数理解析研究所講究録
715巻 1990年 57-63

ホロノミー亜群の簡約に付随した C^*-環について

大阪女子大　大内本夫　(Moto O'uchi)

葉層 C^*-環は葉層構造のホロノミー亜群に付随する C^*-環として定義され，通常は単位元を持たない安定な環である。このことはホロノミー亜群の軌道が連続であることと対応している。ところが，葉層構造の余次元1の横断多様体によるホロノミー亜群の簡約（ reduction ）は離散的な軌道を持つ亜群である。そこで葉層構造の余次元1の横断多葉体を単に横断と呼ぶことにする。コンパクト多様体上の葉層構造に対しては，このような簡約に付随する C^*-環は単位元を持つ。さらに，横断が完備（ complete ）ならこのような C^*-環は葉層 C^*-環と安定同型になる［1］。したがって葉層 C^*-環それ自身を考えるより，ホロノミー亜群の簡約に付随する C^*-環を考えたほうが有効な場合が多い。葉層束（ foliated bundle ）に対しては，ホロノミー亜群の完備な横断による簡約の構造が知られている；Γ を葉層束のホロノミー亜群，N を自然

な完備な横断とする。位相空間Fに作用している群Gと，各$x\in F$に対してGの部分群G^xが存在し，簡約[redacted]Γ^N_Nは位相亜群$(F\times G)/\approx$と同型になる，ここで$(x,\gamma)\approx(y,\delta)$となるのは$x=y$かつ$\delta^{-1}\gamma\in G^x$のときである［2, *Theorem* 2.25］。しかし，一般にはホロノミー亜群の完備な横断による簡約はこのような簡単な形をしていない。余次元が2以上のある横断多様体によるホロノミー亜群の簡約が群の作用によって得られる場合でも，横断による簡約が複雑な形になる例がある。ここでは，このような例における横断による簡約を調べてみる。

§1． 葉層構造と群作用

最初に，対象となる葉層構造を定義する。$S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$をSL(2, $\mathbb{Z}$)の元で固有値λが実数かつ無理数であるとする。Sは2次元トーラス$\mathbb{T}^2$上に自然に作用している。
$\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$上の流れ$\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$と$\mathbb{Z}$の作用δを次のように定義する；

$$\varphi_t(\xi,u)=(\xi,u+t)$$

$$\delta_n(\xi,u)=(S^n\xi,u-n).$$

$\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$上の同値関係〜は次のように定義される；

$$(\xi, u) \sim (\eta, v) \Longleftrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{Z} \text{ such that } (\eta, v) = \delta_n(\xi, u).$$

$V = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} / \sim$ とし，φ_t は V 上の流れであると考える。λ_1 と λ_2 を S の固有値で $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$ となるものとする。$p \in V$ における接空間 $T_p(V)$ において，$b(\partial/\partial x)_p + (\lambda_2 - a)(\partial/\partial y)_p$ によって生成される部分空間を X_p，$b(\partial/\partial x)_p + (\lambda_1 - a)(\partial/\partial y)_p$ によって生成される部分空間を Y_p，$(\partial/\partial u)_p$ によって生成される部分空間を Z_p とする。$X_p \oplus Z_p$ によって定義される葉層構造が弱安定な葉層構造 $(V, \mathcal{F}^{ws})$，$Y_p \oplus Z_p$ によって定義されるものが弱非安定な葉層構造 $(V, \mathcal{F}^{wu})$ である。$(V, \mathcal{F}^{ws})$ のかわりに $(V, \mathcal{F}^{\lambda_2})$，$(V, \mathcal{F}^{wu})$ のかわりに $(V, \mathcal{F}^{\lambda_1})$ と書く。以下 S の固有値 λ を1つ固定し，$(V, \mathcal{F}^{\lambda})$ のかわりに $(V, \mathcal{F})$ と書くことにする。$\tilde{\Gamma}$ を $(V, \mathcal{F})$ のホロノミー亜群，A を $\{0\} \times \mathbb{T} \times \{0\}$ の V における像とする。A は $\tilde{\Gamma}$ の完備な横断である。$\tilde{\Gamma}$ の A による簡約を

$$\Gamma = \tilde{\Gamma}_A^A = \{ \gamma \in \tilde{\Gamma} ; s(\gamma), r(\gamma) \in A \}$$

とする。

G を [4] において定義された群とする。すなわち $K = \theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$，$G = \mathbb{Z} \times_s K$ であり，積は

$$(n, k)(n', k') = (n + n', k + \lambda^n k')$$

$(n, k), (n', k') \in \mathbb{Z} \times K$ で与えられる。$H = \{(0, \ell) ; \ell \in \mathbb{Z}\}$

はGの部分群である。GのR上への作用を

$$(n,k)t = \lambda^n t + k$$

によって定義する。$g=(n,\theta l_1+l_2)\in G$に対して

$$T(t,g) = \lambda^n b(n)t + \lambda^n l_1$$

とおく，ただし

$$S^n = \begin{pmatrix} a(n) & b(n) \\ c(n) & d(n) \end{pmatrix}.$$

$g=(n,k)\in G$に対して，$|g|=n$，$\gamma=(t,g)\in \mathbb{R}\times G$に対して$|\gamma|=|g|$とおく。$t\in\mathbb{R}$に対して，$[t]$を$t$の$\mathbb{T}$における商写像による像とする。

命題1.

写像$\varrho:\mathbb{R}\times G \longrightarrow \Gamma$を

$$\varrho(\gamma) = ([S(\gamma)], (-|\gamma|, T(\gamma)))$$

によって定義すると，ϱは$\mathbb{R}\times G$からΓ上への位相亜群としての準同型である。

§2. $C_r^*(\Gamma)$の表現.

$C_r^*(\Gamma)$はΓに付随したreduced C^*環である[1]。$C_r^*(\Gamma)$の$L^2(\mathbb{R}\times H\backslash G)$上の表現を構成するために，次の補題が必要である。

補題2.

$g, g' \in G$, $h, h' \in H$, $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\gamma(h'g't,\ hg(h'g')^{-1}) = \gamma(g't,\ gg'^{-1}).$$

$H\backslash G$ を H に関する右剰余類全体の作る空間とする。$g \in G$ を代表元とする $H\backslash G$ の類を $[g]$ と書く。上の補題によって,写像 $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \times H\backslash G \times H\backslash G \longrightarrow \Gamma$ を

$$\tilde{\gamma}(t, [g], [g']) = \gamma(g't,\ gg'^{-1}) \qquad (g, g' \in G)$$

によって定義することができる。$f \in C_c(\Gamma)$, $\eta \in L^2(\mathbb{R} \times H\backslash G)$ に対して,$\mathbb{R} \times H\backslash G$ 上の関数 $\pi(f)\eta$ を

$$(\pi(f)\eta)(t, \xi) = \sum_{\xi' \in H\backslash G} f \circ \tilde{\gamma}(t, \xi, \xi')\,\eta(t, \xi')$$

によって定義することができる。この時,$\pi(f)$ が $L^2(\mathbb{R} \times H\backslash G)$ 上の有界作用素であることが証明でき,更に次のことがわかる。

定理3.

π は $C_r^*(\Gamma)$ の忠実な表現に拡張することができる。その表現もまた π と書く

§3. $C_r^*(\Gamma)$ の別の記述.

[4] で導入した C^*-環の族 $\{B_s^\lambda ; s\in\mathbb{T}\}$ の定義を思い出しておく。$\tilde{B} = G \times_{\alpha r} C_0(\mathbb{R})$ とし, $u : G \longrightarrow \tilde{B}''$, $\rho : L^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \tilde{B}''$ を標準的な表現とする。$f \in C_c(\mathbb{R})$, $g \in G$ に対して

$$X(f,g) = \sum_{h\in H} \rho(h\cdot f)\, u(hgh^{-1})$$

とおき, B^λ を $X(f,g)$ ($f\in C_c(\mathbb{R})$, $g \in G$) によって生成された C^*-環とする。$(B^\lambda)''$ の中心は $L^\infty(\mathbb{T})$ と同型なので B^λ の恒等表現 L の中心的分解

$$L = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \Phi_s \, ds$$

を考える。$B_s^\lambda = \Phi_s(B^\lambda)$ である。この時, つぎの定理がなりたつ。

定理 4.

$C_r^*(\Gamma)$ と B_0^λ は同型である。ただし λ は $(V, \mathcal{F})$ に対応した S の固有値である。

B_0^λ は亜群 $\mathbb{R}\times G$ の部分亜群 $\mathbb{R}\times H$ による "商" に付随した C^*-環と考えられるので, 上の定理は Moore–Schochet の結果 [2, Theorem 2.25] に対応している。

References

1. Hilsum, M., and Skandalis, G., Stabilité des C*-algèbres de feuilletages, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 33(1983), 201-208.

2. Moore, C.C., and Schochet, C., Global analysis on foliated spaces, Springer-Verlag, New York, 1988.

3. O'uchi, M., Coverings of foliations and associated C*-algebras, Math. Scand., 58(1986), 69-76.

4. O'uchi, M., On C*-algebras containing irrational rotation algebras, preprint.