tT)$ , on a

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha_0 t) \sum_{j=0}^m (d^j \hat{\phi} / dx^j)(0) &= \langle \pi(\alpha, \beta_0)(h)a, \hat{\phi} \rangle = \langle \sum_{j=0}^m \lambda_j D_j, \hat{\phi}(e^t x) e^{i/2} \exp(-iat) \rangle \\ &= \sum \lambda_j (d^j \hat{\phi} / dx^j)(0) e^{(j+1/2)t} \exp(i\alpha t). \end{aligned}$$

Si l'on y choisit  $\phi$  vérifiant  $(d^j \hat{\phi} / dx^j)(0) = \delta_{jm}$ , il s'ensuit que

$$\lambda_m \exp(i\alpha_0 t) = \lambda_m e^{(m+1/2)t} \exp(i\alpha t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ceci posé, on conclut que  $\lambda_m = 0$ , ce qui veut dire que  $a = 0$ .

En somme,

$$(H(\pi(\alpha, \beta_0))^{-\infty})^{H, \alpha} \Delta_{H, G}^{1/2} = Ca_1 + Ca_2.$$

Passons à la formule de Plancherel concrète pour la représentation monomiale  $\text{ind}_H^G \gamma_f$ ,  $f = f(\alpha_0, \beta_0)$ . Pour alléger les notations,  $\pi(\alpha, \beta_0)$ , examinée de près pour le moment, sera notée  $\pi$ . Soient  $\phi \in C_c^\infty(G)$  et  $\psi \in H(\pi)$  vecteur différentiable à support compact modulo  $B$ . On calcule;  $a_j(\alpha)$  ( $j = 1, 2$ ) se notant simplement  $a_j$ .

$$\begin{aligned} \langle \pi(\psi) a_j, \phi \rangle &= \langle a_j, \pi(\psi^*)(\phi) \rangle = \int_{H/H_0 \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \int_G \pi(\psi^*)(\phi)(hg_1) \gamma_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) dh \\ &= \int_{H/H_0 \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \frac{\gamma_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) dh}{\gamma_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h)} \int_G \phi(g) \phi(g h g_1) dg \\ &= \int_{H/H_0 \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \frac{\gamma_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) \Delta_G^{-1}(h) dh}{\gamma_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) \Delta_G^{-1}(h)} \int_G \phi(g g_1^{-1} h^{-1}) \phi(g) dg \\ &= \int_{H/H_0 \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \frac{\gamma_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) \Delta_G^{-1}(h) dh}{\gamma_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) \Delta_G^{-1}(h)} \int_B \int_B \phi(g b g_1^{-1} h^{-1}) \phi(g b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db \\ &= \int_{H/H_0 \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} dh \int_{G/B} \int_B \phi(g b g_1^{-1} h^{-1}) \phi(g) \Delta_{B, G}(b) \gamma_f(b) \gamma_f(h) \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) db \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

L'ordre des deux intégrales au dernier membre s'échange, ce qu'on va voir dans la suite. Remarquons tout d'abord  $\Delta_G(h) = \Delta_{H, G}(h) = 1$  et qu'à l'expression  $\textcircled{1}$   $g$  se met comme  $g = \exp(xX)$ ,  $x$  parcourant un certain intervalle fini  $J$ . On note  $\Xi(h, g, b)$  l'intégrand dans  $\textcircled{1}$  et écrit  $h = \exp(tT)$ ,  $b = \exp(sT)\exp(yY)\exp(wZ)$ . Alors  $\int_B \Xi(h, g, b) db = \hat{\phi}(x) \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\exp(xX)\exp(yY)\exp(wZ)\exp((\alpha - \alpha_0)Y)\exp(-X)\exp(-tT)) \times X e^{-s/2} \exp(i(w + \alpha s - \alpha_0 t)) ds dy dw$ .

On y trouve

$$\begin{aligned} &\exp(xX)\exp(sT)\exp(yY)\exp(wZ)\exp((\alpha - \alpha_0)Y)\exp(-X)\exp(-tT) \\ &= \exp(xX)\exp(wZ)\exp(e^{-s}(y + \alpha - \alpha_0)Y)\exp(-e^s X)\exp((s - t)T) \\ &= \exp((w + e^{-s}x(y + \alpha - \alpha_0))Z)\exp(e^{-s}(y + \alpha - \alpha_0)Y)\exp((x - e^s)X)\exp((s - t)T). \end{aligned}$$

Compte tenu de cela,

$$\int_B \mathbb{E}(h, g, b) db \leq |\hat{\phi}(x)| \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\exp(wZ)\exp(e^{-s}yY)\exp((x - e^s)X)) \times \\ \times \exp((s - t)T)| e^{-s/2} ds dy dw \\ = |\hat{\phi}(x)| \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\exp(wZ)\exp(yY)\exp((x - e^s)X)\exp((s - t)T)| e^{-s/2} ds dy dw \\ = |\hat{\phi}(x)| \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\exp(wZ)\exp(yY)\exp((x - e^{s+t})X)\exp(sT)| e^{(s+t)/2} ds dy dw. \dots \textcircled{a}$$

Puisque  $x$  parcourt l'intervalle fini  $J$ ,  $\textcircled{a}$  est intégrable relativement à  $t$  et l'on peut bien échanger l'ordre des deux premières intégrales, ce qu'on vient de chercher.

Nous arrivons ainsi à

$$\langle \pi(\phi)a_1, \phi \rangle = \int_{G/H} dg \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} dh \int_B \phi(gbg_1^{-1}h^{-1}) \overline{\phi(g) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) \chi_\zeta(b) \chi_f(h)} \times \\ \times \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) db.$$

Donc

$$\begin{aligned} (\pi(\phi)a_1)(g) &= \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} dh \int_B \phi(gbg_1^{-1}h^{-1}) \overline{\Delta_{B,G}^{-1/2}(b) \chi_\zeta(b) \chi_f(h)} \times \\ &\quad \times \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) db \\ &= \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \overline{\chi_f(h) \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h)} dh \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} db \int_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \phi(gbb_0 g_1^{-1} h^{-1}) \times \\ &\quad \times \Delta_{B,G}^{-1/2}(bb_0) \chi_\zeta(bb_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1, B}(b_0) db \\ &= \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} dh \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \overline{\chi_f(h) \chi_\zeta(b) \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(b)} db \times \\ &\quad \times \int_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \phi(gbb_0^{-1} g_1^{-1} h^{-1}) \Delta_{B,G}^{1/2}(b_0) \chi_\zeta(b_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1, B}(b_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1}(b_0) db_0. \end{aligned}$$

Des arguments tout à fait analogues à ceux employés plus haut constatent que ces deux premières intégrales sont échangeables. Finalement,

$$(\pi(\phi)a_1)(g) = \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \chi_\zeta(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \overline{\chi_f(h) \Delta_G^{-1}(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h)} dh \times \\ \times \int_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \phi(gbb_0^{-1} g_1^{-1} h^{-1}) \Delta_{B,G}^{1/2}(b_0) \chi_\zeta(b_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1, B}(b_0) \Delta_{B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1}(b_0) db_0,$$

dont la dernière intégrale est égale à

$$\int_{H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \phi(gbg_1^{-1} b'^{-1} h^{-1}) \overline{\chi_{\kappa_1^{-1} \zeta}(b') \Delta_{\kappa_1 B \kappa_1^{-1}, G}^{1/2}(b') \Delta_{\kappa_1 B \kappa_1^{-1} \cap H, \kappa_1 B \kappa_1^{-1}}(b')} \times \\ \times \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1} \cap H}(b') db'.$$

Pourvu que l'égalité

$$\Delta_H^{1/2}(b') \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1} \cap H}(b') = \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1}}^{-1/2}(b') \quad (b' \in g_1 B g_1^{-1} \cap H)$$

s'établisse, ce qui est aisé à constater dans notre cas, on aurait

$$\begin{aligned} &\Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1}, G}^{1/2}(b') \Delta_{\kappa_1 B \kappa_1^{-1} \cap H, \kappa_1 B \kappa_1^{-1}}(b') \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1} \cap H}(b') \\ &= \Delta_H^{-1}(b') \Delta_{H,G}^{1/2}(b') \Delta_{\kappa_1^{-1} B \kappa_1^{-1} \cap H, H}(b'), \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} (\pi(\phi)a_1)(g) &= \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) \chi_\zeta(b) db \int_H \phi(gbg_1^{-1}h) \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh \\ &= \int_{B/B \cap \kappa_2^{-1} H \kappa_2} \phi_H^f(gbg_1^{-1}) \chi_\zeta(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db. \end{aligned}$$

De même façon,

$$(\pi(\phi)a_2)(g) = \int_{B/B \cap \kappa_2^{-1} H \kappa_2} \phi_H^f(gbg_2^{-1}) \chi_\zeta(b) \Delta_{B,G}^{-1/2}(b) db.$$

De tout ce qui précède,

$$\langle \pi(\phi)a_1, a_1 \rangle = \int_{H/H \cap \kappa_1 B \kappa_1^{-1}} \chi_\zeta(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) \int_{B/B \cap \kappa_1^{-1} H \kappa_1} \phi_H^f(hg_1 bg_1^{-1}) \times$$

$$\begin{aligned}
& \chi_{I_1}(b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db \\
= & \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(e^t X) \exp(xT) \exp(yY) \exp(-X)) \exp(iax) \chi \\
& \chi e^{-x/2} dx dy \\
= & \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(e^t X) \exp(ye^{-x} Y) \exp(-e^x X)) \chi \\
& \chi \exp(ix(a - a_0)) e^{-x/2} dx dy \\
= & \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp((e^t - e^x) X) \exp(ye^{-x} Y) e^{-iyx}) \chi \\
& \chi \exp(ix(a - a_0)) e^{-x/2} dx dy \\
= & \int_{\mathbb{R}} \exp(i(t - x)(a_0 - a)) e^{(t+x)/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp((e^t - e^x) X) \exp(yY)) \chi \\
& \chi \exp(-iyx) dx dy.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables  $t \mapsto t + x$ ,  $e^x = s$ , on obtient

$$\langle \kappa(\phi) a_1, a_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \phi_H^f(\exp(s(e^t - 1)X) \exp(yY)) \chi e^{-iy^s} dy ds.$$

D'une façon analogue,

$$\begin{aligned}
\langle \kappa(\phi) a_2, a_2 \rangle &= \oint_{H/H_0 \times \mathbb{R}_2 \times B \times \mathbb{R}_2^{-1}} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) dh \oint_{B/B_0 \times \mathbb{R}_2^{-1} \times H \times \mathbb{R}_2} \phi_H^f(hg_2 bg_2^{-1}) \chi \\
& \chi_{I_2}(b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db \\
= & \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(-e^t X) \exp(xT) \exp(yY) \exp(X)) \chi \\
& \chi \exp(iax) e^{-x/2} dx dy \\
= & \int_{\mathbb{R}} \exp(i(t - x)(a_0 - a)) e^{(t+x)/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp((e^x - e^t) X) \exp(yY)) \chi \\
& \chi \exp(iyx) dx dy \\
= & \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \phi_H^f(\exp(s(1 - e^t)X) \exp(yY)) e^{iy^s} dy ds.
\end{aligned}$$

Ces calculs se terminent donc à

$$\begin{aligned}
& \langle \kappa(\phi) a_1, a_1 \rangle + \langle \kappa(\phi) a_2, a_2 \rangle \\
& = \int_{\mathbb{R}} \exp(it(a_0 - a)) e^{t/2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(s(1 - t)X) \exp(yY)) e^{iy^s} dy ds.
\end{aligned}$$

Si l'on y pose

$$\Psi(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(s(1 - e^t)X) \exp(yY)) e^{iy^s} dy ds,$$

cette fonction est infiniment différentiable pour  $t$  non nulle car, dans ce cas, l'intégrale serait effectuée sur un compact. D'ailleurs, la fonction  $\mathbb{R}^2 \ni (s, y) \mapsto \phi_H^f(\exp(sX) \exp(yY))$  appartenant à  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ , dont on fait des  $L^1$ -approximations par des fonctions de la forme  $\sum_j \xi_j(s) \eta_j(y)$  ( $\xi_j, \eta_j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ), pour un nombre positif  $\varepsilon$  quelconque, on peut choisir des  $\xi_j, \eta_j$  de telle manière que

$$|\Psi(t) - (2\pi)^{1/2} \sum_j \int_{\mathbb{R}} \xi_j(s(1 - e^t)) (\eta_j)^\wedge(s) ds| < \varepsilon$$

quel que soit  $t \in \mathbb{R}$ , où  $(\eta_j)^\wedge$  désigne la transformée de Fourier inverse de  $\eta_j$ . Compte tenu du fait que la limite, lorsque  $t$  tend vers zéro, de

$$\int_{\mathbb{R}} \xi_j(s(1 - e^t)) (\eta_j)^\wedge(s) ds$$

est égale à  $(2\pi)^{1/2} \xi_j(0) \eta_j(0)$ ,  $\Psi(t)$  est continue même en  $t = 0$ .

Nous considérons à la fin la fonction  $e^{t/2} \Psi(t)$ , lorsque  $t \mapsto -\infty$ , elle décroît

rapidement grâce au facteur  $e^{t/2}$ . Examinons son comportement quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Un changement de variables mène à

$$e^{t/2}\Psi(t) = e^{t/2}(1 - e^{-t})^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \phi_H^f(\exp(sX)\exp(yY)) \exp(iys(1 - e^{-t})^{-1}) dsdy,$$

et à

$$|e^{t/2}\Psi(t)| \leq e^{t/2}(1 - e^{-t})^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_H^f(\exp(sX)\exp(yY))| dsdy,$$

ce qui prouve que  $e^{t/2}\Psi(t)$  est à décroissance rapide,  $t$  tendant vers  $+\infty$ .

Il en découle que la formule d'inversion de Fourier peut nous amener à la notre formule de Plancherel concrète pour la représentation monomiale  $\tau = \text{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} \chi_{\tau}$ :

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}} (\langle \pi(\phi) a_1(\alpha), a_1(\alpha) \rangle + \langle \pi(\phi) a_2(\alpha), a_2(\alpha) \rangle) d\alpha \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \phi_H^f(\exp(yY)) e^{iy\alpha} dsdy = \phi_H^f(e). \end{aligned}$$

#### Bibliographie

- [1] L. Auslander and C.C. Moore. Unitary representations of solvable Lie groups, Mem. Amer. Math. Soc. No 62, 1966.
- [2] Y. Benoist, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, J. Func. Anal., 59(1984), 211-253.
- [3] Y. Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, Mém. Soc. Math. France, 15(1984), 1-37.
- [4] P. Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.
- [5] P. Bonnet, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, J. Func. Anal., 55(1984), 220-246.
- [6] L. Corwin, F.P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 304(1987), 549-583.
- [7] L. Corwin and F.P. Greenleaf, Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations in nilpotent Lie groups, Pacific J. Math., 135(1988), 233-267.
- [8] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, Pacific J. Math., 127(1987), 329-352.
- [9] H. Fujiwara et S. Yamagami, Certaines représentations monomiales d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Advanced Studies in Pure Math., 14(1988), 153-190.
- [10] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles expon-

entiels, à paraître.

- [11] H. Fujiwara, Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, à paraître.
- [12] G. Grélaud, Désintégration des représentations induites des groupes de Lie résolubles exponentiels, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Univ. de Poitiers, 1973.
- [13] G. Grélaud, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, Thèse, Univ. de Poitiers, 1984.
- [14] A. A. Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, *Usp. ekhi Mat. Nauk*, 17(1962), 57-110.
- [15] R. Lipsman, Orbital parameters for induced and restricted representations, à paraître dans *Trans. Amer. Math.*.
- [16] R. Lipsman, Harmonic analysis on exponential solvable homogeneous spaces: The algebraic or symmetric cases, à paraître.
- [17] R. Lipsman, Induced representations of completely solvable Lie groups, à paraître.
- [18] R. Lipsman, Restricting representations of completely solvable Lie groups, à paraître.
- [19] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups II: the Frobenius Reciprocity Theorem. *Annals of Math.*, 58(1953), 193-221.
- [20] G. W. Mackey, *The Theory of Unitary Group Representations*, Chicago Lectures in Math., 1976.
- [21] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, *J. Func. Anal.*, 18(1975), 177-190.
- [22] S. R. Quint, Decomposition of induced representations of solvable exponential Lie groups, Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1973.
- [23] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), *Math. J. Okayama Univ.*, 7(1957), 151-161.
- [24] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 3(1970), 353-384.